



Universidade Estadual
da Região Tocantina
do Maranhão

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, NATURAIS E TECNOLÓGICAS - CCENT
LICENCIATURA EM FÍSICA

Estabilidade de soluções periódicas para a equação de Schrödinger não linear

GABRIEL FERNANDEZ FERRARI MELO

GABRIEL FERNANDEZ FERRARI MELO

Estabilidade de soluções periódicas para a equação de Schrödinger não linear

Monografia apresentada ao curso Licenciatura em Física do Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Física

Orientador Profa. Dra. Giovana Alves.

Coorientador Prof. Dr. Cesar Oswaldo Vasquez Flores

Janeiro de 2023

M528e

Melo, Gabriel Fernandez Ferrari

Estabilidade de soluções periódicas para a equação de Schrödinger não linear / Gabriel Fernandez Ferrari Melo. – Imperatriz, MA, 2023.

117 f.; il.

Monografia (Curso de Licenciatura em Física) – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, Imperatriz, MA, 2023.

1. Equação de Schrödinger não linear. 2. Análise espectral. 3. Estabilidade. I. Título.

CDU 53

Ficha elaborada pelo Bibliotecário: **Raniere Nunes da Silva CRB13/729**

CCENT - Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Física intitulado **Estabilidade de soluções periódicas para a equação de Schrödinger não linear** de autoria de Gabriel Fernandez Ferrari Melo, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Profa. Dra. Giovana Alves.
Orientador

Prof. Dr. Cesar Oswaldo Vasquez Flores
Coorientador

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira

Prof. Dr. Mauro Boga Pereira
Universidade Estadual da Região Tocantina do
Maranhão

Imperatriz, 17 de Janeiro de 2023

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a minha mãe, Ilonês Costa Melo.

AGRADECIMENTOS

A Física-Matemática, por sua elegância em conduzir o estudo de problemas físicos com a lógica, raciocínio e filosofia matemática necessários para uma descrição sofisticada dos fenômenos naturais.

A minha mãe, que me fez entender a importância e o valor dos estudos mesmo nas situações mais difíceis.

Ao professor Dr. Mauro Bogéa, por ter me dado a chance de desenvolver meu primeiro projeto de Iniciação Científica e ter me apresentado o incrível mundo subatômico o qual levo comigo como principal interesse na física. Além disso, ainda agradeço pela contribuição como membro da banca.

À professora Dra. Amanda Angelica Nunes Feltrin por ter aceito compor a banca do projeto. Ademais, deixo registrado minha admiração pela sua simpatia e pelas ótimas sugestões para a melhoria do TCC.

A todos os autores de livros que ao longo da graduação estiveram presentes nos meus estudos, em especial nos fins de semana. Particularmente, agradeço ao grande físico Nivaldo Lemos, cujo livro de Mecânica Analítica é responsável pelo meu encantamento ao Teorema de Noether e ao livro convite a Física-Matemática que me permitiu ter o básico do entendimento de lógica.

Ao professor Dr. César pelos vários cursos ministrados ao longo da graduação. Muito obrigado, especialmente ao curso de Mecânica Analítica.

Ao professor Msc. Caleb Campelo, tenho algumas considerações. Primeiramente, muito obrigado pela ótima recepção na entrada da universidade, pelas conversas e conselhos sobre vida acadêmica. Além disso, tenho que agradecer ao excelente curso de Álgebra Linear, o qual foi a porta de entrada para minhas atividades nas monitorias.

Aos inúmeros colegas e amigos que ao longo da faculdade tornaram dias difíceis mais leves e tranquilos. A todos vocês, meu muito obrigado.

Ao Mãeskin que serviu de trilha sonora para as várias horas que estive escrevendo esse texto.

A V.

Ao professor Daniel Mascarenhas, que acreditou em meu potencial e sempre me incentivou a estudar. Infelizmente professor, não segui o caminho que tanto conversávamos. Entretanto, depois de um bom tempo relutante, vejo que estou no caminho certo. Com toda certeza, sua influencia e paixão por estudar matemática seguem comigo. Ao senhor,

meu obrigado do coração.

Aos meus 8 gatos: Bily Squier, Jimmy Hendrix, Tommy Thousand, Miki Jagger, Fred Mercury, Amy Winehouse, Willie (In Memoriam) e ao recém membro Ozzy Osbourne. Muito obrigado pelo carinho transmitido nas horas de elaboração do texto, peço desculpas por, nesse período, não ter dado a atenção merecida a vocês.

Ao meu sobrinho Frederico Evandro e ao meu filho Lilo Ferrari. Aos dois, meus sinceros agradecimentos. Vocês estiveram ao meu lado em diversos momentos de ódio e desse texto. Sentirei falta de ambos.

Por fim, tenho que agradecer a pessoa que nos últimos dois anos esteve constantemente me acompanhando: Giovana Alves. Sem sombra de dúvidas, o agradecimento mais difícil de ser escrito, de fato, talvez nem 100 páginas fossem suficientes para escrever o quanto sou grato pela orientação e pela possibilidade de poder chamá-la de amiga.

Saiba que, foi um enorme prazer trabalhar com você, seja em orientações ou em monitorias. Além disso, preciso reconhecer minha ignorância e ego e deixar registrado que, hoje, incrivelmente, posso chamá-la de professora, não por seu título na universidade, mas por ser uma pessoa que ensina. Em particular, por ter me ensinado muito sobre Análise e como pensar matematicamente. Com toda certeza, ter tido oportunidade de contemplar a Análise e Equações Diferenciais tornou minha formação bem mais rica e completa, transcendendo o que apenas o curso de Física poderia me oferecer.

Nesse contexto, deixo meu Obrigado. E sim, Obrigado com letra maiúscula, pois a essa palavra dou o sentido de nome próprio para que fuja da mera significação de um simples obrigado que possa ser achado em qualquer dicionário de um zé qualquer. Aqui, o Obrigado é dotado de uma forte carga emocional que vem atrelada as boas situações desses últimos 2 anos, em especial, aos momentos de ranho, choros, ódios, venenos destilados e muita matemática.

"You'll be the saddest part of me
A part of me that will never be mine
It's obvious
Tonight is gonna be the loneliest"
Måneskin

"Quando se olha muito tempo para um abismo, o abismo olha para você."
Friedrich Nietzsche

RESUMO

Estudamos soluções periódicas para a Equação de Schrödinger não linear (NLSE)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx}(x, t) + g|u(x, t)|^2u(x, t) = i\hbar u_t(x, t).$$

Em particular, estudamos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} i\hbar u_t + u_{xx} = g|u|^2u, & |\hbar| = |2m| = 1 \quad g < 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0 = \phi(x) \in H_{per}^1([0, L]) \end{cases}$$

associado a soluções do tipo onda viajante periódica. Estabelecemos os resultados de boa colocação global e mostramos a existência de ondas dnoidais que satisfazem a EDO

$$\phi_\omega'' - \omega\phi_\omega - g\phi_\omega^3 = 0.$$

Além disso, estabelecemos os resultados de análise espectral para os operadores associados a EDO acima via teoria Floquet. Com esses resultados, mostramos a estabilidade dessas soluções em $H_{per}^1([0, L])$ para perturbações arbitrárias dos dados iniciais. Por fim, interpretamos os resultados matemáticos do ponto de vista físico e avaliamos o comportamento das soluções associadas ao termo de não linearidade g .

Palavras-chave: <equação de Schrödinger não linear>, <soluções exatas>, <estabilidade>, <aspectos físicos e matemáticos>.

ABSTRACT

We study periodic solutions to the nonlinear Schrödinger Equation (NLSE)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx}(x, t) + g|u(x, t)|^2u(x, t) = i\hbar u_t(x, t).$$

In particular, we study Cauchy's problem

$$\begin{cases} i\hbar u_t + u_{xx} = g|u|^2u, & |\hbar| = |2m| = 1 \quad g < 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0\phi(x) \in H_{per}^1([0, L]) \end{cases}$$

associated with periodic traveling wave type solutions. We establish the global well-posedness results and show the existence of dnoidal waves satisfying the ODE

$$\phi_\omega'' - \omega\phi_\omega - g\phi_\omega^3 = 0.$$

In addition, we establish spectral analysis results for the operators associated with the above ODE via Floquet theory. With these results, we show the stability of these solutions in $H_{per}^1([0, L])$ for arbitrary perturbations of the initial data. Finally, we interpret the mathematical results from a physical point of view and evaluate the behavior of the solutions associated with the nonlinearity term g .

Keywords: <nonlinear Schrödinger equation>, <exact solutions>, <stability>, <physical and mathematical aspects>.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Perfil da onda viajante $\phi_\omega(x)$ em (a) e $ u(x, t) ^2$ de um condensado em	
(b) para diferentes valores de $ g $ e $k = 0.5$. Fonte: Do Autor. 66
Figura 3.2 – Soluções ϕ_ω para $\omega = g = 1$ e diferentes valores de k . Fonte: Do Autor.	67
Figura 3.3 – Soluções ϕ_ω para $k = 0.65$, $\omega = 1$ e alguns valores de $ g $. Fonte: Do	
Autor. 68
Figura 3.4 – Soluções ϕ_ω para $k = 0.999$ e alguns valores de $ g $. Fonte: Do Autor.	. 69
Figura 5.1 – Retrato de fase para diferentes soluções ϕ_ω da NLSE. Fonte: Do Autor.	112
Figura 5.2 – Retratos de fases para diferentes soluções ϕ_ω da NLSE para diferentes	
valores de $ g $ e $\omega = 1$. Fonte: Do Autor. 113
Figura 5.3 – Retratos de fases para diferentes soluções ϕ_ω da NLSE para diferentes	
valores de $ g $ e ω . Fonte: Do Autor. 113
Figura B.1 – Solução numérica para o PVI (4.20) $y_1(x)$ e sua derivada $y_1'(x)$. Fonte:	
Do Autor. 129

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CCENT	Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas
UEMASUL	Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
BECs	Condensados de Bose-Einsten
NLSE	Equação de Schrödinger não linear (Nonlinear Schrödinger Equation)
MQ	Mecânica Quântica

1 INTRODUÇÃO

Em 1926 o físico-matemático Erwin Schrödinger propôs, (SCHRÖDINGER, 1926), uma equação fundamental para a descrição de sistemas atômicos em regimes não relativísticos, baseando-se numa modificação da equação da onda, a qual é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)u(\vec{x}, t) = i\hbar u_t(\vec{x}, t), \quad (1.1)$$

onde $u : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$, $d = 1, 2, 3$ é a função de onda, $V(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar, chamado de potencial, que é associada a descrição física do sistema, m a massa da partícula e \hbar é a constante de Planck reduzida. Essencialmente, a função de onda, introduzida por Louis de Brooglie (WEINBERGER, 2006), é apenas um objeto matemático desprovido de sentido. No entanto, a quantidade $\|u(\vec{x}, t)\|^2$ é dotada de sentido físico, sendo esse a probabilidade do ente físico estudado estar na posição \vec{x} e no instante de tempo t .

De fato, a equação (1.1) permite a descrição de diversos sistemas físicos, em particular há casos para campos escalares independentes do tempo $V(\vec{x})$ que já foram resolvidos, inclusive, de forma analítica (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013).

No entanto, com o despontar dos estudos em Mecânica Quântica (MQ), vários outros sistemas físicos começaram a tornar-se relevantes, em particular, os Condensados de Bose-Einstein (BECs). Esses condensados, consistem de gases resfriados a temperaturas próximas ao zero absoluto, assim, permitindo que alguns efeitos quânticos sejam perceptíveis em escala macroscópica.

Entretanto, os BECs parecem obedecer a equação (1.1). Uma vez que a inclusão de baixas temperaturas atua de forma conflitante entre as leis termodinâmicas e o princípio de incerteza de Heisenberg. Nesse sentido, os efeitos quânticos e de temperatura, levam o sistema a apresentar não linearidades. Dessa forma, a equação linear de Schrödinger torna-se imprecisa para a descrição desse tipo de sistema. Entretanto, podemos generalizar tal equação para incluir os efeitos não lineares, assim obtendo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)u(\vec{x}, t) + g|u(\vec{x}, t)|^2u(\vec{x}, t) = i\hbar u_t(\vec{x}, t), \quad (1.2)$$

onde, $g \in \mathbb{R}$ é um parâmetro associado a não linearidade do tipo cúbica.

A equação (1.2) mostra-se de interesse tanto por seus aspectos físicos, quanto matemáticos. Uma vez que, suas aplicabilidades transcenderam os condensados de Bose-Einstein e hoje perpassam por aplicações em óptica quântica, sistemas integráveis (GERDJIKOV; SAXENA, 2015) e modelos análogos de gravitação (BEKENSTEIN et al., 2015). Por outro lado, casos particulares da equação (1.2) com outras não linearidades vem sendo

estudados de forma extensiva em Análise Matemática. Nesse contexto, a determinação e estudo qualitativo de soluções destacam-se como os grandes interesses dessa comunidade.

Assim, a equação (1.2) torna-se essencialmente rica para estudo. Tendo isso em vista, nesse trabalho buscamos fazer um estudo introdutório de um caso particular da equação de Gross-Pitaveskii, a qual é dado por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx}(x,t) + g|u(x,t)|^2u(x,t) = i\hbar u_t(x,t), \quad (1.3)$$

onde x é a coordenada espacial e o potencial $V(x)$ é identicamente nulo. Em particular, para $|\hbar| = |2m| = 1$ temos a seguinte equação

$$-u_{xx}(x,t) + g|u(x,t)|^2u(x,t) = iu_t(x,t), \quad (1.4)$$

que usualmente chamaremos de equação de Schrödinger Não Linear (NLSE). Ademais, grande parte do trabalho será voltado exatamente para o estudo da equação (1.4), salvo casos especiais onde empregaremos (1.3).

De fato, há uma extensa bibliografia com aplicações físicas relevantes para a equação (1.4). Em particular, destacam-se os trabalhos (BURGER et al., 2002) e (BURGER et al., 1999), que mostram a existências de soluções do tipo sóliton para a NLSE. Além disso, essas soluções são associadas a pulsos de luz emitidos em uma região do espaço numa fibra óptica. Por outro lado, trabalhos como (BRONSKI et al., 2001) mostram que a NLSE é associada a descrição de estados fundamentais de um gás de Bose-Einsten, no entanto, para esses sistemas as soluções da NLSE são periódicas.

Não apenas isso, mas no trabalho (Angulo Pava, 2007), Angulo estabelece uma série de resultados matemáticos para ondas periódicas associadas a NLSE. Inclusive, estabelecendo que soluções periódicas dessa equação são estáveis para perturbações dos dados iniciais.

Então, tendo em vista a riqueza física e matemática da equação (1.4), estudaremos nesse trabalho aspectos físicos e matemáticos dessa equação. Em especial, nosso foco será a determinação de soluções explícitas para a NLSE, as quais serão obtidas a partir do seguinte perfil de solução

$$u(x,t) = \phi(x,t)e^{i\varphi(x,t)}, \quad (1.5)$$

onde $\phi(x,t), \varphi(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções com certa regularidade a ser especificada para o determinado problema. A partir disso, imporemos condições que permitirão nos focar apenas nas soluções do tipo onda viajante periódica.

De fato, as soluções do tipo onda viajante periódica para a NLSE são extremamente relevantes tanto do ponto do vista físico (HAFEZ, 2016) e (MEZA, 2015) quanto do ponto de vista matemático (Angulo Pava, 2007).

Além disso, o estudo dessas soluções requer o uso de teorias matemáticas robustas, em especial, a Teoria Floquet. A qual, possui inúmeras aplicações em várias áreas da física, como a Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos, Matéria Condensada e Mecânica Quântica (RODRIGUEZ-VEGA; LENTZ; SERADJEH, 2018) e (MORI, 2022).

Em particular, para esses tipo de solução, exploraremos o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = g|u|^2u, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & g < 0 \\ u(x, 0) = u_0 = \phi(x) \in H_{per}^1([0, L]), \end{cases}$$

estudaremos os resultados de boa colocação local e global, mostraremos a existência de ondas periódicas dnoidais, com uso das funções elípticas de Jacobi, faremos a análise espectral do operador linearizado associado ao problema e, por fim, mostraremos que as soluções obtidas são estáveis.

Com fins organizacionais, bem como, com intuito de resumirmos o que será feito ao longo do texto, vamos apresentar uma sucinta descrição do trabalho a seguir.

- No Capítulo 2, intitulado por preliminares, apresentaremos as bases matemáticas que permitirão que os resultados para a NLSE sejam desenvolvidos. O capítulo será subdivido em quatro partes, sendo essas
 - Na Seção 2.1 apresentaremos resultados gerais, os quais versam pela Análise Funcional e teoria das Equações Diferenciais.
 - Na Seção 2.2 apresentamos rudimentos da teoria dos espaços de Sobolev periódicos. Em particular, é abordado o caso para $s \in \mathbb{R}$ e comenta-se o caso em que $s \in \mathbb{Z}$, como particular do anterior.
 - Na Seção 2.3 é apresentado, em linhas gerais, as funções e integrais elípticas de Jacobi de primeira e segunda espécie, que serão utilizadas ao longo do texto. Ademais, discute-se sobre a periodicidade das funções elípticas e sobre algumas propriedades que são satisfeitas por essas funções.
 - Na seção 2.4 apresentamos alguns elementos da Teoria e operadores. Em particular, nos ativemos a definições de operadores fechados e a caracterização do seu espectro.
 - Na Seção 2.5 introduzimos a Teoria Floquet para a análise espectral de operadores de Hill. Ademais, também introduzimos a nova versão da teoria apresentada em (NATALI; PASTOR, 2014), a qual é efetivamente empregada nesse texto.
- No Capítulo 3, obtemos dois resultados para a NLSE. Em particular, estabelecemos o problema de Cauchy associado a NLSE para soluções periódicas. Posteriormente,

conseguimos garantir o resultado de boa colocação local em $H_{per}^s([0, L])$ para $s \in \mathbb{R}$ seguindo as ideias de (IORIO et al., 2001). Posteriormente, usando algumas quantidades conservadas obtemos a boa colocação global em $H_{per}^1([0, L])$. Por fim, obtivemos a solução periódica na forma de uma onda dnoidal e discutimos alguns aspectos físicos relevantes.

- No Capítulo 4, dedicamos nossos esforços a análise espectral dos operadores linearizados associados a NLSE. Para isso, empregamos a nova versão da Teoria Floquet apresentada em (NATALI; PASTOR, 2014). Além disso, mostramos alguns resultados de positividade para esses operadores que são de extrema utilidade para a garantia da estabilidade das ondas dnoidais.
- No Capítulo 5, estabelecemos o resultado de estabilidade para soluções periódicas da NLSE. Em linhas gerais, o desenvolvimento segue como um estudo da seção 4 do trabalho (Angulo Pava, 2007).

2 PRELIMINARES

Nesse capítulo, introduziremos brevemente algumas definições e resultados matemáticos que serão empregadas ao longo do texto. Dada a generalidade dos resultados, em cada seção seguinte introduzimos brevemente as referências associadas as definições, lemas e teoremas que seguem.

2.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS GERAIS

Nesta seção, apresentamos alguns resultados gerais de análise funcional e da teoria de equações diferenciais. Esses resultados podem ser vistos mais detalhadamente nas seguintes literaturas (KREYSZIG, 1989) e (FIGUEIREDO D.; NEVES, 2015).

Definição 2.1. (*Álgebra de Banach*) A é uma álgebra de Banach se

- (i) A é um espaço de Banach, munido com norma $\|\cdot\|$ e definido sobre um corpo \mathbb{K} que pode ser \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- (ii) Existe uma operação fechada

$$\begin{aligned}\times : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow z = x \times y \equiv xy\end{aligned}$$

onde $x, y, z \in A$, chamada de multiplicação, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas para para todos $x, y, z \in A$ e $k \in \mathbb{K}$,

- (a) $x(yz) = (xy)z$, isto é, a operação \times é associativa
 - (b) $(x + y)z = xz + yz$,
 - (c) $x(y + z) = xy + xz$,
 - (d) $k(xy) = (kx)y = x(ky)$.
- (iii) Existe um elemento $e \in A$ tal que $ex = x$ para todo $x \in A$ e $\|e\| = 1$
 - (iv) Para todos $x, y \in A$ vale que

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Observação 2.1. Ao longo de todo o texto, sempre que denotarmos \mathbb{K} , estaremos nos referindo a um corpo que pode ser \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Além disso, convencionaremos que todos os espaços vetoriais empregados nesse trabalho estarão definidos sobre o corpo \mathbb{K} . Sendo especificado o corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} , apenas, em casos onde realmente se faz necessário e há influência direta nos resultados que estaremos desenvolvendo.

Teorema 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e período minimal L . Então, todas as derivadas de f são L -periódicas, isto é,

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x + L). \quad (2.1)$$

Demonstração. Fazemos indução em n . Com efeito, para $n = 0$ temos $f^0 \equiv f$ que é o caso trivial e o resultado segue da hipótese do Teorema. Assumamos a hipótese para $n = k$, isto é,

$$f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x + L).$$

Agora, provemos para o caso $k + 1$. Com efeito, derivando a expressão acima temos

$$(f^{(k)}(x))' = (f^{(k)}(x + L))' \implies f^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x + L) \cdot (x + L)' = f^{(k+1)}(x + L).$$

Portanto, segue, por indução em n que $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x + L)$. ■

Lema 2.1. (Lema de Gronwall) Sejam α, β e δ funções contínuas definidas em um intervalo $I = (a, b)$, tais que $\beta \geq 0$ e

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\delta(s)ds. \quad (2.2)$$

Então

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \left[\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(u)du} \right] ds. \quad (2.3)$$

Demonstração. Ver (FIGUEIREDO D.; NEVES, 2015). ■

Proposição 2.1. (Desigualdade de Hölder) Seja S um conjunto não vazio, Σ uma σ -álgebra e μ uma medida. Considere o espaço de medida (S, Σ, μ) e seja $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suponha que S seja o espaço das funções mensuráveis a Lebesgue, então, para $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$ vale que

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q. \quad (2.4)$$

A desigualdade (2.4) é chamada de desigualdade de Hölder's.

Demonstração. Ver (KREYSZIG, 1989). ■

Proposição 2.2. (*Desigualdade de Minkowski*) Seja $(V, \|\cdot\|_V)$ um espaço vetorial normado. Então, dados $f, g \in V$ vale que

$$\|f + g\|_V \leq \|f\|_V + \|g\|_V. \quad (2.5)$$

A desigualdade (2.5) é chamada de desigualdade de Minkowski's.

Demonstração. Ver (KREYSZIG, 1989). ■

Teorema 2.2. (*Teorema da Convergência Dominada*) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge μ -q.t.p. para uma função real mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n , então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Demonstração. Ver (MEDEIROS; MELLO, 1989). ■

Teorema 2.3. (*Teorema do Ponto Fixo de Banach*) Seja C um espaço métrico completo. Suponha que a aplicação $\Phi : C \rightarrow C$ contínua é uma contração, isto é, existe uma constante $0 \leq k < 1$, tal que

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq kd(g_1, g_2),$$

para todos os $g_1, g_2 \in C$. Então, existe um, e somente um, $g \in C$, tal que $g = \Phi(g)$.

Demonstração. Ver (HÖNIG, 1976). ■

2.2 ESPAÇOS DE SOBOLEV PERIÓDICOS

Nesta seção, introduziremos brevemente o conceito de Transformada de Fourier para funções periódicas e definiremos os espaços de Sobolev periódico, que serão usados nos capítulos seguintes. A maior parte dos resultados contidos aqui podem ser encontrados em (IORIO et al., 2001) e (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019).

Definição 2.2. Seja Ω um aberto de \mathbb{R} . Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tais que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < +\infty$$

ou

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)| < \infty, \text{ se } p = +\infty.$$

Proposição 2.3. O espaço normado $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ é um espaço de Banach. No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço Hilbert, munido do produto interno

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} \equiv \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}dx, \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Definição 2.3. Seja $L > 0$ um número real fixado. Denotemos por $\mathcal{P} = C_{per}^{\infty} = C_{per}^{\infty}([0, L])$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, que são infinitamente diferenciáveis e L -periódicas.

Definição 2.4. Designemos \mathcal{P}' , o Espaço das Distribuições Periódicas, como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos de \mathcal{P} em \mathbb{C} . O valor de $\psi \in \mathcal{P}'$ em $\varphi \in \mathcal{P}$ é denotado por $\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle$. Consideremos $\kappa \in \mathbb{Z}$ e a função $\Theta_{\kappa}(x) = e^{\frac{2\pi i \kappa x}{L}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.5. A Transformada de Fourier de $\psi \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, dada pela lei de formação

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{L} \langle \psi, \Theta_{-\kappa} \rangle, \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.6. Fixemos p real, de modo que $p \geq 1$. A função $\psi \in L^p([0, L])$ define uma distribuição periódica. Neste caso, $\psi \in \mathcal{P}'$ com

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_0^L \psi(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Desta maneira, a Transformada de Fourier da função $\psi \in L^p([0, L])$ é dada por

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x)e^{-\frac{2\pi i \kappa x}{L}}dx, \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.7. Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev $H_{per}^s([0, L])$ como sendo o conjunto de todas as distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$, de modo que

$$\|f\|_{H_{per}^s([0, L])}^2 = L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (1 + |\kappa|^2)^s |\widehat{f}(\kappa)|^2 < \infty$$

Proposição 2.4. O conjunto $H_{per}^s([0, L])$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(f, g)_{H_{per}^s([0, L])} \equiv L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (1 + |\kappa|^2)^s \widehat{f}(\kappa)\overline{\widehat{g}(\kappa)}, \forall f, g \in H_{per}^s([0, L])$$

Definição 2.8. Definamos $L_{per}^2([0, L]) \equiv H_{per}^0([0, L])$. Por sua vez, o conjunto $L_{per}^2([0, L])$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(f, g)_{L_{per}^2([0, L])} \equiv \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx, \forall f, g \in L_{per}^2([0, L]).$$

Além disso, para todo $s \in \mathbb{R}$, $(H_{per}^s([0, L]))'$, o dual topológico de $H_{per}^s([0, L])$, é isometricamente isomorfo ao espaço $H_{per}^{-s}([0, L])$. Se $f \in H_{per}^{-s}([0, L])$ e $g \in H_{per}^s([0, L])$, o par dualidade é representado por

$$\langle f, g \rangle_{H_{per}^{-s}([0, L]), H_{per}^s([0, L])} \equiv L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa)\overline{\widehat{g}(\kappa)}.$$

Observação 2.2. Por vezes, o espaço H_{per}^s é definido para $s \in \mathbb{Z}$. Em particular, nesse caso temos $s = m \in \mathbb{Z}^+$ e sob essa condição, o Espaço de Sobolev $H_{per}^m([0, L])$ pode ser interpretado como o conjunto das distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$ tais que

$$f^{(j)} \in L_{per}^2([0, L]), \forall j \in \{0, 1, \dots, m\},$$

onde $f^{(j)}$ denota a j -ésima derivada de f , tomada no sentido de \mathcal{P}' . A norma

$$\|f\|_{H_{per}^m([0, L])} = \left(\sum_{j=0}^m \|f^{(j)}\|_{L_{per}^2([0, L])}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall f \in H_{per}^m([0, L])$$

é equivalente à norma de $H_{per}^m([0, L])$ apresentada acima para índice geral.

Teorema 2.4. (Imersões em espaços de Sobolev) Sob certas condições, é possível obter algumas imersões entre os espaços $H_{per}^s([0, L])$. Em particular, vemos que

(i) Sempre que $s \geq r$ temos que

$$H_{per}^s([0, L]) \xhookrightarrow{c} H_{per}^r([0, L]).$$

(ii) Em especial, para cada $s \geq 0$, temos

$$H_{per}^s([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^2([0, L]).$$

(iii) Para $s = 1$, obtemos ainda a seguinte cadeia de imersões

$$H_{per}^1([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^{p_1}([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^{p_2}([0, L]), \forall p_1, p_2 \in [1, +\infty], p_2 \leq p_1,$$

no último caso, para $1 \leq p \leq \infty$, adotamos a seguinte convenção sobre o espaço $L_{per}^p([0, L])$

$$L_{per}^p([0, L]) \equiv \left\{ f; f \text{ é uma função } L\text{-periódica e } f|_{[0, L]} \in L^p([0, L]) \right\}$$

e

$$\|f\|_{L_{per}^p([0, L])} = \|f\|_{L^p([0, L])}, \quad \forall f \in L_{per}^p([0, L]).$$

Demonstração. Ver [\(IORIO et al., 2001\)](#). ■

Teorema 2.5. (Desigualdade de Gangliardo-Nirenberg). Seja q e r dois números positivos tais que $1 < q, r < +\infty$, j, m dois números inteiros não negativos de modo que $j < m$, p um número real com $p \geq 1$ e $\kappa \in [0, 1]$ de modo que a seguinte relação:

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \kappa \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + \frac{1 - \kappa}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq \kappa \leq 1 \quad (2.6)$$

seja satisfeita. Então, vale que

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^\kappa \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\kappa} \quad (2.7)$$

para todo $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tal que $D^m u \in L^r(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver (CAZENAVE, 2003). ■

2.2.1 Convenção sobre a notação

Ao longo dessa seção, fica evidente que para correto emprego dos espaços de Sobolev periódicos, é necessário termos uma notação igualmente poderosa. Tendo isso em vista, vamos definir algumas convenções sobre essas notações. Com isso, obteremos desenvolvimentos mais limpos ao longo do texto, essas convenções são

(C1) Para o espaço $L^p_{per}([0, L])$, convencionamos sua norma por

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p([0, L])} &\equiv \|\cdot\|_{L^p} : L^p([0, L]) \rightarrow \mathbb{K} \\ f &\rightarrow \|f\|_{L^p([0, L])} \equiv \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

e o seu produto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^p([0, L])} &\equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^p} : L^p([0, L]) \times L^p([0, L]) \rightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\rightarrow \langle f, g \rangle_{L^p([0, L])} \equiv \langle f, g \rangle_{L^p}. \end{aligned}$$

No caso particular em que $p = 2$, usaremos apenas que $\|\cdot\|_{L^2} \equiv \|\cdot\|$ e que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$.

(C2) Para o espaço $H^s_{per}([0, L])$, convencionamos sua norma da seguinte forma

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H^s_{per}([0, L])} &\equiv \|\cdot\|_s : L^p([0, L]) \rightarrow \mathbb{K} \\ f &\rightarrow \|f\|_{H^s_{per}([0, L])} \equiv \|f\|_s. \end{aligned}$$

e o seu produto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s([0, L])} &\equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_s : H^s_{per}([0, L]) \times H^s_{per}([0, L]) \rightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\rightarrow \langle f, g \rangle_{H^s_{per}([0, L])} \equiv \langle f, g \rangle_s. \end{aligned}$$

2.3 FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

Nesta seção, estabeleceremos algumas propriedades das integrais elípticas de Jacobi. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada nas referências (BOWMAN, 1961a) e (BYRD; FRIEDMAN, 2012).

Definição 2.9. Sejam $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $k \in (0, 1)$. A integral elíptica do primeiro tipo é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}} \equiv F(\varphi, k)$$

onde $y = \sin(\varphi)$. A integral elíptica do segundo tipo é definida por

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)} d\phi \equiv E(\varphi, k).$$

O número k é denominado o módulo da integral elíptica e o número $k' \equiv \sqrt{1-k^2}$ é denominado o módulo complementar a k . O parâmetro φ é chamado o argumento da integral elíptica.

Definição 2.10. Como $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $0 \leq y \leq 1$. Se $y = 1$, as integrais elípticas da Definição 2.9 são ditas completas. Neste caso, escrevemos

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)} d\phi \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Proposição 2.5. Vemos que $\lim_{k \rightarrow 0^+} K(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} E(k) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{k \rightarrow 1^-} E(k) = 1$ e $\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = +\infty$.

Demonstração. Ver (BOWMAN, 1961b). ■

Proposição 2.6. Para cada $k \in (0, 1)$, $E(k) < K(k)$ e, são válidas as seguintes identidades

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2K}{kk'^2} = \frac{E - (1-k^2)K}{k(1-k^2)} \quad e \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}.$$

Demonstração. Ver (BOWMAN, 1961b). ■

Definição 2.11. Para $y_1 \in [0, 1]$ e $k \in (0, 1)$, consideremos a integral elíptica,

$$u(y_1, k) \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}} \equiv F(\varphi_1, k)$$

onde $\varphi_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ satisfaz $y_1 = \sin(\varphi_1)$. Para k fixado, u é uma função estritamente crescente na variável y_1 . A inversa da função u , para k fixado, define a função senoidal, que é descrita por $\text{sn}(u, k) \equiv \sin(\varphi_1) = y_1$ e $\varphi_1 = \text{am}(u, k)$ (a função $\text{am}(u, k)$ é chamada função amplitude de u). Podemos escrever ainda, $y_1 = \text{sn}(u)$ quando não é necessário

ênfatizar o m3dulo k . As outras duas funç3es el3pticas b3sicas, as funç3es cnoidal cn e dnoidal dn , s3o definidas em termos de sn da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\text{cn}(u, k) &\equiv \sqrt{1 - y_1^2} = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u, k)} \\ \text{dn}(u, k) &\equiv \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}.\end{aligned}$$

Proposiç3o 2.7. *As funç3es el3pticas de Jacobi satisfazem as seguintes propriedades:*

- $\text{dn}(0; k) = 1, \text{cn}(0; k) = 1$ e $\text{sn}(0; k) = 0$
- As funç3es $\text{dn}(\cdot, k)$ e $\text{cn}(\cdot, k)$ s3o pares e a funç3o $\text{sn}(\cdot, k)$ 3 impar,
- As funç3es el3pticas s3o peri3dicas. Em especial tem-se

$$\begin{aligned}\text{sn}(u + 2K, k) &= \text{sn}(u), \\ \text{cn}(u + 4K, k) &= \text{cn}(u), \\ \text{dn}(u + 4K, k) &= \text{dn}(u).\end{aligned}$$

- Para $k \in (0, 1)$, estas as funç3es satisfazem as seguintes relaç3es:

$$\begin{cases} \text{sn}^2(u; k) + \text{cn}^2(u; k) = 1, k'^2 \text{sn}^2(u; k) + \text{cn}^2(u; k) = \text{dn}^2(u; k), \\ k^2 \text{sn}^2(u; k) + \text{dn}^2(u; k) = 1, -1 \leq \text{sn}(u; k) \leq 1, -1 \leq \text{cn}(u; k) \leq 1, \\ k'^2 \leq \text{dn}(u; k) \leq 1, \text{sn}(u + 2K; k) = -\text{sn}(u; k) \text{ e } \text{cn}(u + 2K; k) = -\text{cn}(u; k). \end{cases}$$

- Temos ainda que $\text{sn}(0, k) = \text{cn}(0) = \text{cn}(K) = 0$ e $\text{sn}(K) = 1$.
- Os casos assint3ticos das funç3es el3pticas para a vari3vel k s3o tais que:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow 0^+} \text{sn}(u, k) &= \sin(u), \\ \lim_{k \rightarrow 1^-} \text{sn}(u, k) &= \tanh(u).\end{aligned}$$

- As derivadas das funç3es el3pticas s3o:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \text{sn}(u) &= \text{cn}(u) \text{dn}(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \text{cn}(u) &= -\text{sn}(u) \text{dn}(u), \\ \frac{\partial}{\partial u} \text{dn}(u) &= -k^2 \text{cn}(u), \text{sn}(u).\end{aligned}$$

Demonstraç3o. Ver (BOWMAN, 1961b). ■

2.4 TEORIA OPERADORES E TEORIA ESPECTRAL

Agora, vamos expor alguns resultados da teoria espectral para operadores. Esses podem ser vistos em detalhes, também, em (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019).

Aqui, ao longo de todos os resultados consideremos A como um operador linear com domínio $D(A)$.

Definição 2.12. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert munido com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma induzida $\| \cdot \|$. Além disso, se o operador linear A , com domínio $D(A) \subset \mathcal{H}$ também é limitado, então*

- A é contínuo,
- O operador A^* , tal que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$$

para todos $u, v \in \mathcal{H}$ e $\|A^*\| = \|A\|$ é dito adjunto de A .

- A é dito simétrico se satisfaz

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

para todo $u, v \in \mathcal{H}$.

- Se $A^* = A$, então A é dito autoadjunto.
- Se $A^* = A^{-1}$, então A é dito unitário.
- Se $A^*A = AA^*$, então A é dito normal.

Nas definições que seguem, vamos considerar sempre que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert.

Definição 2.13. *(Forma Sesquilinear). Sejam X e Y espaços vetoriais definidos sobre um corpo \mathbb{K} . Uma forma sesquilinear, ou funcional sesquilinear, h é um mapa*

$$h : X \times Y \rightarrow \mathbb{K},$$

tal que, para todos $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, as seguintes condições são verificadas:

$$\begin{aligned} h(\alpha x_1 + x_2, \beta y_1) &= \alpha h(x_1, \beta y_1) + \beta h(x_2, \beta y_1) \\ h(\alpha x_1, \beta y_1 + y_2) &= \beta \alpha h(x_1, y_1) + \alpha h(x_1, y_2). \end{aligned}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a forma h é bilinear.

Teorema 2.6. (Teorema de Lax-Milgram) Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 dois espaços de Hilbert e $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear limitada. Então, h é representada por

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle, \quad (2.8)$$

onde $S : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ é um operador linear limitado. Além disso, S é unicamente determinado por h e tem norma

$$\|S\| = \|h\|, \quad (2.9)$$

ou seja S é uma isometria.

Demonstração. Ver (KREYSZIG, 1989). ■

Definição 2.14. Seja E um espaço de Banach definido sobre o corpo \mathbb{K} que pode ser \mathbb{R} ou \mathbb{C} e $A \in \mathfrak{L}$, onde \mathfrak{L} é o espaço dos funcionais lineares de E . Então,

(i) Denominamos o conjunto resolvente de A por:

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}; A - \lambda I \text{ é bijetor}\}.$$

(ii) Denominamos espectro de A , e denotamos por $\sigma(A)$, o complementar de $\rho(A)$ em relação ao corpo \mathbb{K} , ou seja

$$\sigma(A) = \mathbb{K} - \rho(A).$$

(iii) Denominamos o conjunto de valores próprios de A (ou autovalores de A), e denotamos por $VP(A)$, o conjunto

$$VP(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}; N(A - \lambda I) \neq 0\},$$

em que I é o funcional identidade.

Definição 2.15. (Operador Fechado) Consideraremos o operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Dizemos que A é fechado se para qualquer sequência $(x_n) \subset D(A)$ que satisfaz as condições

$$x_n \rightarrow x \text{ e } Ax_n \rightarrow y = Ax \quad (2.10)$$

implicar que $x \in D(A)$ com $y = Ax$.

Em particular para operadores lineares fechados, enuncia-se.

Definição 2.16. (Operador resolvente) Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador fechado com domínio $D(A) \subset \mathcal{H}$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ está no conjunto resolvente de A , o qual será denotado por $\rho(A)$, se o operador

$$R(\lambda, S) = (S - \lambda I)^{-1}$$

existe, está densamente definido em H e é limitado. Em outras palavras:

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe } D((A - \lambda I)^{-1}) \text{ é denso em } \mathcal{H} \text{ e } (A - \lambda I)^{-1} \text{ é limitado} \}.$$

Definição 2.17. (Espectro de um operador fechado). Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador fechado com domínio $D(A) \subset \mathcal{H}$. Então, o espectro do operador A é tal que

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$$

e $\sigma(A)$ pode ser particionado em três conjuntos distintos:

- (i) *Espectro Pontual:* $\sigma_p(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(A - \lambda I)u = 0$ possui soluções não triviais. Em outras palavras, λ é um autovalor de A e qualquer outra solução não trivial correspondente u é um autovetor de A correspondente a λ ; a multiplicidade (geométrica) de λ é a dimensão do núcleo $N(A - \lambda I)$.
- (ii) *Espectro Contínuo:* $\sigma_c(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $R_\lambda(A)$ existe e $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = \mathcal{H}$, mas $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ é ilimitado.
- (iii) *Espectro Residual:* $\sigma_r(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $R_\lambda(A)$ existe (e pode ser limitado ou não) mas $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq \mathcal{H}$.

Logo, temos a seguinte união disjunta

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Definição 2.18. (Operador fechável) Um operador linear A é dito ser fechável, se existir pelo menos uma extensão fechada de A .

Vejamos, agora, a noção de operador densamente definido a qual, em seguida, será usada para termos algumas propriedades associadas aos operadores fechados.

Definição 2.19. Seja $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. Então o operador adjunto $A^* : D(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$ de A é definido da seguinte maneira:

$$D(A^*) = \{ y \in \mathcal{H}; \text{ existe } z \in \mathcal{H} \text{ satisfazendo } \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle \forall x \in D(A) \}$$

e para cada $y \in D(A^*)$ define $A^*y = z$. Note que para z ser unicamente determinado, precisamos da condição de que $D(A)$ é denso em \mathcal{H} .

Teorema 2.7. Seja $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. Então, temos

- (i) A^* é um operador fechado;

- (ii) Se A é fechado, então $D(A^*)$ é denso em \mathcal{H} . Além disso, $A^{**} = A$;
- (iii) Se $\overline{D(A^*)} = \mathcal{H}$. Então, A é fechável e $A \subseteq A^{**}$. Além disso, $A^{**} = \bar{A}$;
- (iv) Existem operadores lineares na qual não possuem extensão fechada.

Demonstração. Ver (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019). ■

Definição 2.20. *Seja $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. Então, A é chamado de operador autoadjunto se $A = A^*$, i.é, se, e somente se, $D(A) = D(A^*)$ e*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

para todo $u, v \in D(A)$.

Teorema 2.8. *(Espectro de operadores auto-ajunto). Seja $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto ($D(A)$ denso em \mathcal{H}). Então, segue que*

- (i) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
- (ii) A não possui espectro residual. Logo, $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.

Demonstração. Ver (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019). ■

Agora, vamos estabelecer um resultado que permite a determinação do espectro de um operador autoadjunto.

Teorema 2.9. *Seja $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto ($D(A)$ denso em \mathcal{H}). Então um número real λ pertence à $\sigma(A)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_n) \subset (A)$, tal que*

$$\|u_n\| = 1 \text{ e } \|(A - \lambda I)u_n\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Ver (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019). ■

Corolário 2.1. *Se $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador autoadjunto e*

$$\|u\| \leq \|Au\|, u \in D(A),$$

então A é injetivo e $\text{Im}(A)$ é fechado.

Demonstração. Ver (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019). ■

Definição 2.21. (Imersão) Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados, munidos com as respectivas normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ e tais que $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$. Caso, a aplicação identidade $i : X \rightarrow Y$, isto é $i(x) = x$ for contínua dizemos que a imersão é contínua.

Definição 2.22. (Imersão compacta) Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $i : X \rightarrow Y$ for compacta. Nesse caso dizemos que X está imerso compactamente em Y e escrevemos $X \xhookrightarrow{c} Y$.

Lema 2.2. (Lema de Weinstein) Seja A um operador autoadjunto definido sobre $L^2(\mathbb{R})$ tendo exatamente um autovalor negativo, λ_0 , com autofunção correspondente $f_0 \geq 0$. Definamos

$$-\infty < \tau \equiv \min_f (Af, f), \quad \text{onde } \|f\| = 1 \text{ e } (f, R) = 0. \quad (2.11)$$

Suponhamos que $(R, f_0) \neq 0$ e $R \in N^\perp(A)$. Então, $\tau \geq 0$ se

$$(A^{-1}R, R) \leq 0. \quad (2.12)$$

Demonstração. Ver (WEINSTEIN, 1985). ■

Teorema 2.10. (Imersões em espaços de Sobolev) Sob certas condições, é possível obter algumas imersões entre os espaços $H_{per}^s([0, L])$. Em particular, vemos que

(i) Sempre que $s \geq r$ temos que

$$H_{per}^s([0, L]) \xhookrightarrow{c} H_{per}^r([0, L]).$$

(ii) Em especial, para cada $s \geq 0$, temos

$$H_{per}^s([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^2([0, L]).$$

(iii) Para $s = 1$, obtemos ainda a seguinte cadeia de imersões

$$H_{per}^1([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^{p_1}([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^{p_2}([0, L]), \quad \forall p_1, p_2 \in [1, +\infty], p_2 \leq p_1,$$

no último caso, para $1 \leq p \leq \infty$, adotamos a seguinte convenção sobre o espaço $L_{per}^2([0, L])$

$$L_{per}^p([0, L]) \equiv \left\{ f; f \text{ é uma função } L\text{-periódica e } f|_{[0, L]} \in L^p([0, L]) \right\}$$

e

$$\|f\|_{L_{per}^p([0, L])} = \|f\|_{L^p([0, L])}, \quad \forall f \in L_{per}^p([0, L]).$$

Demonstração. Ver (IORIO et al., 2001). ■

2.5 TEORIA DE FLOQUET E ESPECTRO DO OPERADOR DE HILL

Nesta seção, vamos apresentar um breve resumo da elegantíssima Teoria Floquet. Nos concentraremos em estabelecer os resultados clássicos da teoria que foram desenvolvidos em (MAGNUS; WINKLER, 1966). Além disso, também nos ateremos a expor alguns resultados da chamada nova Teoria Floquet a qual foi estabelecida por Neves em (NEVES, 2009) e (NEVES, 2008).

2.5.1 Conceitos elementares da teoria Floquet

Sejam $L > 0$ e \mathbb{K} um corpo que pode ser \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Consideremos $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função L -periódica de classe C^2 . Então, a equação diferencial

$$-y'' + Q(x)y = 0. \quad (2.13)$$

possui duas soluções $y_1 \equiv y_1(x)$ e $y_2 \equiv y_2(x)$ continuamente diferenciáveis e univocamente determinadas pelas condições iniciais

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \text{ e } y_1'(0) = 0, \\ y_2(0) = 0 \text{ e } y_2'(0) = 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

conforme (NATALI; NEVES, 2013a).

Definamos a equação característica associada a EDO (2.13) por:

$$\rho^2 - [y_1(L) + y_2'(L)]\rho + 1 = 0. \quad (2.15)$$

Agora, suponhamos que as raízes a equação característica (2.15) sejam ρ_1 e ρ_2 . De fato, existe um número complexo α tal que, $e^{i\alpha L} = \rho_1$ e $e^{-i\alpha L} = \rho_2$.

De posse disso, podemos enunciar o Teorema de Floquet, segundo (MAGNUS; WINKLER, 1966), este é apresentado a seguir.

Teorema 2.11. (*Teorema de Floquet*). *Considere as equações (2.13) e (2.14), bem como as raízes ρ_1 e ρ_2 da equação (2.15). Então, temos que*

1. *Se $\rho_1 \neq \rho_2$, então, a equação (2.13) tem duas soluções linearmente independentes f_1 e f_2 , de forma que $f_1(x) = e^{i\alpha x} P_1(x)$ e $f_2(x) = e^{-i\alpha x} P_2(x)$, onde P_1 e P_2 são duas funções L -periódicas.*

2. Se $\rho_1 = \rho_2$, há duas possibilidades: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ou $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Se a primeira possibilidade ocorre, isto é $\rho_1 = \rho_2 = 1$, então a equação (2.13) tem uma solução não-trivial periódica de período L . Por outro lado, se a segunda possibilidade ocorre, isto é $\rho_1 = \rho_2 = -1$, então a equação (2.13) tem uma solução não-trivial periódica de período $2L$. Suponhamos que $p(x)$ denote uma solução periódica de (2.13) e que $y(x)$ seja uma outra solução de (2.13), linearmente independente a $p(x)$. Então, existe uma constante θ de maneira que

$$y(x + L) = \rho_1 y(x) + \theta p(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Além disso, $\theta = 0$ se, e somente se,

$$y_1(L) + y_2'(L) = \pm 2, y_2(L) = 0 \text{ e } y_1'(L) = 0.$$

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

O Teorema 2.11 pode ser ainda aprimorado se uma das possibilidades sob as raízes ρ_1 e ρ_2 é satisfeita. Com efeito, esse é

Teorema 2.12. *A equação (2.13) admite uma solução L -periódica, se e somente se, $\rho_1 = \rho_2 = 1$*

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

Ademais, podemos ainda definir certas condições sob a função $Q(x)$, a qual nos referiremos como potencial, de modo que possa ser possível conhecer o comportamento das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ univocamente determinadas pelas equações (2.13) e (2.14). Nesse sentido, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.13. *Seja o problema (2.13) que é univocamente solucionado pelas funções y_1 e y_2 que estão sujeitas às condições iniciais (2.14). Se o potencial $Q(x)$ for par, ou seja, se $Q(x) = Q(-x), \forall x \in \mathbb{R}$, então, a função y_1 é par e a função y_2 é ímpar. Além disto, se a equação (2.13) admitir uma solução periódica não-trivial de período L , existe uma função periódica $p(x)$ não-trivial de período L satisfazendo (2.13) que é par ou é ímpar.*

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

Agora, vamos enunciar o importante Teorema da Oscilação.

Teorema 2.14. *(Teorema da Oscilação). Existem duas sequências de números reais monótonas não decrescentes,*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots,$$

tais que (2.13) possui uma solução de período L se, e somente se, $\lambda = \lambda_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e uma solução de período $2L$ se, e somente se, $\lambda = \mu_n, n = 1, 2, 3, \dots$. Os λ_n 's e μ_n 's satisfazem as desigualdades,

$$\lambda_0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots$$

e as relações

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} = 0.$$

As soluções de (2.13) são limitadas nos intervalos

$$(\lambda_0, \mu_1), (\mu_2, \lambda_1), (\lambda_2, \mu_3), (\mu_4, \lambda_3), \dots$$

Nos pontos finais desses intervalos, (2.13) possui, em geral, soluções ilimitadas. Isto sempre é verdadeiro para $\lambda = \lambda_0$. As soluções de (2.13) são limitadas para $\lambda = \lambda_{2n+1}$ ou $\lambda = \lambda_{2n+2}$ se, e somente se, $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ e elas são limitadas para $\lambda = \mu_{2n+1}$ ou $\lambda = \mu_{2n+2}$ se, e somente se, $\mu_{2n+1} = \mu_{2n+2}$. Para valores complexos de λ (2.13) sempre possui soluções ilimitadas. Os λ_n 's são as raízes da equação $\Delta(\lambda) = 2$ e os μ_n 's são as raízes da equação $\Delta(\lambda) = -2$, onde

$$\Delta(\lambda) = y_1(L, \lambda) + y_2'(L, \lambda).$$

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

O resultado seguinte, relaciona a posição do autovalor no espectro e número de zeros das respectivas autofunções.

Teorema 2.15. *Seja $y(x, \lambda)$ uma solução real periódica não trivial de (2.13), com período L ou $2L$.*

- (i) *Se $\lambda = \lambda_0$, então $y(x, \lambda)$ não possui zeros no intervalo semiaberto $0 \leq x < L$.*
- (ii) *Se $\lambda = \mu_{2n+1}$ ou $\lambda = \mu_{2n}$, então y tem exatamente $2n + 1$ zeros no intervalo semiaberto $0 \leq x < 2L$.*
- (iii) *Se $\lambda = \lambda_{2n-1}$ ou $\lambda = \lambda_{2n}$, então y tem exatamente $2n$ zeros no intervalo semiaberto $0 \leq x < L$.*

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

No trabalho (MAGNUS; WINKLER, 1966), há ainda outros resultados significativos. Em especial, que permitem o conhecimento sobre o autovalor λ_0 associado ao operador \mathcal{L} e suas respectivas autofunções. Nesse sentido, enunciemos esses resultados a seguir.

Teorema 2.16. Se $p(x) > 0$ for uma solução periódica de período L da equação (2.13), então, $p(x)$ resulta uma autofunção do operador \mathcal{L} associada ao autovalor $\lambda_0 = 0$. Analogamente, se $p(x) < 0$ for uma solução periódica de período L da equação (2.13), então, $p(x)$ resulta uma autofunção de \mathcal{L} associada ao autovalor $\lambda_0 = 0$.

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

Agora, vamos a seguinte definição.

Definição 2.23. O operador \mathcal{L} associado a equação (2.13) pode ser definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L]) \\ y &\mapsto \mathcal{L}y = -y'' + Q(x)y. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Teorema 2.17. Seja o operador \mathcal{L} definido em (2.17), onde o potencial $Q(x)$ é uma função par. Se $p(x)$ for uma autofunção associada ao autovalor λ_0 , então, a extensão L -periódica de $p(x)$ sobre \mathbb{R} , a menos de translação, é uma função par que não se anula.

Demonstração. Ver (MAGNUS; WINKLER, 1966). ■

2.5.2 Famílias isonerciais de operadores autoadjuntos

Nessa subseção vamos apresentar importantes resultado que serão diretamente empregados ao estudo do espectro do operador associado a equação de Schrödinger não linear.

Definição 2.24. Seja $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L])$, com $L > 0$ fixado, um operador autoadjunto. Definamos o índice de inércia do operador \mathcal{L} como sendo o par (n, z) , onde n é a dimensão do autoespaço negativo de \mathcal{L} (ou seja, a dimensão do espaço gerado pelas autofunções associadas aos autovalores estritamente negativos de \mathcal{L}) e z é a dimensão do autoespaço nulo de \mathcal{L} (isto é, a dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 de \mathcal{L}). O índice de inércia de \mathcal{L} é denotado por $\text{In}(\mathcal{L})$.

Note que, como o operador de Hill \mathcal{L} definido em (2.17) é autoadjunto, então vale o Teorema da Oscilação 2.14, o qual garante que o índice de inércia $\text{In}(\mathcal{L})$ está bem definido. Pois, para cada $\gamma > 0$ existe uma quantidade finita de autovalores estritamente menores que γ . Conseqüentemente, esses autovalores estão associados a autofunções que, por serem linearmente independentes, formam um autoespaço de dimensão finita.

Definição 2.25. Seja $m \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Definamos a família de operadores de Hill

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m : D(\mathcal{L}_m) = H_{per}^2([0, L]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L]) \\ y &\rightarrow \mathcal{L}_m[y] = -y'' + Q_1(m, x)y, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $Q_1 : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função de classe C^2 , além de ser L -periódica na variável x . Veja que, para cada $m \in \mathcal{V}$, o operador \mathcal{L}_m é um operador autoadjunto, analogamente à (2.17).

Dizemos que a família de operadores $\{\mathcal{L}_m\}_{m \in \mathcal{V}}$ é isonercial se o índice de inércia de \mathcal{L}_m , $\text{In}(\mathcal{L}_m)$, não depender de $m \in \mathcal{V}$.

No trabalho (NATALI; NEVES, 2013b) os autores, mostraram a validade do seguinte resultado.

Teorema 2.18. *Seja $m \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Consideremos o operador \mathcal{L}_m definido em (2.18). Se $\lambda = 0$ for um autovalor de \mathcal{L}_m , para cada $m \in \mathcal{V}$, então, a família de operadores $\{\mathcal{L}_m\}_{m \in \mathcal{V}}$ é isonercial.*

Demonstração. Ver (NATALI; NEVES, 2013b). ■

2.5.3 A nova teoria Floquet

Natali e Neves, em (NATALI; NEVES, 2013b), apresentaram uma nova forma para a Teoria Floquet. Em verdade, os resultados obtidos nesse trabalho permitem a análise espectral de um operador de Hill da forma (2.17) através da determinação do sinal de uma constante específica.

Ademais, os resultados obtidos em (NATALI; NEVES, 2013b) ainda foram aprimorados por Natali e Pastor em (NATALI; PASTOR, 2014). Nesse último trabalho, os autores mostraram a possibilidade de construção de uma família de operadores, com a mesma forma que o operador \mathcal{L} definido em (2.17), e ainda com os mesmos índices de inércia. Consequentemente, todos os operadores da família possuem as mesmas características espectrais.

Tendo isso em vista, vamos exibir alguns dos pontos relevantes para nosso trabalho. De início, vamos definir a equação de Euler-Lagrange e as condições necessárias para o emprego dos resultados mostrados em (NATALI; NEVES, 2013b) e (NATALI; PASTOR, 2014).

Definição 2.26. *Consideremos a equação de Euler-Lagrange*

$$-y'' + Q(\mu, y) = 0. \quad (2.19)$$

Assumamos que $\mu \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Consideremos, também, que a função $Q \equiv Q(\mu, y)$ é de classe C^∞ em ambas as variáveis. Sob essas condições, a equação (2.19) é conservativa. Ou seja, suas soluções periódicas estão contidas em curvas de nível

de energia do tipo

$$\mathcal{H}(y, \xi) = -\frac{\xi^2}{2} + Q(\mu, y), \quad (2.20)$$

onde $y' = \xi$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = q$ e $Q(\mu, 0) = 0$.

Adicionalmente, suponhamos que a função q satisfaça as seguintes condições

- (i) Para cada $\mu \in \mathcal{V}$, a função $Q(\mu, \cdot)$ admite duas raízes consecutivas $r_1 = r_1(\mu)$ e $r_2 = r_2(\mu)$ que correspondem aos pontos de equilíbrio $(y, y') = (r_1, 0)$ e $(y, y') = (r_2, 0)$. Assumamos que $(y, y') = (r_1, 0)$ seja um ponto de sela e que $(y, y') = (r_2, 0)$ seja um ponto de centro.
- (ii) A curva de nível $\mathcal{H}(y, \xi) = \mathcal{H}(r_1, 0)$ contém uma curva simples fechada C^∞ , denotada por Γ , de modo que o par $(r_2, 0)$ encontra-se no interior da região delimitada por Γ .
- (iii) Para $\mu \in \mathcal{V}$ e para (y, ξ) no interior da região delimitada pela curva Γ , a função $Q(\mu, y)$ é de classe C^2 e $Q'(\mu, r_2) < 0$, onde Q' denota a derivada à Fréchet da função q com respeito ao parâmetro y .

Se as condições (i), (ii) e (iii) são satisfeitas, então, a dupla $(r_2, 0)$ é um ponto de máximo local de \mathcal{H} . Além disso, todas as órbitas de soluções y da equação de Euler-Lagrange (2.19) que, no plano de fase, estão no interior da região delimitada pela curva γ são periódicas. E também, estão em torno do par $(r_2, 0)$ e pertencem a uma curva de nível $\mathcal{H}(y, \xi) = B$, de tal modo que $\mathcal{H}(r_1, 0) < B < \mathcal{H}(r_2, 0)$.

Ainda sobre a equação (2.19), considere $\mu \in \mathcal{V}$ um número fixado. Então, pela teoria das EDO's, existe uma solução $y = y_\mu$ periódica para a equação (2.19) com a condição inicial $(y(0), y'(0)) = (\alpha_1, \alpha_2)$, onde $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (r_2, 0)$, é considerado no interior da região delimitada pela curva Γ . Além disso, o período L da solução y deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$L > \beta_\mu := \frac{2\pi}{\sqrt{-Q'(\mu, r_2)}}.$$

Tendo em vista a simetria do problema associado equação (2.19), se tivermos $\alpha_1 > r_2 > r_1$ e $\alpha_2 = 0$, a solução y é uma função suave e par que satisfaz $\max_{x \in \mathbb{R}} y(x) = y(0)$.

No trabalho, (NATALI; PASTOR, 2014), os autores provaram o seguinte resultado associado a equação (2.19).

Teorema 2.19. *Seja $\mu_0 \in \mathcal{V}$ fixado. Consideremos que y_{μ_0} seja uma função periódica de período $L = L_{\mu_0} > \beta_{\mu_0}$, a solução da equação de Euler-Lagrange (2.19) no caso em que $\mu = \mu_0$, sujeita à condição inicial $(y_{\mu_0}(0), y'_{\mu_0}(0)) = (\alpha_1, 0)$, onde $(\alpha_1, 0) \neq (r_2(\mu_0), 0)$ e o*

par $(\alpha_1, 0)$ está contido no interior da região delimitada pela curva Γ , com $\alpha_1 > r_2 > r_1$. Para cada $\mu \in \mathcal{V}$, existem $L_\mu \in (\beta_{\mu_0}, +\infty)$ e y_μ , uma função periódica par de período L_μ , de tal forma que y_μ satisfaz a equação de Euler-Lagrange (2.19). Mais que isto, as funções y_μ e L_μ são continuamente diferenciáveis com respeito à variação do parâmetro μ e a aplicação $\mu \in \mathcal{V} \mapsto L_\mu \in (\beta_{\mu_0}, +\infty)$ é sobrejetora.

Demonstração. Ver (NATALI; PASTOR, 2014). ■

O Teorema (2.19) estabelece a existência de uma família de soluções periódicas $\{y_\mu\}$, cada uma com período correspondente L_μ e associadas a equação de Euler-Lagrange (2.19). De fato, esse teorema permite a construção de uma família de operadores \mathcal{L}_μ a partir da equação de Euler-Lagrange.

Com isso, vamos enunciar alguns resultados para a análise espectral dos operadores dessa família. Em particular, os resultados mostrarão sob quais condições esses operadores são isonerciais.

Definição 2.27. *Seja $\{y_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$ uma família de funções estabelecida em vista do Teorema (2.19). Notemos que y_μ é uma função suave e periódica de período L_μ , que soluciona a equação (2.19), para cada $\mu \in \mathcal{V}$. Seja $\mu \in \mathcal{V}$ fixado, porém, arbitrário. Definamos o operador de Hill*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_{\mu, y_\mu} : H_{per}^2([0, L_\mu]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L_\mu]) \\ y &\rightarrow \mathcal{L}_\mu[y] = -y'' + Q'(\mu, y_\mu)y. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O operador definido em (2.21) é autoadjunto e seu espectro coincide com o conjunto de seus autovalores. Portanto, segue, de forma análoga ao obtido para o operador (2.17), que o Teorema da Oscilação (2.14) é válido para \mathcal{L}_μ . Consequentemente, temos que os autovalores de \mathcal{L}_μ formam uma sequência ilimitada de números reais $\{\lambda_\kappa(\mu)\}_{\kappa=0}^\infty$, de modo que

$$\lambda_0(\mu) < \lambda_1(\mu) \leq \lambda_2(\mu) < \dots < \lambda_{2\kappa-1}(\mu) \leq \lambda_{2\kappa}(\mu) < \dots, \quad (2.22)$$

em que, as igualdades que aparecem em (2.22) denotam que o respectivo autovalor é duplo.

Conforme (NATALI; PASTOR, 2014), temos também o seguinte resultado:

Teorema 2.20. *Seja $L_{\mu_1} \in (\beta_{\mu_0}, +\infty)$ fixado. Consideremos que $\mu_1 \in \mathcal{V}$ e que y_{μ_1} seja uma solução suave, par e periódica da equação*

$$-y_{\mu_1}'' + Q(\mu_1, y_{\mu_1}) = 0. \quad (2.23)$$

Seja $\mathcal{L}_{\mu_1} := -\partial_x^2 + Q'(\mu_1, y_{\mu_1})$ o operador linearizado em torno da função y_{μ_1} , definido sobre o espaço de Hilbert $L_{per}^2([0, L_{\mu_1}])$. Se $\ker(\mathcal{L}_{\mu_1}) = \text{span}\{y_{\mu_1}'\}$, então, existe $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$,

um intervalo aberto que contém μ_1 e existe uma família de funções $\{\phi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{I}}$, tal que ϕ_μ é solução da equação (2.19), para todo $\mu \in \mathcal{I}$. Além disso, ϕ_μ é uma função par, periódica de período L_{μ_1} , $\phi_{\mu_1} = y_{\mu_1}$ e a aplicação $\mu \in \mathcal{I} \mapsto \phi_\mu \in H_{per}^2([0, L_{\mu_1}])$ é suave.

Demonstração. Ver (NATALI; PASTOR, 2014). ■

O Teorema 2.20 estabelece a existência de soluções periódicas para a equação (2.19) a partir do operador linearizado \mathcal{L}_{μ_1} . Agora, vamos enunciar o teorema que garante que a família dos operadores $\{\mathcal{L}_{\mu_i}\}$ seja isonercial.

Teorema 2.21. *Seja $\mu \in \mathcal{I} \mapsto \phi_\mu \in H_{per}^2([0, L_{\mu_1}])$ a família de funções L_{μ_1} -periódicas determinada pelo Teorema 2.20. Então, a família de operadores*

$$\mathcal{L}_{\mu, \phi_\mu} := -\partial_x^2 + Q'(\mu, \phi_\mu), \mu \in \mathcal{I}, \quad (2.24)$$

é isonercial.

Demonstração. Ver (NATALI; PASTOR, 2014). ■

Agora, com base nos trabalhos apresentados em (NATALI; NEVES, 2013b), (NATALI; PASTOR, 2014) e em suas referências, vamos estabelecer uma forma para a análise espectral do operador \mathcal{L}_μ .

Para tanto, definamos $p(x) := \phi'_{\mu_2}(x)$. Seja a função \bar{y} , a única solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\bar{y}'' + Q'(\mu_2, \phi_{\mu_2}) \bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\phi''_{\mu_2}(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Então, existe uma constante θ de tal modo que

$$\bar{y}(x + L_{\mu_1}) = \bar{y}(x) + \theta p(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Conseqüentemente,

$$\bar{y}'(L_{\mu_1}) = \bar{y}'(0) + \theta p'(0) \implies \theta = \frac{\bar{y}'(L_{\mu_1})}{\phi''_{\mu_2}(0)}. \quad (2.27)$$

A determinação da constante θ é essencial para a análise espectral. De fato, fica claro sua importância através dos resultados provados em (NATALI; NEVES, 2013b) e (NATALI; PASTOR, 2014), o qual enunciamos a seguir.

Teorema 2.22. *Seja θ a constante dada em (2.27). O número 0 é um autovalor simples do operador $\mathcal{L}_{\mu_2, \phi_{\mu_2}}$, se e somente se, $\theta \neq 0$. Supondo $\theta \neq 0$, tem-se que $\lambda_1(\mu_2) = 0$ se $\theta < 0$ e, $\lambda_2(\mu_2) = 0$ se $\theta > 0$.*

Demonstração. Ver (NATALI; PASTOR, 2014). ■

Então, de posse dos Teorema 2.20, 2.21 e 2.22, é possível enunciar o seguinte corolário

Corolário 2.2. *Seja y_{μ_1} , determinada pelo Teorema 2.19, a solução L_{μ_1} -periódica da equação (2.23), associada ao parâmetro $\mu_1 \in \mathcal{V}$. Se $\theta \neq 0$, onde θ é a constante dada em (2.27) em termos de y_{μ_1} , então, $\ker(\mathcal{L}_{\mu_1}) = \text{span}\{y'_{\mu_1}\}$ e o Teorema (2.19) é válido para este parâmetro.*

Demonstração. Ver (NATALI; PASTOR, 2014). ■

Definição 2.28. *Seja $\{y_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$, a família de funções suaves L_μ -periódicas, determinada pelo Teorema 2.19. Seja $\mu_1 \in \mathcal{V}$, um valor fixado. A família de operadores $\{\mathcal{L}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$, estabelecida em (2.21), é dita ser isonercial com respeito ao período $L_\mu > 0$ se*

$$\text{In}(\mathcal{L}_\mu) = \text{In}(\mathcal{L}_{\mu_1}), \forall \mu \in \mathcal{V}. \quad (2.28)$$

Por fim, os autores em (NATALI; PASTOR, 2014), ainda estabelecem o seguinte resultado.

Teorema 2.23. *Seja $\{y_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$ a família de funções estabelecida no Teorema 2.9. Então, a família de operadores $\{\mathcal{L}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$, determinada em (2.21), é isonercial com respeito ao período L_μ .*

Demonstração. Ver (NATALI; PASTOR, 2014). ■

2.6 O OPERADOR PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

Nessa seção pretendemos garantir, desde já, alguns resultados para o operador associado a equação de Schrödinger não linear que estudaremos no próximo capítulo. Especificamente, vamos mostrar que podemos empregar a Teoria Floquet ao operador associado a nossa EDO e garantiremos que as hipóteses para o uso dos Teoremas 2.13-2.17

A determinação de soluções do tipo onda viajante periódica para a equação de Schrödinger não linear translada o problema de analisarmos a EDP (1.4) para a seguinte

EDO

$$-y'' + \omega y - |g|y^3 = 0.$$

com $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$ onde L é o período da solução y . Por construção, as soluções funções $y(x)$ são L -periódicas, daí segue que a função $Q(x) \equiv (\omega - |g|y^2)$ também o é. Com isso, e tendo como base a equação (2.13), podemos definir o seguinte operador de Hill

Proposição 2.8. *O operador \mathcal{L} definido em (2.17) é autoadjunto.*

Demonstração. Escrevamos o operador \mathcal{L} como $\mathcal{L} = S + A$ onde $S \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1$ e $A \equiv Q - 1$. Agora, veja que os domínios desses operadores são tais que $D(S) = D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L])$ e $D(A) = L_{per}^2(0, L)$. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram (2.6) temos que o operador $S : D(S) \rightarrow \mathcal{L}_{per}^2$ é sobrejetor, além disso, S é simétrico conforme (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019). Portanto, segue que o operador S é autoadjunto.

Por outro lado, em relação ao operador A temos que esse é um operador simétrico, pois Q é uma função real. Além disso, segue, também, que A é limitado em virtude do comportamento periódico da função Q . Portanto, o operador \mathcal{L} é a soma de dois operadores autoadjuntos, conseqüentemente, esse também é autoadjunto. ■

Além disso, dado que \mathcal{L} é autoadjunto, segue do Teorema (2.8) que o espectro do operador \mathcal{L} é composto apenas por números reais.

Proposição 2.9. *O espectro essencial do operador \mathcal{L} é vazio, isto é, $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$.*

Demonstração. De fato, o espectro essencial do operador S é vazio, esse resultado é conhecido da literatura (CAVALCANTI; CAVALCANTI; KOMORNIK, 2019). Resta provarmos que $\sigma_{ess}(A)$ é vazio. Com efeito, definamos o operador $T \equiv \mathcal{L} - S : H_{per}^2([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L])$. De imediato, temos que $T(u) = Qu - u$, para todo $u \in H_{per}^s([0, L])$. Então, da limitação de Q e usando a imersão compacta $H_{per}^2([0, L]) \xrightarrow{c} L_{per}^2([0, L])$ verifica-se que T é um operador compacto. Portanto, segue da teoria desenvolvida em (PAVA, 2009) que o $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$. ■

Além disso, segue da teoria proposta em (PAVA, 2009) que para o operador \mathcal{L} definido em (2.15) é válido o Teorema da Oscilação (2.14). Assim, o Teorema (2.17) aplica-se ao operador \mathcal{L} para a equação de Schrödinger não linear.

3 BOA COLOCAÇÃO E SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

Nesse capítulo, estudaremos soluções do tipo onda viajante periódica para a equação de Schrödinger não linear, que são associadas a estados fundamentais de condensados de Bose-Einstein (BRONSKI et al., 2001).

Em particular, estabeleceremos a boa colocação global para o problema de Cauchy e, de posse desse resultado, mostraremos a existência de soluções do tipo ondas dnoidais. Posteriormente, faremos a análise espectral do operador associado a EDO obtida para essas soluções e empregaremos esses resultados para garantir a estabilidade das ondas dnoidais com relação a perturbações das condições iniciais. Por fim, discutiremos ao longo do texto as interpretações físicas desses resultados para sistemas condensados.

3.1 BOA COLOCAÇÃO LOCAL E GLOBAL

Seja a equação (1.4), com $g < 0$. De posse disso, considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = g|u|^2u, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) = \phi(x) \in H_{per}^1([0, L]), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nessa seção, estaremos interessados em mostrar a boa colocação do problema (3.1). Para isso, introduziremos a noção de boa colocação local e global a seguir.

Definição 3.1. *Sejam X, Y espaços de Banach, $T_0 \in (0, \infty)$ e seja $F : [0, T_0] \times Y \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X, \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \quad (3.2)$$

é localmente bem posto em Y se:

- (i) *Existe $T \in (0, T_0]$ e uma função $u \in C([0, T], Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0,$$

aqui a derivada em $t = 0$ e $t = T$ são calculadas pela direita e pela esquerda respectivamente.

- (ii) O problema de Cauchy (3.2) possui no máximo uma solução em $C([0, T]; Y)$.
- (iii) A aplicação $\phi \rightarrow u$ é contínua. Mais precisamente, sejam $\phi_n \in Y, n = 1, 2, \dots, \infty$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$ na topologia de Y , e sejam $u_n \in C([0, T_n]; Y)$ as soluções correspondentes. Seja $T \in (0, T_\infty)$. Então, as soluções u_n estão definidas em $[0, T]$ para todo n suficientemente grande e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Se quaisquer uma dessas condições não forem satisfeitas diremos que o problema (3.2) é mal colocado.

Com isso posto, vamos nos ater ao problema (3.1). De fato, esse problema já foi estudado para um caso mais geral da função $G(u)$, que pode ser encontrado em (IORIO et al., 2001). No entanto, dado o caráter elementar desse texto faremos a demonstração do caso particular apresentado em (3.1).

Reescrevamos o problema de Cauchy (3.1) como

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = G(u) \\ u(x, 0) = \phi(x) \in H_{per}^s([0, L]) \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $s > \frac{1}{2}$, L é o período da função $\phi \equiv \phi(x)$ e $G(u) \equiv g|u|^2u$. Em particular, seguindo as ideias de (IORIO et al., 2001), vamos mostrar a boa colocação do problema (3.3) para $s > \frac{1}{2}$. Posteriormente, estabeleceremos a boa colocação num sentido mais amplo para $s = 1$.

Tendo isso em vista, mostraremos que todas as condições da Definição 3.1 são satisfeitas e, portanto, (3.3) é localmente bem posto. Para isso, prosseguiremos com os seguintes lemas.

Lema 3.1. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $u \in H_{per}^s([0, L])$. Então a função $G(u)$ definida por $G(u) = g|u|^2u$ satisfaz as condições*

(i) $G : H_{per}^s([0, L]) \rightarrow H_{per}^s([0, L])$ e $G(0) = 0$.

(ii) G é localmente Lipschitz, isto é

$$\|G(z) - G(w)\|_s \leq L (\|z\|_s, \|w\|_s) \|z - w\|_s, \quad \forall z, w \in H_{per}^s([0, L])$$

onde $L(\cdot, \cdot)$ é uma função contínua e não decrescente com respeito a cada um de seus argumentos. Em particular

$$\|G(z)\|_s \leq \|z\|_s L(\|z\|_s, 0), \quad \forall z \in H_{per}^s([0, L])$$

Demonstração. Provaremos (i). Evidentemente, $G(0) = 0$. Agora, nos ateremos a provar que $G : H_{per}^s([0, L]) \rightarrow H_{per}^s([0, L])$. Com efeito, $H_{per}^s([0, L])$ para $s > \frac{1}{2}$ é uma álgebra de Banach, então deduzimos

$$\| |u|^2 \cdot u \|_s = \| u^2 \cdot \bar{u} \|_s \leq \| u \|_s^2 \| \bar{u} \|_s = \| u \|_s^3.$$

Assim, $G(u)$ fica bem definida de $H_{per}^s([0, L])$ em $H_{per}^s([0, L])$ e, portanto, $G(u)$ satisfaz a condição (i).

Agora, vamos mostrar que $G(u)$ satisfaz a condição (ii). Para isso, tomemos $p, q \in \mathbb{C}$, veja que esses números satisfazem a seguinte igualdade

$$|p|^2 p - |q|^2 q = |p|^2(p - q) + pq\overline{(p - q)} + |q|^2(p - q).$$

Então, usando o resultado acima para $u, v \in H_{per}^s([0, L])$ temos

$$\begin{aligned} \|G(u) - G(v)\|_s &= \|g|u|^2|u| - g|v|^2|v|\|_s \\ &= \|g(|u|^2u - |v|^2v)\|_s \\ &= |g| \left(\| |v|^2(v - u) + v\overline{v - u} + |u|^2(v - u) \|_s \right) \\ &\leq |g| \|v - u\|_s \cdot (\|v\|_s^2 + \|v\|_s + \|u\|_s^2) \\ &\leq \|v - u\|_s \cdot L(\|u\|_s, \|v\|_s) \end{aligned}$$

em que L é uma função definida por

$$L : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.4}$$

$$(x, y) \rightarrow L(x, y) = |g|(x^2 + xy + y^2). \tag{3.5}$$

Evidentemente, L é uma função contínua por ser soma de funções polinomiais, as quais são contínuas. Por outro lado, tendo em vista o domínio de L , fica garantido que L é uma função não decrescente tanto em relação ao argumento x quanto a y . Com isso, mostrando a primeira parte do condição (ii). Ademais, tomando $v = 0$ teremos

$$\|G(u) - G(0)\|_s = \|G(u)\|_s \leq \|0 - u\|_s \cdot L(\|u\|_s, 0) = \|u\|_s L(\|u\|_s, 0)$$

que mostra segunda desigualdade. Portanto, $G(u)$ satisfaz a condição (ii) por completo e o lema fica demonstrado. ■

Agora que provamos o resultado do Lema [3.1](#), vamos nos focar em estabelecer os resultados de existência e unicidade para o problema de Cauchy [\(3.3\)](#). Para tanto, evocamos o princípio de Duhamel permite reescrevermos o problema de Cauchy dado em [\(3.3\)](#), para a seguinte equação integral

$$u(t) = U_0(t)\phi - i \int_0^t U_0(t - y)G(u(y))dy \tag{3.6}$$

onde o termo U_0 é associado ao grupo de operadores unitários $U_0(t) : H_{per}^s([0, L]) \rightarrow H_{per}^s([0, L]), \forall s \in \mathbb{R}$, onde

$$U_0(t) = e^{it\Delta}$$

com Δ sendo o operador laplaciano é o grupo unitário associado a equação de Schrödinger linear.

O seguinte lema estabelece uma relação entre as soluções do problema de Cauchy (3.3) e da equação integral (3.6).

Lema 3.2. *Seja $u \in C([0, T]; H_{per}^s([0, L]))$ uma solução do problema (3.3). Então u satisfaz (3.6). Reciprocamente, se $u \in C([0, T]; H_{per}^s([0, L]))$ é uma solução de (3.6), então $u \in C^1([0, T]; H_{per}^{s-2}([0, L]))$ e satisfaz (3.3), com a derivada com respeito de t calculada no seguinte sentido:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i \left(\partial_x^2 u(t) - G(u(t)) \right) \right\|_{s-2} = 0. \quad (3.7)$$

Demonstração. Ver (IORIO et al., 2001). ■

Nesse sentido, podemos estudar as propriedades das soluções $u(t)$. Com efeito, a unicidade de soluções para o problema (3.6) é determinada pelo seguinte lema.

Lema 3.3. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, tal que $s > \frac{1}{2}$, duas funções $\phi, \psi \in H_{per}^s$ e $u, v \in C([0, T]; H_{per}^s([0, L]))$ duas soluções da equação integral (3.6), que satisfazem $u(0) = u_0 = \phi$ e $v(0) = v_0 = \psi$. Então*

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi - \psi\|_s e^{L(M_s, M_s)t}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.8)$$

onde M_s , é dado por

$$M_s = M_s(u, v) = \max \left\{ \sup_{[0, T]} \|u(t)\|_s, \sup_{[0, T]} \|v(t)\|_s \right\}, \quad (3.9)$$

e L é a função definida em (3.5). Em particular, (3.6) possui no máximo uma solução.

Demonstração. Como u e v são soluções de (3.6), então temos:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(-g|u|_s^2)(y)dy \\ v(t) &= U_0\psi - i \int_0^t U_0(t-y)(-g|v|_s^2)(y)dy. \end{aligned}$$

Com isso, escrevamos a diferença entre as duas soluções

$$u(t) - v(t) = \left(U_0\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(gu|u|^2)(y)dy \right) - \left(U_0\psi - i \int_0^t U_0(t-y)(gv|v|^2)(y)dy \right),$$

agora, usando o fato de que U_0 é um operador unitário temos

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_s &= \left\| \left(U_0\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(gu|u|^2)(y)dy \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(U_0\psi - i \int_0^t U_0(t-y)(gv|v|^2)(y)dy \right) \right\|_s \\
&\leq \|U_0(\phi - \psi)\|_s + \left\| \int_0^t U_0(t-y)(gu|u|^2 - gv|v|^2)(y)dy \right\|_s \\
&\leq \|U_0(\phi - \psi)\|_s + \int_0^t \|U_0(t-y)\|_s \|gu|u|^2 - gv|v|^2(y)\|_s dy \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t \|(-gu|u|^2 - gv|v|^2)(y)\|_s dy \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t \|G(u) - G(v)\|_s dy \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t L(\|u\|_s, \|v\|_s) \|(u-v)(y)\|_s dy.
\end{aligned}$$

Como a função L é não decrescente, conforme Lema [3.1](#), então segue que $L(\|u\|_s, \|v\|_s) \leq L(M_s, M_s)$ onde M_s é o o máximo entre os supremos de $u(t)$ e $v(t)$ em $[0, T]$. Resultando em

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t L(M_s, M_s) \|(u-v)(y)\|_s dy.$$

Agora, vamos usar o Lema de Grownwall para obtermos o desejado. Com efeito, aplicando [\(2.3\)](#) com $\delta(x) = \|u(t) - v(t)\|_s$, $\alpha(x) = \|\phi - \psi\|_s$ e $\beta = L(M_s, M_s)$ temos o seguinte

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t L(M_s, M_s) \|\phi - \psi\|_s e^{\int_y^t L(M_s, M_s) du} dy,$$

mas veja que $\|\phi - \psi\|_s$ é constante e com isso podemos ainda desenvolver a desigualdade acima. Com efeito, note que

$$L(M_s, M_s) e^{\int_y^t L(M_s, M_s) du} = -\frac{d}{dy} e^{\int_y^t L(M_s, M_s) du}$$

com isso, podemos ter o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_s &\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t L(M_s, M_s) \|\phi - \psi\|_s e^{\int_y^t L(M_s, M_s) du} dy \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s \left(1 + \int_0^t L(M_s, M_s) e^{\int_y^t L(M_s, M_s) dy} dy \right) \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s \left(1 - \int_0^t \frac{d}{dy} \left(e^{L(M_s, M_s)(t-y)} \right) dy \right) \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s \left(1 - e^{L(M_s, M_s)(t-t)} + e^{L(M_s, M_s)t} \right) \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s e^{L(M_s, M_s)t}
\end{aligned}$$

e assim, obtemos a desigualdade desejada e o lema fica provado. ■

O resultado de existência e unicidade do problema de Cauchy (3.1) é garantido pelo seguinte lema.

Teorema 3.1. *Sejam $\phi \in H_{per}^s([0, L])$, $s > \frac{1}{2}$. Então, existem um $T > 0$ e uma única solução $u \in C([0, T]; H_{per}^s([0, L]))$ satisfazendo (3.1) com a derivada calculada conforme (3.7).*

Demonstração. Vamos exibir um espaço métrico completo que é associado as soluções do problema de Cauchy (3.1). Posteriormente, vamos mostrar uma contração nesse conjunto e determinaremos, por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach garantiremos a existência e unicidade das soluções que satisfazem o problema de Cauchy (3.1).

Seja $\eta > 0$ um número fixado. O conjunto

$$X \equiv X(T, \eta, \phi) = \left\{ v \in C([0, T]; H_{per}^s([0, L])) \mid \|v(t) - U_0(t)\phi\| \leq \eta, \forall t \in [0, T] \right\} \quad (3.10)$$

munido com a seguinte métrica

$$d(u, v) = \sup_{[0, T]} \|u(t) - v(t)\|_s \quad (3.11)$$

é um espaço métrico completo. Notemos que $X(T, \eta, \phi) \neq \emptyset$ pois $v(t) = U_0(t)\phi \in C(\mathbb{R}; H_{per}^s([0, L]))$.

Agora, consideramos a aplicação $J : C([0, T]; H^s) \rightarrow C([0, T]; H^s)$, definida por

$$(Jv)(t) = U_0(t)\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(g|v|^2v)(y)dy.$$

De fato, a imagem da aplicação J está em $C([0, T]; H_{per}^s([0, L]))$, pois a aplicação é definida conforme o princípio de Duhamel (3.3). Tendo isso em vista, mostraremos que existe $T > 0$, tal que $J : X(T, \eta, \phi) \rightarrow X(T, \eta, \phi)$ é uma contração em X .

Com efeito, da unitariedade de $U_0(t)$ em $H_{per}^s([0, L])$ e da propriedade (ii), do Lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} \|(Jv)(t) - U_0(t)\phi\|_s &= \left\| U_0(t)\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(g|v|^2v)(y)dy - U_0(t)\phi \right\|_s \\ &= \left\| \int_0^t U_0(t-y)(g|v|^2v)(y)dy \right\|_s \\ &\leq \int_0^t \|U_0(t-y)\|_s \|(g|v|^2v)(y)\|_s dy \\ &\leq \int_0^t \|(g|v|^2v)(y)\|_s dy \\ &\leq \int_0^t L(\|v(y)\|_s, 0) \|v(y)\|_s dy \end{aligned}$$

e como $v \in X$, temos ainda que

$$\begin{aligned}
\|v\|_s &= \|v + U_0\phi - U_0\phi\|_s \\
&= \|(v - U_0\phi) + U_0\phi\|_s \\
&\leq \|v - U_0\phi\|_s + \|U_0\phi\|_s \\
&\leq \eta + \|\phi\|_s,
\end{aligned}$$

para todo $\eta \in [0, T]$. Assim, temos que $Jv \in X$ sempre que

$$0 < T \leq [L(\eta + \|\phi\|_s, 0)(\eta + \|\phi\|_s)]^{-1}\eta. \quad (3.12)$$

Por outro lado, tomemos $v, w \in X$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\|Jv - Jw\|_s &= \left\| U_0(t)\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(g|v|^2v)(y)dy \right. \\
&\quad \left. - \left(U_0(t)\phi - i \int_0^t U_0(t-y)(g|w|^2w)(y)dy \right) \right\|_s \\
&= \left\| \int_0^t U_0(t-y)(g|w|^2w)(y)dy - \int_0^t U_0(t-y)(g|v|^2v)(y)dy \right\|_s \\
&\leq \int_0^t \|U_0(t-y)\|_s \|(g|w|^2w)(y) - (g|v|^2v)(y)\|_s dy \\
&\leq \int_0^t |g| \cdot \left(\|(|w|^2w)(y)\|_s + \|(|v|^2v)(y)\|_s \right) dy \\
&\leq \int_0^t \|w - v\|_s \cdot L(\|v\|_s, \|w\|_s) dy \\
&\leq L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s) \int_0^t \|v - w\|_s dy.
\end{aligned}$$

Empregando a métrica do sup, temos

$$\begin{aligned}
\|Jv - Jw\|_s &\leq L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s) \int_0^t \|v - w\|_s dy \\
&\leq L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s) \sup_{[0, T]} \|v - w\|_s \int_0^T dy \\
&\leq L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s) \sup_{[0, T]} \|v - w\|_s T \\
&\leq L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s) T d(v, w)
\end{aligned} \quad (3.13)$$

e escolhendo T de modo que

$$0 < T < [L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s)(\eta + \|\phi\|_s)]^{-1}$$

teremos que (3.13) é uma contração em X . A partir disso, definamos o seguinte termo

$$T'(\eta, \|\phi\|_s) = \min\{[L(\eta + \|\phi\|_s, \eta + \|\phi\|_s)(\eta + \|\phi\|_s)]^{-1}, [L(\eta + \|\phi\|_s, 0)(\eta + \|\phi\|_s)]^{-1}\eta.\} \quad (3.14)$$

Com isso, podemos garantir que a aplicação J será uma contração em X sempre que T for escolhido do seguinte modo

$$0 < T < T'(\eta, \|\phi\|_s)$$

com T' dado em (3.14). Consequentemente, segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que existe uma única solução da equação integral (3.6). Além disso, segue do Lema (3.2) que essa única solução, que chamaremos de $u(t)$, é solução do problema de Cauchy (3.1). Portanto, o teorema está demonstrado. ■

Agora, estabeleceremos os resultados que garantem a dependência contínua da solução u do problema (3.1) com o dado inicial ϕ .

Teorema 3.2. *Sejam $\phi_n \in H_{per}^s([0, L])$, $n = 1, 2, \dots$, tais que $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$ em $H_{per}^s([0, L])$, $s > \frac{1}{2}$. Sejam $u_n \in C([0, T'_n]; H_{per}^s([0, L]))$, onde $T'_n = T'_n(\eta, \|\phi_n\|_s)$, as soluções obtidas no Teorema 3.1. Seja $T \in (0, T'_\infty)$. Então, as soluções u_n podem ser definidas no compacto $[0, T]$, para todo n suficientemente grande, e vale que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s = 0. \quad (3.15)$$

Demonstração. Veja que, como a função $T'(\eta, \|\phi\|_s)$ é contínua em relação ϕ , então existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $T'_n > T$, para todo $n \geq N$. Portanto, as soluções u_n estão definidas no compacto $[0, T]$, desde que $n \geq N$. Logo, segue que as $u_n \in X$ satisfazem

$$\|u_n(t)\|_s \leq \|\phi_n\|_s + \eta \leq K + \eta \quad (3.16)$$

onde $K = \sup_n \|\phi_n\|_s$. Então, do Lema 3.3 e da desigualdade (3.16) é possível deduzir que

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s e^{L(M_s(u_n, u_\infty), M_s(u_n, u_\infty))T} \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s e^{K_{s,n}T},$$

onde $K_{s,n}$ é tal que

$$K_{s,n} = L(M_s(u_n, u_\infty), M_s(u_n, u_\infty)) \leq L(K + \eta, K + \eta) = K' < \infty.$$

Por conseguinte, obtemos que

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s e^{K'T}, \quad (3.17)$$

para todo $t \in [0, T]$. E como $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$ em $H_{per}^s([0, L])$, segue que (3.15) é obtido de (3.17) tomando o supremo em $[0, T]$ e fazendo $n \rightarrow \infty$. ■

Teorema 3.3. *(Teoria local em $H_{per}^s([0, L])$) O problema de Cauchy (3.1) ou (3.3) é localmente bem posto no espaço $H_{per}^s([0, L])$, para $s > \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Basta ver os Lemas [3.1](#), [3.2](#), [3.3](#) e Teoremas [3.1](#) e [3.2](#). ■

Observação 3.1. O resultado do Teorema [3.3](#) vale para $s > \frac{1}{2}$. Em particular, para $s = 1$ temos exatamente o resultado para nosso problema de Cauchy [\(3.1\)](#). Tendo isso em vista, no que segue consideraremos sempre $u(t) \in H_{per}^1([0, L])$, salvo casos em que será necessário explicitarmos onde nossa solução está.

Buscaremos estender o resultado do Teorema [3.3](#). Para isso, se fará necessário o uso de quantidades conservadas associadas ao problema [\(3.1\)](#).

Teorema 3.4. (*Leis de conservação*). Considere o problema de Cauchy [\(3.1\)](#) com dado inicial $\phi \in H_{per}^2([0, L])$. Então, as quantidades associadas

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L |u'(t)|^2 - \frac{|g|}{2} |u(t)|^4 dx \quad (3.18)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L |u(t)|^2 dx \quad (3.19)$$

onde $u(t) \in H_{per}^2([0, L])$, são conservadas, isto é

$$\frac{d}{dt} E(u) = \frac{d}{dt} F(u) = 0.$$

Demonstração. Consideremos a NLSE

$$iu_t + u_{xx} + |g||u|^2 u = 0. \quad (3.20)$$

Como $u(x, t) \in \mathbb{C}$, podemos escrever $u(x, t) = p(x, t) + iq(x, t)$, com $p, q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aqui, seguiremos a teoria proposta em [\(OZAWA, 2005\)](#).

Primeiramente, mostraremos que a quantidade [\(3.18\)](#) é conservada. Para isso, basta tomar a parte real do produto interno de [\(3.20\)](#) com $-u_t$, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \left(\langle iu_t + u_{xx} + |g||u|^2 u, -u_t \rangle \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\langle iu_t, u_t \rangle \right) - \operatorname{Re} \left(\langle u_{xx}, u_t \rangle \right) - \operatorname{Re} \left(|g| \langle |u|^2 u, u_t \rangle \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left(\langle u_{xx}, u_t \rangle \right) - \operatorname{Re} \left(|g| \langle |u|^2 u, u_t \rangle \right). \end{aligned}$$

Desenvolvendo cada produto interno e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\langle u_{xx}, u_t \rangle \right) &= \operatorname{Re} \int_0^L u_{xx} \bar{u}_t dx = \operatorname{Re} \int_0^L (p_{xx} + iq_{xx})(p_t - iq_t) dx \\ &= \operatorname{Re} \int_0^L p_{xx} p_t + q_{xx} q_t + i(q_{xx} p_t - p_{xx} q_t) dx \\ &= \int_0^L p_{xx} p_t + q_{xx} q_t dx = (p_t p_x + q_x q_t) \Big|_0^L - \int_0^L p_x p_{tx} + q_x q_{tx} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dt} (p_x^2 + q_x^2) dx \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 \right) dx, \end{aligned}$$

onde, o termo $(p_t p_x + q_x q_t)$ é zero por conta da periodicidade das funções p e q na primeira componente. De fato, veja que como $p_x(L, t) = p_x(0, t)$ e $q(L, t) = q(0, t)$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
(p_t p_x + q_x q_t)|_0^L &= p_x(L, t)p_t(L, t) - p_x(0, t)p_t(0, t) + q_x(L, t)q_t(L, t) - q_x(0, t)q_t(0, t) \\
&= p_x(L, t)(p_t(L, t) - p_t(0, t)) + q_x(L, t)(q_t(L, t) - q_t(0, t)) \\
&= p_x(L, t)\frac{d}{dt}[p(L, t) - p(0, t)] + q_x(L, t)\frac{d}{dt}[q(L, t) - q(0, t)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\langle |u|^2 u, u_t \rangle) &= \operatorname{Re} \int_0^L |u|^2 u \cdot \bar{u}_t dx \\
&= \operatorname{Re} \int_0^L |u|^2 (p + iq)(p_t - iq_t) dx \\
&= \operatorname{Re} \int_0^L |u|^2 (pp_t + qq_t + i(qp_t - pq_t)) dx \\
&= \int_0^L |u|^2 (pp_t + qq_t) dx \\
&= \int_0^L |u|^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(|u|^2) dx \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{2} |u|^4 dx \right).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que

$$0 = -\operatorname{Re}(\langle u_{xx}, u_t \rangle) - \operatorname{Re}(|g||u|^2 \langle u, u_t \rangle) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 - \frac{|g|}{2} |u|^4 dx \right) = \frac{d}{dt} E(u),$$

que vale para todo $t \in [0, T]$. Portanto, a quantidade $E(u)$ é conservada.

Agora, mostraremos que $F(u)$ é conservada. Para isso, tomemos a parte real do produto interno de [\(3.20\)](#) com iu , i.e.

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re}(\langle iu_t + u_{xx} + |g||u|^2 u, iu \rangle) \\
&= \operatorname{Re}(\langle u_t, u \rangle) + \operatorname{Im}(\langle u_{xx}, u \rangle) - \operatorname{Im}(|g||u|^2 \langle u, u \rangle),
\end{aligned}$$

em que, para cada termo, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\langle u_t, u \rangle) &= \operatorname{Re} \int_0^L u_t \bar{u} dx \\
&= \operatorname{Re} \int_0^L (p_t + iq_t)(p - iq) dx \\
&= \int_0^L p_t p + q q_t dx \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L |u|^2 \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\langle u_{xx}, u \rangle) &= \operatorname{Im} \int_0^L u_{xx} \bar{u} dx \\
&= \operatorname{Im} \int_0^L (p_{xx} + iq_{xx})(p - iq) dx \\
&= \int_0^L -p_{xx}q + q_{xx}p dx \\
&= -p_x q|_0^L - q_x p|_0^L - \int_0^L -p_x q_x + q_x p_x dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que a função u é L -periódica, logo $u(0) = u(L)$ e a condição $u_x(0) = u_x(L) = 0$. Por fim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(|g||u^2| \langle u, u \rangle) &= |g| \operatorname{Im} \int_0^L |u|^2 |u|^2 dx \\
&= |g| \operatorname{Im} \int_0^L (p^2 + q^2)^2 dx = 0,
\end{aligned}$$

pois a parte imaginária do integrando é nula. Com isso, segue que

$$0 = \operatorname{Re}(\langle u_t, u \rangle) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L |u|^2 \right) = \frac{d}{dt} F(u),$$

que vale para todo $t \in [0, T]$. Portanto, a quantidade $F(u)$ dada em (3.19) é conservada.

■

Observação 3.2. Note que como E e F são constantes em relação a variável t podemos escrever, para o dado inicial em t_0 e para todo $t \in [0, T]$

$$E(u(t)) = E(\phi) \quad (3.21)$$

$$F(u(t)) = F(\phi) \quad (3.22)$$

onde $u(t)$ é a solução do problema do Teorema 3.2. Além disso, podemos ainda escrever E e F em termos das normas de $L_{per}^2([0, L])$ e $L_{per}^4([0, L])$ com efeito

$$\begin{aligned}
E(u) &= \frac{1}{2} \int_0^L |u(t)'|^2 - \frac{|g|}{2} |u(t)|^4 dx = \frac{1}{2} \int_0^L |u'(t)|^2 dx - \frac{|g|}{2} \int_0^L |u(t)|^4 dx \\
&= \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2 - \frac{|g|}{4} \|u(t)\|_{L^4}^4
\end{aligned} \quad (3.23)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L |u(t)|^2 dx = \frac{1}{2} \|u(t)\|^2. \quad (3.24)$$

Veja que, as quantidades conservadas E e F foram estabelecidas em $H_{per}^2([0, L])$ tendo em vista a forma da funcional $E(u(t))$. Entretanto, para nossos interesses é necessário que esses funcionais estejam definidos $H_{per}^1([0, L])$. Com esse intuito, vamos ao seguinte resultado.

Teorema 3.5. As igualdades (3.18) e (3.19) são válidas para $u(t) \in H_{per}^1([0, L])$ obtidas pelo Teorema 3.3.

Demonstração. Em suma, esse resultado decorre da densidade de $H_{per}^2([0, L])$ em $H_{per}^1([0, L])$. Para ambos os casos, mostraremos que uma sequência de soluções $u_n(t) \in H_{per}^2([0, L])$ tende a solução $u(t) \in H_{per}^1([0, L])$. Nesse sentido, consideremos, desde já, a solução $u(t) \in H_{per}^1$ com dado inicial $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$.

Com efeito, definamos, para uma notação mais limpa, $\phi \equiv u_0$. Agora, tomemos a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^2([0, L])$, tais que $\|\phi_n - \phi\|_1 \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. De posse do Teorema 3.2, com $s = 2$, temos que para todo $T > 0$ existe $u_n \in C([0, T]; H_{per}^2([0, L]))$ com $n = 1, 2, \dots$ solução da equação integral (3.6) e do problema de Cauchy (3.3) com dado inicial ϕ_n . Então, usando a imersão compacta de $H_{per}^1([0, L]) \xrightarrow{c} L_{per}^2([0, L])$ temos, para todo $t \in [0, T]$, que

$$\begin{aligned} \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u(t)\|_1 \\ &\leq \sup_{[0, T]} \|u_n(t) + (\phi_n - \phi) + (\phi - \phi) - u(t)\|_1 \\ &\leq \sup_{[0, T]} \|u(t) - \phi\|_1 + \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - \phi_n\|_1 + \sup_{[0, T]} \|\phi_n - \phi\|_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

daí, resta calcularmos o limite em que $n \rightarrow \infty$. Todavia, note que o resultado da dependência contínua em (3.3) aplicado para $s = 1$, garante que

$$\sup_{[0, T]} \|u(t) - \phi\|_1 \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

para todo $t \in [0, T]$. Se aplicado para $s = 2$ e usando a imersão de $H_{per}^1([0, L])$ em $L_{per}^2([0, L])$ temos

$$\sup_{[0, T]} \|u_n(t) - \phi_n\|_1 \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

para todo $t \in [0, T]$. Ademais, por hipótese, também temos para todo $t \in [0, T]$ que

$$\|\phi_n - \phi\|_1 \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Portanto, segue de (3.26), (3.27) e (3.28) que o limite de (3.25) é tal que

$$\sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u(t)\| \leq \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u(t)\|_1 \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

o que garante que as soluções de $u_n(t) \in H_{per}^2([0, L])$ convergem para a solução $u(t) \in H_{per}^1([0, L])$. Além disso, segue da imersão $H_{per}^1([0, L]) \xrightarrow{c} L_{per}^2([0, L])$ que a sequência $(u_n(t))$ converge em $L_{per}^4([0, L])$ e $(u'_n)(t)$ converge em $L_{per}^2([0, L])$, para todo $t \in [0, T]$.

Agora, podemos nos ater a cada uma das quantidades conservadas. Com efeito, veja que a quantidade E para uma função u_n fica dada por

$$E(u_n(t)) = \frac{1}{2} \left[\|(u'_n)(t)\|^2 - \frac{|g|}{2} \|u_n(t)\|_{L^4}^4 \right] = E(\phi_n). \quad (3.30)$$

Daí, fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando a convergência de u_n em $L^4_{per}([0, L])$ e u'_n em $L^2([0, L])$, para cada $t \in [0, T]$, obtemos

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \left[\|u'(t)\|^2 - \frac{|g|}{2} \|u(t)\|_{L^4}^4 \right] = E(\phi), \quad (3.31)$$

onde $u(t) \in H^1_{per}([0, L])$. Assim, provando o desejado para a quantidade E .

Agora, vamos mostrar o mesmo para a quantidade F . Em particular, como cada $u_n(t)$ resolve a equação integral de Dunhamel (3.6) temos da lei de conservação em F , para cada $n \in \mathbb{N}$, que a igualdade

$$\|u_n(t)\| = \|\phi_n\| \quad (3.32)$$

é satisfeita para todo $t \in [0, T]$. Portanto, usando a convergência de $u_n(t)$ em $L^2_{per}([0, L])$, podemos aplicar o limite de $n \rightarrow \infty$ na igualdade (3.32), de modo a obtermos que

$$\|u(t)\| = \|\phi\|$$

conforme desejado. ■

Definição 3.2. *Um problema de Cauchy é globalmente bem posto se a boa colocação ocorre no intervalo $[0, T]$, para todo $T > 0$.*

Teorema 3.6. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $\phi \in H^s_{per}([0, L])$. Então $T^*(\phi) = \infty$ ou $T^*(\phi) < \infty$ e*

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_s = \infty.$$

Demonstração. Ver (IORIO et al., 2001). ■

Agora, de posse das quantidades conservadas E e F definidas em $H^1_{per}([0, L])$ e do Teorema 3.6 podemos estender o resultado do Teorema 3.3 de forma global. Isto é, mostraremos que a solução $u(t)$ do problema de Cauchy (3.1) e do princípio de Dunhamel (3.6) pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo. Definamos, formalmente, a noção de boa colocação global.

Teorema 3.7. *(Boa colocação global). Seja $\phi \in H^1_{per}([0, L])$. Então a solução $u(t)$ obtida no Teorema 3.2 do problema de Cauchy (3.1) é globalmente definida em $H^1_{per}([0, L])$.*

Demonstração. Nosso objetivo, seguindo o Teorema 3.6 será mostrar que a norma

$$\|u(t)\|_1 \quad (3.33)$$

é limitada. No entanto, veja que para a solução $u(t)$, temos que a norma de $H^1_{per}([0, L])$ é tal que

$$\|u(t)\|_1 = \left(\|u'\|^2 + \|u\|^2 \right)^{1/2},$$

ou seja, mostrar que (3.33) é limitada, é equivalente a mostrar a limitação das normas $\|u\|^2$ e $\|u'\|^2$. Todavia, a limitação da primeira norma é imediata, de fato segue da quantidade conservada F que para todo $t \in [0, T]$ vale

$$F = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 < \infty, \quad (3.34)$$

uma vez que, $u(t) \in L^2_{per}[0, L]$.

Agora, devemos mostrar a limitação de $\|u'\|$. Para isso, usaremos a quantidade conservada $E(u)$, em particular, da igualdade (3.23) temos, para todo $t \in [0, T]$ que

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u'(t)\|^2 - \frac{|g|}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4 = E(u_0) \quad (3.35)$$

como nosso objetivo é mostrar a limitação de $\|u'\|$, é interessante escrevermos (3.35) como

$$\|u'(t)\|^2 = 2E(u) + \frac{|g|}{4}\|u(t)\|_{L^4}^4. \quad (3.36)$$

Agora, vamos empregar a desigualdade de Gangliardo-Nirenberg no termo $\|u(t)\|_{L^4}^4$. Para isso, note que se fizermos $j = 0, m = 1, \kappa = \frac{1}{4}, p = 4, r = q = 2$ e lembrando que $[0, L] \subset \mathbb{R}^1$ teremos que a igualdade (2.6) é satisfeita, de fato

$$\frac{1}{p} = \frac{0}{1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

tendo em vista que $u, u' \in L^2([0, L])$ segue que da desigualdade de Gangliardo-Nirenberg (2.7) que

$$\|u(t)\|_{L^4} \leq C\|u'(t)\|^{1/4}\|u(t)\|^{3/4}. \quad (3.37)$$

Daí, levando (3.37) em (3.36), obtemos

$$\begin{aligned} \|u'(t)\|^2 &= 2E(u(t)) + \frac{|g|}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4 \\ &\leq 2E(u) + \frac{|g|}{4}C^4\|u(t)\| \|u(t)\|^3. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Agora, definamos uma função auxiliar f por $f(t) \equiv \|u'\|^2$. Ademais, usando as leis de conservação, (3.21) e (3.22) e definindo a constante $c_0 \equiv \frac{|g|}{4}C^4\|u_0\|^3$ temos que $f(t)$ pode ser escrita como

$$f(t) \leq 2E(u_0) + c_0\sqrt{f(t)}. \quad (3.39)$$

Veja que se $\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{f(t)} \leq c_0$, teremos que

$$f(t) \leq 2E(u_0) + c_0\sqrt{f(t)} < 2E(u_0) + c_0^2 \quad (3.40)$$

definindo $M_1 = 2E(u_0) + c_0^2$, segue que $f(t) \leq M_1$, portanto $f(t)$ é limitada para todo $t \in [0, T]$ e o resultado fica demonstrado. Por outro lado, se $\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{f(t)} > c_0$, para todo $t \in [0, T]$, teremos que

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{f(t)} \cdot \left(\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{f(t)} - c_0 \right) \leq 2E(u_0) \implies \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{f(t)} \leq \frac{2E(u_0)}{\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{f(t)} - c_0}. \quad (3.41)$$

portanto, mesmo que $\sqrt{f(t)}$ seja muito maior que c_0 ainda teremos pela desigualdade (3.41) que $\sqrt{f(t)}$ é limitada. Consequentemente, pela desigualdade (3.40), segue que a função $f(t) = \|u'(t)\|^2$ também será limitada, para todo $t \in [0, T]$.

Então, o supremo de $f(t)$ para $t \in [0, T]$ é

$$\sup_{[0, T]} f(t) = \sup_{[0, T]} \|u'(t)\|^2 < \infty. \quad (3.42)$$

Em virtude dos resultados (3.34) e (3.42), segue que

$$\sup_{[0, T]} \|u(t)\|_1^2 = \sup_{[0, T]} \|u'(t)\|^2 + \sup_{[0, T]} \|u(t)\|^2, \quad (3.43)$$

para todo $t \in [0, T]$. Logo, $\|u(t)\|_1$ é limitada em $[0, T]$.

De posse da limitação da norma da solução $u(t)$ em $H_{per}^1([0, L])$, podemos estabelecer a boa colocação global em $H_{per}^1([0, L])$ para o problema de Cauchy (3.1). De fato, se aplicarmos o Teorema 3.3 para a solução $u(t)$ com dado inicial $u(T)$ podemos estender a solução u em um intervalo $[0, (T + \Delta T)]$.

Agora, definamos \tilde{T} como o supremo dos valores T tais que a solução u esteja estendida no intervalo $[0, \tilde{T})$.

Vamos mostrar que $\tilde{T} = \infty$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $\tilde{T} < \infty$. Veja que, se $\tilde{T} < \infty$, então é possível obter uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}$, em que $t_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $t_n \rightarrow \tilde{T}$ de modo que a norma de $u(t_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, seja limitada, isto é existe $M > 0$ tal que $\|u(t_n)\|_1 < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos aplicar o Teorema 3.3 de boa colocação local para o dado inicial $u(t_n)$. Com isso, obteremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a existência e unicidade de uma solução u num intervalo $[t_n, t_n + T_0)$. Todavia, note que se escolhermos um t_n que seja suficientemente próximo de \tilde{T} teremos que a aplicação do Teorema 3.3 garantirá a extensão da solução u para o intervalo $[t_n, t_n + T_0]$ em que $\tilde{T} \in [0, t_n + T_0]$. Entretanto, isso contradiz a hipótese de que o intervalo $[0, \tilde{T})$ é maximal. Em particular, o absurdo está na hipótese de que $\tilde{T} < \infty$, portanto, devemos ter que $\tilde{T} = \infty$. Com isso, garantimos a boa colocação global do problema de Cauchy (3.1). ■

Observação 3.3. Ao longo dos resultados de boa colocação local em $H_{per}^s([0, L])$ bem como na prova da boa colocação global no Teorema 3.7 sempre usamos o fato de que

$t \geq 0$. Todavia, os resultados podem ser facilmente adaptados para $t < 0$, em suma os desenvolvimentos são todos análogos. Nesse sentido, podemos considerar os resultados de boa colocação aqui obtidos para $t \in \mathbb{R}$.

3.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DO TIPO ONDA VIAJANTE PERIÓDICA

Tendo em vista que o problema de Cauchy (3.1) é bem colocado, podemos obter soluções explícitas para a NLSE. Para isso, partiremos da equação (1.4) para uma formulação geral e posteriormente nos direcionaremos a EDP apresentada no problema (3.1). Com efeito, multiplicando (1.3) por $\frac{\hbar^2}{2m}$ temos, equivalentemente, a seguinte equação

$$\frac{2m}{\hbar} iu_t(x, t) + u_{xx}(x, t) - \frac{2m}{\hbar^2} g|u(x, t)|^2 u(x, t) = 0. \quad (3.44)$$

As soluções para a equação (3.44) podem ser postas, de forma geral por,

$$u(x, t) = \phi(x, t)e^{i\varphi(x, t)} \quad (3.45)$$

em que $\phi(x, t), \varphi(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞ .

Com a finalidade de obtermos as expressões gerais para as soluções de (3.44) substituiremos (3.45) em (3.44). Para tanto, calcularemos as derivadas parciais de interesse de (3.45)

$$\begin{cases} u_t(x, t) = e^{i\varphi} (\phi_t + i\phi\varphi_t) \\ u_{xx}(x, t) = e^{i\varphi} (\phi_{xx} + 2i\phi_x\varphi_x + i\phi\varphi_{xx} - \phi\varphi_x^2) \end{cases} \quad (3.46)$$

onde, omitimos os argumentos das funções ϕ e φ para evitarmos uma notação carregada. Daí, substituindo (3.46) em (3.44) obtemos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2m}{\hbar} iu_t(x, t) + u_{xx}(x, t) - \frac{2m}{\hbar^2} g|u(x, t)|^2 u(x, t) \\ &= \frac{2m}{\hbar} i e^{i\varphi} (\phi_t + i\phi\varphi_t) + e^{i\varphi} (\phi_{xx} + 2i\phi_x\varphi_x + i\phi\varphi_{xx} - \phi\varphi_x^2) - \frac{2m}{\hbar^2} g|\phi e^{i\varphi}|^2 \phi e^{i\varphi} \\ &= i \left(\frac{2m}{\hbar} \phi_t + 2\phi_x\varphi_x + \phi\varphi_{xx} \right) + \left(-\frac{2m}{\hbar} \phi\varphi_t + \phi_{xx} - \phi\varphi_x^2 - \frac{2m}{\hbar^2} g\phi^3 \right) \end{aligned}$$

exigindo que tanto a parte real quanto imaginária seja identicamente nula obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{2m}{\hbar} \phi_t + 2\phi_x\varphi_x + \phi\varphi_{xx} = 0 \\ -\frac{2m}{\hbar} \phi\varphi_t + \phi_{xx} - \phi\varphi_x^2 - \frac{2m}{\hbar^2} g\phi^3 = 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

De posse de (3.47), vamos obter algumas soluções explícitas para a NLSE. Essas serão desenvolvidas sob algumas condições sobre a função φ e a constante g .

Para ondas viajantes periódicas, consideramos as seguintes condições sobre (3.45)

$$\begin{cases} \phi(x, t) \equiv \phi_\omega(x), \\ g < 0, \\ \varphi(x, t) \equiv \omega t, \end{cases} \quad (3.48)$$

em que $\phi_\omega(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função L -periódica de classe C^∞ . Sob essas condições, a equações dadas em (3.47) se reduzem a

$$\phi_\omega'' - \frac{2m\omega}{\hbar}\phi_\omega + \frac{2m|g|}{\hbar^2}\phi_\omega^3 = 0.$$

De posse disso, definamos as seguintes constantes auxiliares $a \equiv \frac{2m\omega}{\hbar}$ e $b = \frac{2m|g|}{\hbar^2}$. Daí, nosso problema então se reduz a estudarmos as soluções da seguinte EDO:

$$\phi_\omega'' - a\phi_\omega + b\phi_\omega^3 = 0. \quad (3.49)$$

Agora, determinaremos a solução do tipo onda viajante periódica para a equação (3.49). Com efeito, o procedimento inicial é o mesmo feito na seção anterior para as ondas solitárias, isto é multiplicaremos (3.49) por ϕ_ω' e integraremos a função no intervalo $(p_0, x]$, onde p_0 é um ponto do espaço que contém a física de uma determinada condição inicial, ou de contorno, então temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{p_0}^x \phi_\omega'(s)\phi_\omega''(s)ds + a \int_{p_0}^x \phi_\omega'(s)\phi_\omega(s)ds - b \int_{p_0}^x \phi_\omega'(s)\phi_\omega^3(s)ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{p_0}^x \frac{d}{ds} ((\phi_\omega'(s))^2) ds + \frac{a}{2} \int_{p_0}^x \frac{d}{ds} ((\phi_\omega(s))^2) ds - b \int_{p_0}^x \frac{d}{ds} ((\phi_\omega(s))^4) ds \\ &= \frac{1}{2} (\phi_\omega'(s))^2 \Big|_{p_0}^x + \frac{a}{2} (\phi_\omega(s))^2 \Big|_{p_0}^x - \frac{b}{4} (\phi_\omega(s))^4 \Big|_{p_0}^x \\ &= \left[\frac{1}{2} (\phi_\omega'(x))^2 + \frac{a}{2} \phi_\omega^2(x) - \frac{b}{4} \phi_\omega^4(x) \right] - \left[\frac{1}{2} \phi_\omega'^2(p_0) + \frac{a}{2} \phi_\omega^2(p_0) - \frac{b}{4} \phi_\omega^4(p_0) \right]. \end{aligned}$$

Definindo a constante B por

$$B \equiv \frac{1}{2} \phi_\omega'^2(p_0) + \frac{a}{2} \phi_\omega^2(p_0) - \frac{b}{4} \phi_\omega^4(p_0), \quad (3.50)$$

obtemos a seguinte quadratura

$$\frac{1}{2} (\phi_\omega'(x))^2 + \frac{a}{2} \phi_\omega^2(x) - \frac{b}{4} \phi_\omega^4(x) = B. \quad (3.51)$$

Resolvendo (3.51) para $(\phi_\omega')^2$ obtemos a seguinte expressão

$$(\phi_\omega')^2 = -a\phi_\omega^2 + \frac{b}{2}\phi_\omega^4 + 2B, \quad (3.52)$$

onde omitimos os argumentos para evitarmos uma notação carregada nos desenvolvimentos futuros. A expressão obtida em (3.52) é uma EDO de primeira ordem essencialmente separável, aqui nosso objetivo é determinarmos a solução ϕ_ω , nesse sentido, faremos algumas manipulações algébricas, de modo a tornar a expressão (3.52) solúvel analiticamente. Então, primeiramente vamos reescrever o lado direito de (3.52) empregando raízes de polinômios, com efeito:

$$\phi_\omega'^2 = \frac{b}{2} \left[\frac{2a}{b} \phi_\omega^2 - \phi_\omega^4 + \frac{4B}{b} \right] = \frac{b}{2} (\eta_1^2 - \phi_\omega^2)(\phi_\omega^2 - \eta_2^2), \quad (3.53)$$

onde $\eta_1, -\eta_1, \eta_2, -\eta_2$ são os zeros da função polinomial $P(s) \equiv -s^4 + \frac{2a}{b}s^2 + \frac{4B}{b}$. Agora, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\eta_1 > \eta_2 > 0$ e que $\eta_2 \leq \phi \leq \eta_1$. Deste modo os η_i 's devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} \frac{2a}{b} = \eta_1^2 + \eta_2^2 \\ \frac{4B}{b} = -\eta_1^2 \eta_2^2. \end{cases} \quad (3.54)$$

Em seguida, passamos a definir algumas variáveis auxiliares as quais serão úteis nesta abordagem e simplificarão os desenvolvimentos seguintes. Façamos

$$\alpha = \frac{\phi}{\eta_1} \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}. \quad (3.55)$$

Levando as novas variáveis descritas em (3.55) na equação (3.53), obtemos

$$\alpha'^2 = \frac{b\eta_1^2}{2} [(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - 1 + k^2)]. \quad (3.56)$$

Agora, definimos uma variável adicional $\psi \equiv \psi(x)$ de tal modo que essa satisfaça a relação

$$\alpha^2 = 1 - k^2 \sin^2(\psi), \quad (3.57)$$

daí temos que os seguintes passos

$$\begin{cases} 1 - \alpha^2 = 1 - (1 - k^2 \sin^2(\psi)) = k^2 \sin^2(\psi), \\ \alpha^2 - 1 + k^2 = (1 - k^2 \sin^2(\psi)) - 1 + k^2 = k^2(1 - \sin^2(\psi)) = k^2 \cos^2(\psi) \\ \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{d\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{k^2 \sin(\psi) \cos(\psi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} \psi' \\ \alpha'^2 = \frac{k^4 \sin^2(\psi) \cos^2(\psi)}{1 - k^2 \sin^2(\psi)} \psi'^2, \end{cases}$$

levando essas mudanças de variáveis em (3.57) obtemos o seguinte

$$\frac{k^4 \sin^2(\psi) \cos^2(\psi)}{1 - k^2 \sin^2(\psi)} \psi'^2 = \frac{b\eta_1^2}{2} [k^2 \sin^2(\psi) \cdot k^2 \cos^2(\psi)],$$

simplificando os termos obtemos

$$\psi'^2 = \frac{b\eta_1^2(1 - k^2 \sin^2(\psi))}{2}, \quad (3.58)$$

a qual é uma EDO separável nas variáveis x e ψ . Então, extraindo a raiz de ambos os lados, separando variáveis e integrando no intervalo $[0, x]$ obtemos

$$\int_0^x \frac{\psi'(s)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi(s))}} ds = \int_0^x \frac{\eta_1 \sqrt{b}}{\sqrt{2}} ds = \frac{\eta_1 \sqrt{b} x}{\sqrt{2}}. \quad (3.59)$$

Assim, resta avaliarmos o lado esquerdo de (3.59), para tanto, vamos introduzir que $\phi_\omega = \psi(s)$ o que permite deduzirmos que $d\phi_\omega = \psi'(s) ds$. O que é suficiente para garantir, em vista de (3.59), que

$$\int_0^{\psi(x)} \frac{d\phi_\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi_\omega)}} = \frac{\eta_1 \sqrt{b} x}{\sqrt{2}}. \quad (3.60)$$

Finalmente, fazendo a troca de variável $x = \sin(\phi)$, sugerida por Jacobi, temos que $d\phi = \frac{dl}{\sqrt{1 - l^2}}$, e assim

$$\int_0^{\psi(x)} \frac{d\phi_\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi_\omega)}} = \int_0^{\sin(\psi(x))} \frac{dl}{\sqrt{(1 - l^2)(1 - k^2 l^2)}}. \quad (3.61)$$

Agora, note que a integral do lado esquerdo de (3.61) corresponde a Integral Elíptica de Jacobi de primeira espécie e, com isso, podemos estabelecer que $\sin(\psi) = sn\left(\frac{\eta_1 \sqrt{b}}{\sqrt{2}} x, k\right)$. Ou seja,

$$\alpha(x) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)} = \sqrt{1 - k^2 sn^2\left(\frac{\eta_1 \sqrt{b}}{\sqrt{2}} x, k\right)} = dn\left(\frac{\eta_1 \sqrt{b}}{\sqrt{2}} x, k\right).$$

onde $dn(\cdot, \cdot)$ é a função dnoidal. Com isso, para explicitarmos a solução do tipo onda viajante resta voltarmos as variáveis originais e obtemos:

$$\phi_\omega(x) = \eta_1 dn\left(\frac{\eta_1 \sqrt{2m|g|}}{\hbar \sqrt{2}} x, k\right). \quad (3.62)$$

Por fim, obtemos a solução dinâmica do tipo onda viajante para a NLSE (3.44) por

$$u(x, t) = \eta_1 dn\left(\frac{\eta_1 \sqrt{2m|g|}}{\hbar \sqrt{2}} x, k\right) e^{i\omega t} \quad (3.63)$$

onde $A = \eta_1$ corresponde a amplitude da onda. Evidentemente, a densidade de radiação do condensado é dada por:

$$|u(x, t)|^2 = \eta_1^2 dn^2\left(\frac{\eta_1 \sqrt{2m|g|}}{\hbar \sqrt{2}} x, k\right). \quad (3.64)$$

Para as condições $|2m| = |\hbar| = 1$, a EDO associada ao problema (3.1) é

$$\phi_\omega'' - \omega \phi_\omega + |g| \phi_\omega^3 = 0 \quad (3.65)$$

e as soluções são

$$\phi_\omega(x) = \eta_1 dn \left(\frac{\eta_1 \sqrt{|g|}}{\sqrt{2}} x, k \right), \quad (3.66)$$

$$u(x, t) = \eta_1 dn \left(\frac{\eta_1 \sqrt{|g|}}{\sqrt{2}} x, k \right) e^{i\omega t}. \quad (3.67)$$

A solução (3.72) é periódica e seu período é associado a função dnoidal conforme apresentado do na Seção 2.3. Portanto, como a função $dn(u, k)$ tem período $2K(k)$, segue que a solução (3.72) possui período L dado por

$$L = \frac{2\sqrt{2}}{\eta_1 \sqrt{|g|}} K(k). \quad (3.68)$$

Além disso, o parâmetro k pode ser escrito em termos de ω e η_2 . De fato, da primeira equação de (3.54) e que $\frac{a}{b} = \frac{\omega}{|g|}$ segue que

$$k^2(\eta_2) = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2} = \frac{2\omega - 2|g|\eta_2^2}{|g|\eta_1^2} = \frac{2\omega - 2|g|\eta_2^2}{2\omega - |g|\eta_2^2} \quad (3.69)$$

e, portanto, o período L pode ainda ser escrito como

$$L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega - |g|\eta_2^2}} K(k(\eta_2)). \quad (3.70)$$

Consequentemente, torna-se conveniente escrevermos a solução dnoidal ϕ_ω explicitamente em termos de k . Tendo em vista que η_2 pode ser obtido explicitamente em termos de k e ω da seguinte forma

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{2\omega(1 - k^2)}{|g|(2 - k^2)}} \quad (3.71)$$

e tendo em vista que η_2 se relaciona com η_1 por meio da primeira equação de (3.54) podemos obter o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} \phi_\omega(x) &= \sqrt{\frac{2\omega}{|g|} - \frac{2\omega(1 - k^2)}{|g|(2 - k^2)}} dn \left(\sqrt{\frac{2\omega}{|g|} - \frac{2\omega(1 - k^2)}{|g|(2 - k^2)}} \sqrt{\frac{|g|}{2}} x, k \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\omega}{|g|(2 - k^2)}} dn \left(\sqrt{\frac{\omega}{2 - k^2}} x, k \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

O que mostra que a solução $\phi_\omega(x)$ dada em (3.72) pode ser construída em termos dos parâmetros ω e k . Esse resultado será obtido de forma rigorosa na seção de análise espectral.

Observação 3.4. *É interessante notar que, de fato, temos uma solução periódica $\phi_\omega(x)$. Com isso, segue do Teorema 2.1 que*

$$\phi_\omega^{(n)}(x) = \phi_\omega^{(n)}(x + L),$$

além disso, do perfil da função dnoidal temos ainda que

$$\phi_\omega'(0) = \phi_\omega'(L) = 0.$$

Esses resultados serão de extrema importância nos desenvolvimentos futuros.

O seguinte teorema sintetiza e formaliza essa discussão. Os resultados originais foram obtidos em (Angulo Pava, 2007).

Teorema 3.8. *Seja $L > 0$ arbitrariamente fixado. Consideremos $\omega_0 > \frac{2\pi^2}{L^2}$ e o único $\eta_{2,0} = \eta_2(\omega_0) \in (0, \sqrt{\frac{2\omega}{|g|}})$, tal que*

$$T_{\phi_{\omega_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega_0 - |g|\eta_2^2}} K(k(\eta_2)) = L. \quad (3.73)$$

Então,

(i) *Existem um intervalo $J(\omega_0)$ com ω_0 em seu interior, um intervalo $B(\eta_{2,0})$ com η_2 em seu interior e uma única função $\Lambda : J(\omega_0) \rightarrow B(\eta_{2,0})$, tal que $\Lambda(\omega_0) = \eta_{2,0}$ e*

$$L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega - |g|\eta^2}} K(k(\eta_2)),$$

onde $\omega \in J(\omega_0)$, $\eta_2 = \Lambda(\omega)$ e $k^2 = k^2(\omega) \in (0, 1)$ é definido por $k^2 = \frac{2\omega - 2|g|\eta^2}{2\omega - |g|\eta^2}$.

(ii) *A solução onda dnoidal em (3.72), determinada por $\eta_1 = \eta_1(\omega)$, $\eta_2 = \eta_2(\omega)$ tem período fundamental L e satisfaz (3.65). Além disso, a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : J(\omega_0) &\mapsto H_{per}^1([0, L]) \\ \omega &\mapsto \phi_\omega \end{aligned}$$

é uma função suave.

(iii) *$J(\omega_0)$ pode ser escolhido como $(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que η_2 está definido no intervalo $(0, \sqrt{\frac{\omega}{|g|}})$. Por hipótese, temos que $0 < \eta_2 < \eta_1$ e da primeira igualdade de (3.54), temos ainda que $\eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{2\omega}{|g|}$. Agora, veja que como η_1 e η_2 são estritamente positivos, então

$$\eta_2^2 < \eta_1^2 < \frac{2\omega}{|g|} \implies \eta_2 < \eta_1 < \sqrt{\frac{2\omega}{|g|}}.$$

Além disso,

$$2\eta_1^2 > \eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{2\omega}{|g|} \implies \eta_1 > \sqrt{\frac{\omega}{|g|}}.$$

Por outro lado, temos também que

$$0 < 2\eta_2^2 = \eta_2^2 + \eta_2^2 < \eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{2\omega}{|g|} \implies \eta_2 < \sqrt{\frac{\omega}{|g|}},$$

daí, combinando as desigualdades acima, obtemos que

$$0 < \eta_2 < \sqrt{\frac{\omega}{|g|}} < \eta_1 < \sqrt{\frac{2\omega}{|g|}} \quad (3.74)$$

particularmente, segue que $0 < \eta_2 < \sqrt{\frac{\omega}{|g|}} \implies \eta_2 \in \left(0, \sqrt{\frac{\omega}{|g|}}\right)$, conforme desejado. Agora, prosseguiremos provando cada um dos itens do teorema.

Consideremos o conjunto aberto

$$\Omega = \left\{ (\eta, \omega) : \omega > \frac{2\pi^2}{L^2}, \eta \in \left(0, \sqrt{\frac{\omega}{|g|}}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e definamos a aplicação $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\Psi(\eta, \omega) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega - |g|\eta^2}} K(k(\eta, \omega)),$$

onde $k^2(\eta, \omega) = \frac{2\omega - 2|g|\eta^2}{2\omega - |g|\eta^2}$. Com isso, mostraremos a existência da função Λ através do teorema da função implícita. Primeiramente, notemos que por hipótese, temos $\Psi(\eta_{2,0}, \omega_0) = L$, de fato,

$$\Psi(\eta_{2,0}, \omega_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega_0 - |g|\eta_2^2}} K(k(\eta_2, \omega_0)) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega_0 - |g|\eta_2^2}} K(k(\eta_2)) = L.$$

Agora, mostraremos que $\frac{\partial \Psi(\eta, \omega)}{\partial \eta} \neq 0$, mais precisamente, mostraremos que $\frac{\partial \Psi(\eta, \omega)}{\partial \eta} < 0$.

Com efeito,

$$\frac{\partial \Psi(\eta, \omega)}{\partial \eta} = \frac{2\sqrt{2}\eta}{(2\omega - |g|\eta^2)^{3/2}} K(k) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega - |g|\eta^2}} \cdot \frac{dK}{dk} \cdot \frac{\partial k}{\partial \eta}. \quad (3.75)$$

A derivada parcial de $k(\eta, \omega)$ em η pode ser obtida por derivação implícita da expressão (3.69), e resulta em

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = -\frac{2\eta\omega}{k(2\omega - |g|\eta^2)^2} < 0.$$

Com isso, fica claro que k é estritamente decrescente em relação a η , pois por hipótese temos que $k, \eta, \omega > 0$. Além de que, a expressão (3.75) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \Psi(\eta, \omega)}{\partial \eta} = \frac{2\sqrt{2}\eta}{(2\omega - |g|\eta^2)^{3/2}} K(k) - \frac{4\sqrt{2}\eta\omega}{k(2\omega - |g|\eta^2)^{5/2}} \frac{dK}{dk}. \quad (3.76)$$

Por outro lado, a derivada de $K(k)$ pode ser expressa pela seguinte igualdade

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{E(x) - (1 - x^2) K(x)}{x(1 - x^2)}, \quad (3.77)$$

que vale para todo $x \in (0, 1)$, onde E é uma integral elíptica de segunda espécie. A partir de (3.76) e (3.77), temos a seguinte cadeia de equivalências

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} < 0 &\iff \frac{2\sqrt{2}\eta}{(2\omega - |g|\eta^2)^{3/2}} K(k) - \frac{4\sqrt{2}\eta\omega}{k(2\omega - |g|\eta^2)^{5/2}} \frac{dK}{dk} < 0 \\ &\iff \frac{2k\sqrt{2}\eta(2\omega - |g|\eta^2)K(k) - 4\sqrt{2}\eta\omega \frac{dK}{dk}}{k(2\omega - |g|\eta^2)^{5/2}} < 0 \\ &\iff 2k\sqrt{2}\eta(2\omega - |g|\eta^2)K(k) - 4\sqrt{2}\eta\omega \frac{dK}{dk} < 0 \\ &\iff k(2\omega - |g|\eta^2)K(k) - 2\omega \frac{K}{dk} < 0 \\ &\iff k(2\omega - |g|\eta^2)K(k) - 2\omega \cdot \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)} < 0 \\ &\iff k^2(1 - k^2)(2\omega - |g|\eta^2)K(k) - 2\omega(E(k) - (1 - k^2)K(k)) < 0 \\ &\iff (k^2(2\omega - |g|\eta^2) + 2\omega)(1 - k^2)K(k) - 2\omega E(k) < 0 \\ &\iff \left(\frac{(2\omega - 2|g|\eta^2)}{(2\omega - |g|\eta^2)}(2\omega - |g|\eta^2) + 2\omega \right) (1 - k^2)K(k) - 2\omega E(k) < 0 \\ &\iff (4\omega - 2|g|\eta^2)(1 - k^2)K(k) - 2\omega E(k) < 0 \\ &\iff (4\omega - 2|g|\eta^2) \cdot \left(\frac{|g|\eta^2}{2\omega - |g|\eta^2} \right) K(k) - 2\omega E(k) < 0 \\ &\iff 2|g|\eta^2 K(k) - 2\omega E(k) < 0 \\ &\iff |g|\eta^2 K(k) - \omega E(k) < 0 \\ &\iff |g| \frac{2\omega(1 - k^2)}{|g|(2 - k^2)} K(k) - \omega E(k) < 0 \\ &\iff 2(1 - k^2)K(k) - (2 - k^2)E(k) < 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Definamos $\beta^2 \equiv 1 - k^2$. Veja que, a função $\beta^2(\eta)$, dada por

$$\beta^2(\eta) = (1 - k^2(\eta)) = \frac{|g|\eta^2}{2\omega - |g|\eta^2}$$

é estritamente crescente, para $\eta \in \left(0, \sqrt{\frac{\omega}{|g|}}\right)$, com $\beta(0) = 0$ e $\beta(1) = 1$. Portanto, segue

de (3.78) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} < 0 &\iff 2(1-k^2)K(k) - (2-k^2)E(k) < 0 \\ &\iff f(\beta) \equiv (1+\beta^2)E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - 2\beta^2K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) > 0,\end{aligned}$$

onde, $f(1) = 0$. Além de que, é possível mostrar que f é estritamente decrescente, para isso, usamos que $x \frac{dE}{dx} = E(x) - K(x)$ e temos o seguinte

$$\begin{aligned}f'(\beta) &= 2\beta E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) + (1+\beta^2) \frac{E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ &\quad - 4\beta K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) + 2\beta^3 \frac{E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - (1 - (1-\beta^2)K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right))}{(\sqrt{1-\beta^2})(1-\beta^2)} \cdot \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ &= 2\beta E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - \beta(1+\beta^2) \left(\frac{E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}{1-\beta^2}\right) \\ &\quad - 4\beta K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) + 2\beta \frac{E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - \beta^2 K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}{1-\beta^2} \\ &= \left[2\beta - \frac{\beta(1+\beta^2)}{1-\beta^2} + \frac{2\beta}{1-\beta^2}\right] E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) + \left[\frac{\beta(1+\beta^2)}{1-\beta^2} - 4\beta - \frac{2\beta^3}{1-\beta^2}\right] K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) \\ &= \left(\frac{2\beta - 2\beta^3 - \beta - \beta^3 + 2\beta}{1-\beta^2}\right) E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) + \left(\frac{\beta + \beta^3 - 4\beta + 4\beta^3 - 2\beta^3}{1-\beta^2}\right) K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) \\ &= \left(\frac{3\beta - 3\beta^3}{1-\beta^2}\right) E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) + \left(\frac{3\beta^3 - 3\beta}{1-\beta^2}\right) K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right).\end{aligned}$$

Logo, isso permite concluir que

$$\begin{aligned}f'(\beta) < 0 &\iff (1-\beta^2)E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) - (1-\beta^2)K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) < 0 \\ &\iff (1-\beta^2)E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) < (1-\beta^2)K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) \\ &\iff (1-\beta^2)E\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) < (1+\beta^2)K\left(\sqrt{1-\beta^2}\right),\end{aligned}$$

e como $E(x) < K(x)$ para todo $x \neq 0$, segue que $f'(\beta) < 0$, consequentemente, $f(\beta)$ é uma função estritamente decrescente. Logo, como $\beta \in (0, 1)$ e $f(1) = 0$, então, do fato de que a f é decrescente segue que para $\beta \in (0, 1)$, tem-se que $0 < f(\beta) < 1$, em suma, $f(\beta) > 0$. Portanto, obtemos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} < 0 \iff f(\beta) < 0, \tag{3.79}$$

para todo $\beta \in (0, 1)$. Consequentemente, $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \neq 0$ e, logo, do Teorema da função implícita segue que existe uma curva Λ definida numa vizinhança de ω_0 , digamos $I(\omega_0)$, tal que $\Psi(\Lambda(\omega), \omega) = L$, para todo $\omega \in I(\omega_0)$. Disso, obtêm-se (3.73).

Ademais, da arbitrariedade da escolha de ω_0 no intervalo $\mathcal{I} = \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$, segue da unicidade da função Λ que, podemos estendê-la do domínio para todo o intervalo \mathcal{I} . Com isso, a prova fica completa. ■

Corolário 3.1. *Considere o mapa $\Lambda : I(\omega_0) \rightarrow B(\eta_{2,0})$ definido no Teorema 3.8. Então, Λ é uma função estritamente decrescente em $I(\omega_0)$.*

Demonstração. Do Teorema 3.8, temos que $\Psi(\Lambda(\omega), \omega) = L$ para todo $\omega \in I(\omega_0)$. Disso, segue que

$$\frac{d}{d\omega}\Lambda(\omega) = -\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\omega}\right)}{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)}.$$

Para mostrarmos que Λ é estritamente decrescente, resta provar que $\frac{\partial\Psi}{\partial\omega} < 0$, pois do Teorema 3.8 temos que $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} < 0$. Portanto, da definição de $k(\eta)$ do Teorema 3.8, podemos escrever η como

$$\eta^2 = (2\omega - |g|\eta^2)(1 - k^2) \equiv (2\omega - |g|\eta^2)k'^2, \quad (3.80)$$

e disso segue as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\omega} < 0 &\iff \frac{\partial}{\partial\omega} \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega - |g|\eta^2}} K(k(\eta_2)) \right] < 0 \\ &\iff -\frac{2\sqrt{2}}{(2\omega - |g|\eta^2)^{3/2}} K(k) + \frac{2\sqrt{2}\eta^2}{k(2\omega - |g|\eta^2)^{5/2}} \frac{dK(k)}{dk} < 0 \\ &\iff \frac{\eta^2}{k} \frac{dK(k)}{dk} - (2\omega - |g|\eta^2) K(k) < 0 \\ &\iff \frac{(2\omega - |g|\eta^2)k'^2}{k} \frac{dK(k)}{dk} - (2\omega - |g|\eta^2) K(k) < 0 \\ &\iff \frac{k'^2}{k} \frac{dK(k)}{dk} - K(k) < 0 \\ &\iff \frac{k'^2}{k} \left(\frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \right) - K(k) < 0 \\ &\iff E - (k^2 + k'^2) K(k) < 0 \end{aligned}$$

e como, $K(k) > E(k)$ para todo k , segue que $\frac{\partial\Psi}{\partial\omega} < 0$, conseqüentemente, o corolário fica provado. ■

3.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FÍSICAS SOBRE A SOLUÇÃO ONDA VIAJANTE PERIÓDICA

Agora, vamos fazer algumas considerações tanto sobre as soluções ϕ_ω e $u(x, t)$ dadas em (3.72) e (3.67) respectivamente. De fato, assim como no caso da equação de Schrödinger linear o objeto matemático $u(x, t)$ é uma função complexa, logo, não sendo associada a medição de uma grandeza real.

Em suma, a interpretação física para $u(x, t)$ segue as linhas padrões da mecânica quântica usual. Ou seja, o sentido físico aqui é atrelado a grandeza $|u(x, t)|^2$. Para sistemas como os condensados de Bose-Einstein, $|u(x, t)|$ denota a densidade de radiação ou partículas no intervalo $[x, x + dx]$. A interpretação de uma densidade de radiação é associada a sistemas como um gás de fótons, esse tipo de interpretação faz sentido em sistemas como fibras ópticas (BURGER et al., 2002).

O gráfico a seguir apresenta o comportamento da solução ϕ_ω e da densidade $|u(x, t)|^2$ para diferentes valores de $|g|$.

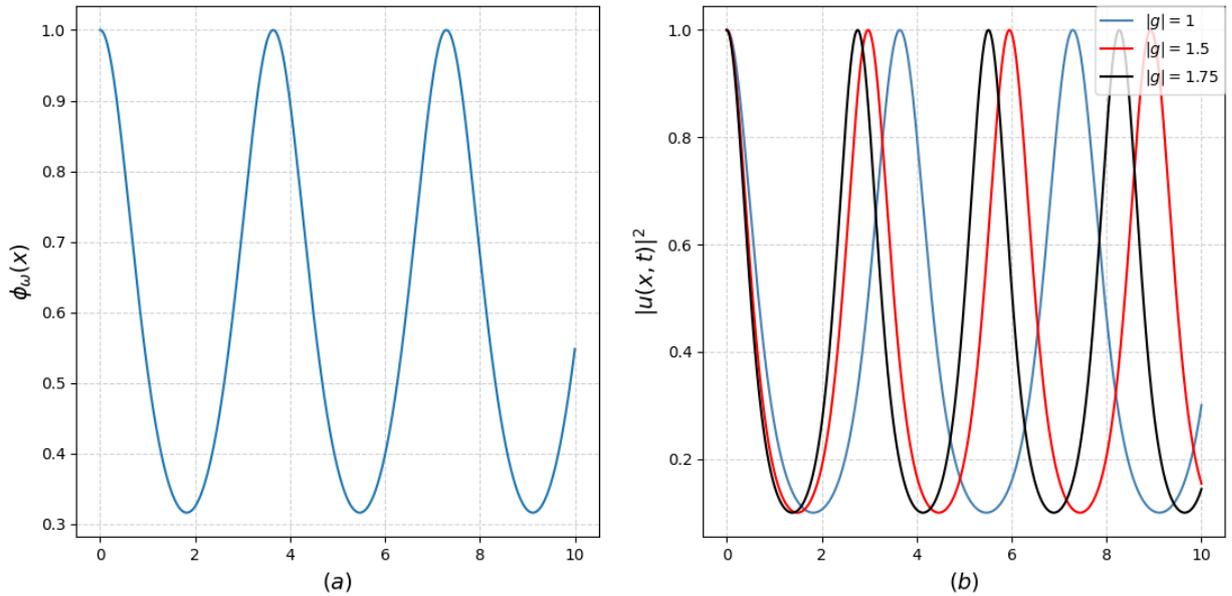


Figura 3.1 – Perfil da onda viajante $\phi_\omega(x)$ em (a) e $|u(x, t)|^2$ de um condensado em (b) para diferentes valores de $|g|$ e $k = 0.5$. Fonte: Do Autor.

No entanto, a solução dnoidal traz consigo diversos outros aspectos físicos interessantes. Em particular, o caráter periódico por si só torna-se relevante, visto que grande parte dos problemas usuais em MQ versam sobre a tentativa de construção de uma função de onda $u(x, t)$, tal que $|u(x, t)| \rightarrow 0$, se $x \rightarrow \infty$. Nesse sentido, a onda dnoidal corresponde a um exemplo fisicamente aceitável de uma solução em MQ em que a função $u(x, t)$ não tende assintoticamente a zero, quando $x \rightarrow \infty$.

Além disso, a solução (3.72) ainda pode ser melhor explorada quando analisamos alguns casos limites. Em particular, os termos k e g são essencialmente úteis e permitem que a função ϕ_ω melhor se adapte ao modelo que está associada (BRONSKI et al., 2001). Nesse sentido, primeiro vamos estudar o comportamento de ϕ_ω para alguns valores de k .

Conforme já dito, as soluções $\phi_\omega(x)$ são periódicas. Além disso, para valores médios de k é possível ver que o perfil de oscilação $\phi_\omega(x)$ assemelha-se a função seno. Entretanto, para valores de k próximos de 1 o comportamento da função dnoidal assemelha-se às funções elípticas propriamente ditas, veja a Figura 3.2

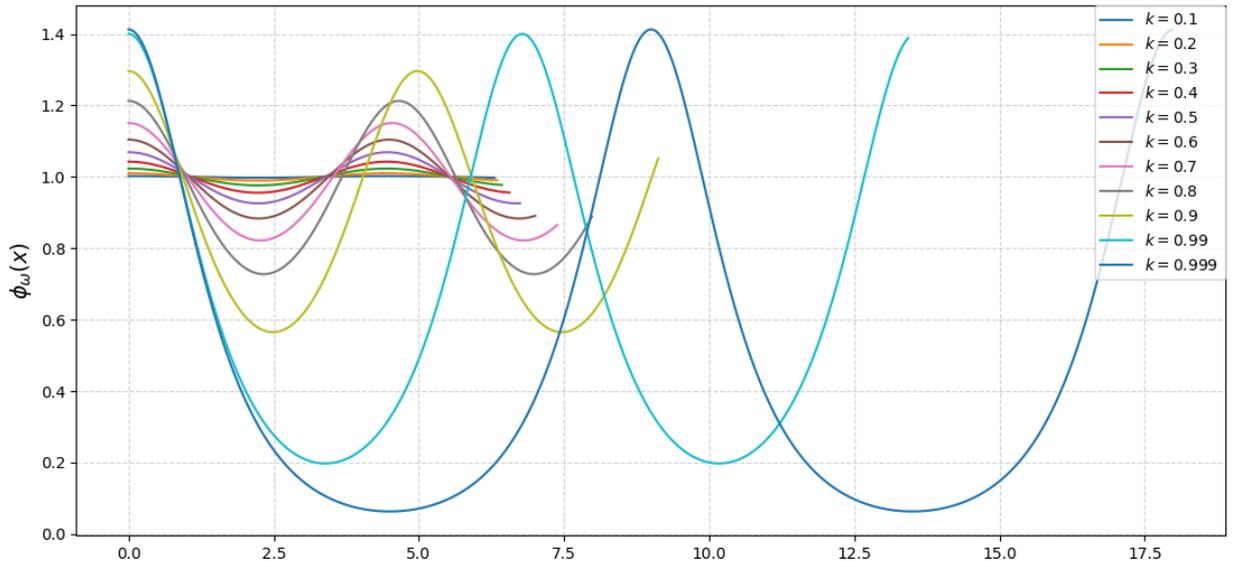


Figura 3.2 – Soluções ϕ_ω para $\omega = |g| = 1$ e diferentes valores de k . Fonte: Do Autor.

Particularmente, podemos ser mais rigorosos nessa análise. Para isso, vamos avaliar tanto o comportamento da solução ϕ_ω associada a função dnoidal, quanto a função $K(k)$ associada ao período L da solução no limite em que $k \rightarrow 1^-$. Primeiramente, veja que o comportamento da $K(k)$ é conhecido quando $k \rightarrow 1^-$ esse é o seguinte

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = \infty$$

consequentemente, segue que se $k \rightarrow 1^-$, temos também que

$$L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega - |g|\eta_2^2}} K(k(\eta_2)) \rightarrow \infty,$$

ou seja, o período da solução torna-se assintoticamente grande. Consequentemente, isso implica a perda da periodicidade do sistema físico. Em relação a solução dnoidal, teremos, ainda, que se $k \rightarrow 1^-$, então $dn(x, k) \rightarrow \operatorname{sech}(x)$, ou seja,

$$\phi_\omega \rightarrow \sqrt{\frac{\omega}{|g|}} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}x). \quad (3.81)$$

Esse resultado é especialmente interessante uma vez que, a solução (3.81) corresponde a uma onda solitária (sóliton). Esse sóliton, por vezes, é associado a estados fundamentais da NLSE (Angulo Pava, 2007). Além disso, há diversos trabalhos que exploram soluções solitônicas para a NLSE cujo perfil é exatamente de uma secante hiperbólica (BURGER et al., 2002) e (BURGER et al., 1999).

Por outro lado, podemos ter o caso em que k é muito pequeno. Nessa condição, temos o seguinte

$$k^2 \approx 0 \implies \sqrt{\frac{2\omega}{|g|(2-k^2)}} dn\left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}x, k\right) \rightarrow \sqrt{\frac{\omega}{|g|}}, \quad (3.82)$$

e logo a solução periódica tende a um fator constante. Em suma, essas análises tornam-se relevantes para a solução ϕ_ω . Com isso, fica claro que as soluções dnoidais ϕ_ω contém a física não apenas de sistemas periódicos, mas ainda de regimes próximos associados aos casos assintóticos de k . De fato, o termo k torna-se uma alternativa para adaptar a solução ϕ_ω ao modelo de interesse. Em particular, no trabalho (BRONSKI et al., 2001) os autores empregam $k \approx 1$ para avaliar as modulações de condensados de Bose-Einsten.

Por outro lado, também podemos avaliar as soluções ϕ_ω com respeito ao parâmetro g . Primeiramente, veja que esse foi tomado negativo com intuito de termos soluções periódicos. Entretanto, essa escolha possui a correspondência física de estarmos nos atendo aos condensados de Bose-Einsten atrativos (ROGEL-SALAZAR, 2013). No entanto, vamos considerar $|g|$ associado aos valores de k , discutidos anteriormente.

Com efeito, no regime em que k assume valores médios no intervalo $(0, 1)$, temos que o comportamento ϕ_ω é essencialmente periódico. As soluções ϕ_ω para casos diferentes de $|g|$ podem ser vistas na Figura 3.3.

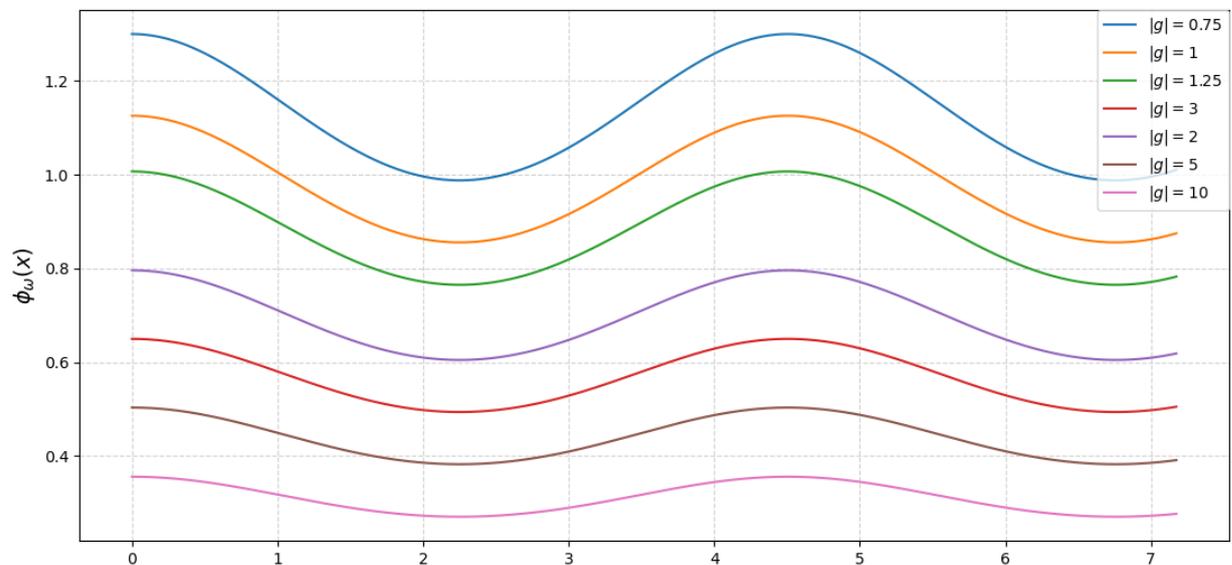


Figura 3.3 – Soluções ϕ_ω para $k = 0.65$, $\omega = 1$ e alguns valores de $|g|$. Fonte: Do Autor.

A Figura 3.3 motiva a discussão de que o aumento da constante $|g|$ diminui a amplitude das ondas dnoidais. De fato, isso pode ser visto analiticamente na expressão (3.72) uma vez que $\phi_\omega \sim \frac{1}{\sqrt{|g|}}$. Por outro lado, podemos ainda ver que, nesse contexto o termo $|g|$ age de maneira análoga a um termo de amortecimento num oscilador harmônico perturbado. Com efeito, veja que a EDO associada a ϕ_ω é a seguinte

$$\phi_\omega'' - \omega\phi_\omega' + |g|\phi_\omega^3 = 0.$$

Decerto, essa EDO corresponde a equação de Duffing (SALAS; HERNÁNDEZ, 2014), que é uma generalização do oscilador harmônico para sistemas em que os desvios das posições de equilíbrio são significativos até a ordem cúbica. No caso particular que $g = 0$, a EDO acima degenera-se para o oscilador harmônico simples.

Agora, passamos a investigar o comportamento de $|g|$, frente aos casos em que $k \rightarrow 1^-$. As soluções ϕ_ω para $k = 0.999$ e diferentes valores de $|g|$ são apresentadas na Figura 3.4

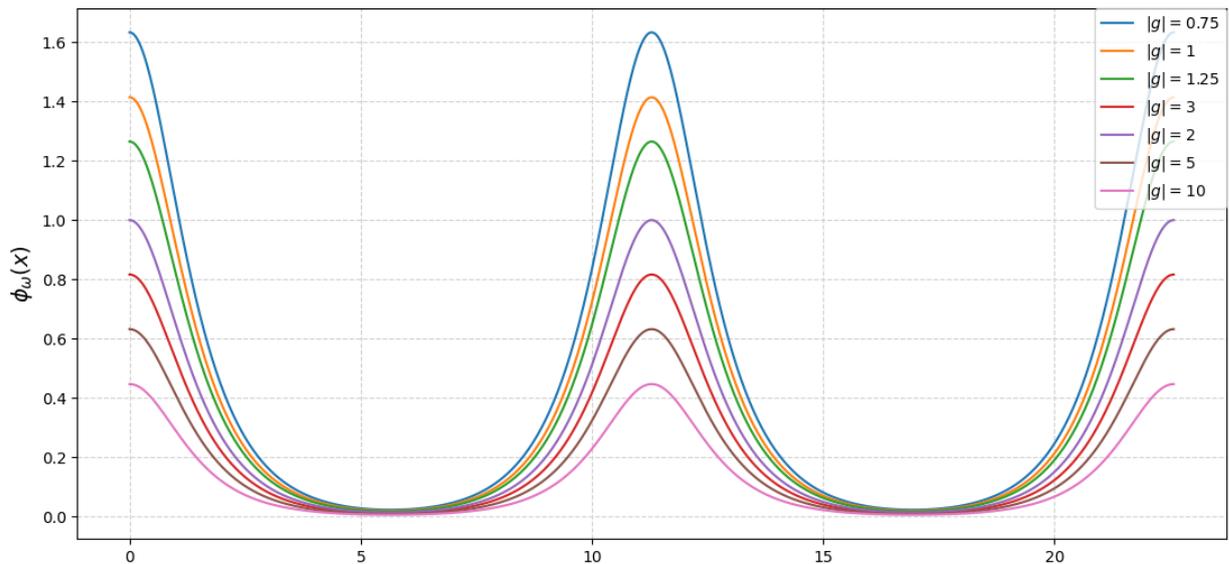


Figura 3.4 – Soluções ϕ_ω para $k = 0.999$ e alguns valores de $|g|$. Fonte: Do Autor.

Nesse regime, as soluções periódicas tendem a degenerar-se para o perfil de onda solitária do tipo secante hiperbólica. Em verdade, essas soluções correspondem aos chamados sólitons claros da NLSE. Aqui, a interpretação física de ϕ_ω versa sobre a intensidade de radiação num condensado de fótons. Ademais, a constante $|g|$ aqui age como um termo que ajusta a intensidade de radiação, emitida numa região localizada do espaço.

Por fim, no caso assintótico em que $k \rightarrow 0$ a solução dnoidal degenera-se para a solução constante. Nesse caso, temos uma onda de intensidade inversamente proporcional a $|g|$.

4 ANÁLISE ESPECTRAL

Com o resultado de boa colocação obtido, vamos nos ater a estudar o espectro do operador \mathcal{L}_ω associado a EDO (3.65). Para isso, usaremos os resultados da nova teoria Floquet, os quais, foram estabelecidos no trabalho (NATALI; PASTOR, 2014) e permitirão que nós mostremos que o segundo autovalor do operador \mathcal{L}_ω é negativo.

4.1 OPERADORES ASSOCIADOS A NLSE

Com as quantidades conservadas obtidas em (3.18) e (3.19) podemos definir o funcional \mathcal{G} por

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : H_{per}^1([0, L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow \mathcal{G}(u) \equiv E(u) + \omega F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 - \frac{|g|}{2} |u|^4 dx + \frac{\omega}{2} \int_0^L |u|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.1)$$

o qual, também é conservado. Como a solução u é complexa, podemos escrever $u = (p, q) = p + iq$ onde $p \equiv p(x, t)$ e $q \equiv q(x, t)$ são duas funções de $H_{per}^1([0, L])$. Com isso, podemos reescrever (4.1) como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p, q) &= E(p, q) + \omega F(p, q) & (4.2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L p_x^2 + q_x^2 - \frac{|g|}{2} (p^4 + 2p^2q^2 + q^4) dx + \frac{\omega}{2} \int_0^L (p^2 + q^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L -pp_{xx} - qq_{xx} - \frac{|g|}{2} (p^4 + 2p^2q^2 + q^4) dx + \frac{\omega}{2} \int_0^L (p^2 + q^2) dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Podemos provar que o vetor $(\phi_\omega, 0)$ é um ponto crítico do funcional \mathcal{G} . Para isso, calcularemos a derivada de Fréchet de \mathcal{G} . Primeiramente, calcularemos a derivada à Gatêaux.

De fato, sabemos que $\mathcal{G}'(u)$ é diferenciável à Gatêaux em $p, q \in H_{per}^1([0, L])$, se existe $f \in H_{per}^{-1}([0, L])$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\mathcal{G}(p - hs, q - ht) - \mathcal{G}(p, q) - \langle f, h(s, t) \rangle_{H_{per}^{-1}([0, L]), H_{per}^1([0, L])} \right] = 0, \quad (4.4)$$

para todo $(s, t) \in H_{per}^1([0, L])$.

Então, primeiramente, vamos desenvolver o termo $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(p - hs, q - ht)$, com efeito

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &\equiv \mathcal{G}(p - hs, q - ht) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L -(p - hs)(p_{xx} - hs_{xx}) - (q - ht)(q_{xx} - ht_{xx}) \\
&\quad - \frac{|g|}{2} \left[(p - hs)^4 + 2(p - hs)^2(q - ht)^2 + (q - ht)^4 \right] dx \\
&\quad + \frac{\omega}{2} \int_0^L (p - hs)^2 + (q - ht)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ -p(p_{xx} - hs_{xx}) + hs(p_{xx} - hs_{xx}) - q(q_{xx} - ht_{xx}) + ht(q_{xx} - ht_{xx}) \right. \\
&\quad - \frac{|g|}{2} \left[(p^4 - 4p^3hs + 6p^2h^2s^2 - 4ph^3s^3 + h^4s^4) + 2(p^2q^2 - 2p^2hqt + p^2h^2t^2 - 2phsq^2) \right. \\
&\quad + 4ph^2sqt - 2ph^3st^2 + h^2s^2q^2 - 2h^3s^2qt + h^4s^2t^2) \\
&\quad \left. \left. + (q^4 - 4q^3ht + 6q^2h^2t^2 - 4qh^3t^3 + h^4t^4) \right] \right\} dx \\
&\quad + \frac{\omega}{2} \int_0^L p^2 - 2phs + h^2s^2 + q^2 - 2qht + h^2t^2 dx
\end{aligned}$$

Podemos ainda organizar os termos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \frac{1}{2} \int_0^L -pp_{xx} - qq_{xx} - \frac{|g|}{2} \left[p^4 + 2p^2q^2 + q^4 \right] + \omega(p^2 + q^2) dx \\
&\quad + \frac{h^2}{2} \int_0^L -ss_{xx} - tt_{xx} - \frac{|g|}{2} \left[h^2s^4 + 2s^2h^2t^2 + h^2t^4 \right] + \omega(s^2 + t^2) \\
&\quad - \frac{|g|}{2} (6p^2s^2 - 4phs^3 + 2(p^2t^24psqt - 2phst^2s^2q^2 - 2hs^2qt) - 4qht + 6q^2t^2 - 4qht^3) dx \\
&\quad + \frac{h}{2} \int_0^L p_{xx}s + q_{xx}t + ps_{xx} + qt_{xx} - \frac{|g|}{2} \left[-4p^3s - 2(2p^2qt + 2psq^2) + (-4q^3t) \right] \\
&\quad + \omega(-2ps - 2qt) dx \\
&= h \int_0^L -sp_{xx} - tq_{xx} + \frac{|g|}{2} (2p^3s + 2p^2qt + 2psq^2 - 2q^3t) + \omega(-ps - qt) dx \\
&\quad + \mathcal{G}(p, q) + h^2P(p, q, s, t)
\end{aligned}$$

onde, $P(p, q, s, t)$ é uma função auxiliar introduzida para termos uma notação mais limpa, com efeito esta é

$$\begin{aligned}
P(p, q, s, t) &= \frac{1}{2} \int_0^L -ss_{xx} - tt_{xx} - \frac{|g|}{2} \left[h^2s^4 + 2s^2h^2t^2 + h^2t^4 \right] + \omega(s^2 + t^2) \\
&\quad - \frac{|g|}{2} (6p^2s^2 - 4phs^3 + 2(p^2t^24psqt - 2phst^2s^2q^2 - 2hs^2qt) \\
&\quad - 4qht + 6q^2t^2 - 4qht^3) dx.
\end{aligned}$$

Com isso, podemos continuar o desenvolvimento do funcional \mathcal{G} , com efeito separando os

termos da integral em relação as partes p e q , temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= h \int_0^L -p_{xx}s + |g|(p^3s + p^2q^2(s+t)) - \omega p s dx \\
&+ h \int_0^L -q_{xx}t + |g|(q^3s + p^2q^2(s+t)) - \omega q t dx + \mathcal{G}(p, q) + h^2 P(p, q, s, t) \\
&= h \left\langle \begin{pmatrix} -p_{xx} + |g|p^3 - \omega p & p^2q^2 \\ p^2q^2 & -q_{xx} + |g|q^3 - \omega q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right\rangle_{H_{per}^{-1}([0,L]), H_{per}^1([0,L])} \\
&+ \mathcal{G}(p, q) + h^2 P(p, q, s, t) \\
&= h \left\langle \mathcal{G}^\dagger(p, q), (s, t) \right\rangle_{H_{per}^{-1}([0,L]), H_{per}^1([0,L])} + \mathcal{G}(p, q) + h^2 P(p, q, s, t)
\end{aligned}$$

com $\mathcal{G}^\dagger(p, q)$ é introduzido para termos uma notação mais limpa e é dado por

$$\mathcal{G}^\dagger(p, q) = \begin{pmatrix} -p_{xx} + |g|p^3 - \omega p & p^2q^2 \\ p^2q^2 & -q_{xx} + |g|q^3 - \omega q \end{pmatrix}$$

Agora que calculamos $\mathcal{G}(p - hs, q - ht)$, podemos calcular a derivada de Gâteaux de \mathcal{G} . Com efeito, pondo (4.5) em (4.4), obtemos de

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\mathcal{G}(p - hs, q - ht) - \mathcal{G}(p, q) - \langle f, h(s, t) \rangle_{H_{per}^1([0,L]), H_{per}^1([0,L])} \right] \\
&= \left\langle \mathcal{G}^\dagger(p, q), (s, t) \right\rangle_{H_{per}^{-1}([0,L]), H_{per}^1([0,L])} - \langle f, (s, t) \rangle_{H_{per}^1([0,L]), H_{per}^1([0,L])} \\
&= \left\langle \mathcal{G}^\dagger(p, q) - f, (s, t) \right\rangle_{H_{per}^1([0,L]), H_{per}^1([0,L])}
\end{aligned}$$

ou seja, segue que a derivada de Gâteaux do funcional \mathcal{G} é

$$f = \mathcal{G}'(p, q) = \begin{pmatrix} -p_{xx} + |g|p^3 - \omega p & p^2q^2 \\ p^2q^2 & -q_{xx} + |g|q^3 - \omega q \end{pmatrix}$$

Ademais, tendo em vista a continuidade do funcional \mathcal{G} , segue que a derivada de Gâteaux coincide com a derivada no sentido de Fréchet. Portanto, temos que $\mathcal{G}' = f$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}'(p, q) &= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 p + |g|(p^3 + p^2q^2) - \omega p & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 q + |g|(q^3 + p^2q^2) - \omega q \end{pmatrix} \quad (4.5) \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 p + |g|(p^3 + pq^2) - \omega p & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 q + |g|(q^3 + qp^2) - \omega q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + |g|(p^2 + q^2) - \omega & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + |g|(q^2 + p^2) - \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

onde a matriz correspondente ao operador em (4.6) é apenas uma reorganização da matriz inicialmente obtida em (4.5).

Note que a $\Phi = (\phi_\omega, 0)$, onde ϕ_ω é a solução obtida em em (3.72) é ponto crítico de \mathcal{G}' . Usando (4.5), temos

$$\mathcal{G}'(\phi_\omega, 0) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 \phi_\omega + |g|\phi_\omega^3 - \omega\phi_\omega & 0 \\ 0 & -0_{xx} + |g| \cdot 0^3 - \omega \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Agora, vamos obter a derivada segunda no sentido de Fréchet de \mathcal{G} . De fato, o funcional \mathcal{G}'' pode ser obtido diretamente de \mathcal{G}' fazendo as derivadas em relação a p e q . Calculando \mathcal{G}'' e aplicando no ponto $\Phi = (\phi_\omega, 0)$, obtemos

$$\mathcal{G}''(\phi_\omega, 0) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 3|g|\phi_\omega^2 - \omega & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + |g|\phi_\omega^2 - \omega \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

A expressão em (4.7), nos permite a definição do operador $\mathcal{L}_\omega : H_{per}^1([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ da seguinte forma

$$\mathcal{L}_\omega(y) \equiv \mathcal{G}''(y) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2 y}{dx^2} + (\omega - 3|g|\phi_\omega^2)y & 0 \\ 0 & -\frac{d^2 y}{dx^2} + (\omega - |g|\phi_\omega^2)y \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

O operador obtido em (4.8) é de extrema importância para o estudo da EDO (3.65). Ademais, podemos definir operadores auxiliares a partir das componentes de \mathcal{L}_ω . Com efeito, teremos o seguinte

$$\mathcal{L}_{dn} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3|g|\phi_\omega^2 \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_{dn}^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - |g|\phi_\omega^2. \quad (4.10)$$

As soluções dos operadores (4.9) e (4.10) correspondem as duas soluções linearmente independentes associadas a EDO (3.65). É evidente que, a autofunção ϕ_ω é solução do operador \mathcal{L}_{dn}^+ associada ao autovalor $\lambda = 0$. Por outro lado, para o operador \mathcal{L}_{dn} temos que ϕ'_ω é a autofunção associada ao autovalor $\lambda = 0$, de fato

$$\mathcal{L}_{dn}\phi'_\omega = -\frac{d^2}{dx^2}\phi'_\omega + \omega\phi'_\omega - 3|g|\phi_\omega^2\phi'_\omega = \frac{d}{dx}(-\omega\phi_\omega + |g|\phi_\omega^3) + \omega\phi'_\omega - 3|g|\phi_\omega^2\phi'_\omega = 0. \quad (4.11)$$

4.2 ESPECTRO DO OPERADOR \mathcal{L}_ω

Agora, vamos estudar o espectro do operador \mathcal{L}_ω obtido em (4.8). Determinar o espectro desse operador será essencial para garantirmos a estabilidade das soluções obtidas em (3.72). De fato, dado ao caráter diagonal do operador \mathcal{L}_ω , podemos estudar

seu espectro analisando, separadamente, cada elemento da diagonal principal. Ou seja, basta estudarmos o espectro dos operadores \mathcal{L}_{dn} e \mathcal{L}_{dn}^+ .

Vamos começar com o operador \mathcal{L}_{dn}^+ . Nesse sentido, segue o resultado.

Teorema 4.1. *O operador linear autoadjunto \mathcal{L}_{dn}^+ definido em $L_{per}^2([0, L])$ com domínio $H_{per}^1([0, L])$ não possui autovalor negativo; zero é um autovalor simples com autofunção ϕ . Além disso, o resto do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

Demonstração. O operador \mathcal{L}_{dn}^+ , sobre $L_{per}^2([0, L])$, com domínio $H_{per}^2([0, L])$, é linear, autoadjunto e ilimitado. Da equação (3.65), vemos que 0 é um autovalor associado a autofunção ϕ_ω , de fato

$$\mathcal{L}_{dn}^+ \phi_\omega = -\phi_\omega'' + \omega \phi_\omega - |g| \phi_\omega^3 = -(\phi_\omega'' - \omega \phi_\omega + |g| \phi_\omega^3) = 0. \quad (4.12)$$

Então, segue da teoria Floquet que, desde que a solução ϕ_ω não tenha zeros em $[0, L]$, segue, pelo Teorema da Oscilação (2.14), que zero é o primeiro autovalor de \mathcal{L}_{dn}^+ e portanto é simples. ■

O próximo resultado garante que existe uma família suave de soluções do tipo onda periódica, com período $L > 0$ fixo, para a equação (3.65).

Proposição 4.1. *Sejam $\omega_0 \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$ fixo e ϕ_{ω_0} a solução L_0 -periódica de (3.65), onde L_0 é dado em (3.73). Se $\theta \neq 0$, onde θ é a constante determinada na demonstração do Teorema (4.3), então existem uma vizinhança aberta $\mathcal{O} \subset \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$ de ω_0 e uma família $\phi_\omega \in H_{per}^1([0, L_0])$ de soluções L_0 -periódicas para a EDO (3.65), que dependem suavemente de $\omega \in \mathcal{O}$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.3 da referência (NATALI; NEVES, 2013b). ■

Agora, vamos estabelecer um resultado sobre a positividade do operador \mathcal{L}_{dn}^+ . Em particular, esse resultado será importante para a estabilidade das ondas dnoidais.

Teorema 4.2. *Sejam ϕ_ω a onda dnoidal obtida em (3.72) e $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ e considere o operador linear $\mathcal{L}_{dn}^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - |g| \phi_\omega^2$ definido em $H_{per}^2([0, L])$. Sob essas condições, existe um número β positivo, tal que*

$$\beta = \inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle : f \in H_{per}^1([0, L]), \|f\| = 1, \langle f, \phi_\omega^3 \rangle = 0 \right\} > 0. \quad (4.13)$$

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que o ínfimo do conjunto acima, é atingido e que $\beta > 0$. Com efeito, definamos, β por

$$\beta = \inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle : f \in H_{per}^1([0, L]), \|f\| = 1, \langle f, \phi_\omega^3 \rangle = 0 \right\}. \quad (4.14)$$

Tendo em vista o espectro do operador \mathcal{L}_{dn}^+ , segue do Teorema [4.1](#), que $\beta \geq 0$.

Agora, vamos mostrar que $\beta > 0$. Para tanto, suponhamos, por absurdo, que $\beta = 0$ e considere uma sequência $(f_j) \equiv (f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções em $H_{per}^1([0, L])$, tais que $\|f_j\| = 1$, $\langle f_j, \phi_\omega^3 \rangle = 0$ e $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, \varphi_j \rangle \rightarrow \beta = 0$, quando $j \rightarrow \infty$.

Nosso objetivo é chegarmos em um contradição para este valor de β . Nesse sentido, a ideia da demonstração será obter propriedades específicas da sequência (f_j) de modo que isso seja possível. Resumidamente, essas propriedades são:

- (a) A sequência (f_j) é uniformemente limitada com a norma de $H_{per}^1([0, L])$.
- (b) Existe uma subsequência de (f_j) que converge fracamente para $f \in L_{per}^2([0, L])$ e vale que $\langle f, \phi_\omega^3 \rangle = 0$.
- (c) A função f , que é o limite da convergência fraca da sequência (f_j) , é não identicamente nula, i.e. $f \neq 0$.
- (d) Temos que $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle = 0$ e que $\|f\| = 1$. Conseqüentemente, o ínfimo do conjunto

$$\{\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle : f \in H_{per}^1([0, L]), \|f\| = 1, \langle f, \phi_\omega^3 \rangle\}$$

é atingido para f .

Com as hipóteses já mencionadas e com os itens (a) – (d) torna-se possível mostrar que a suposição de que $\beta = 0$ é um absurdo. Com isso posto, vamos provar cada um dos itens acima.

Demonstração do item (a). Note que, a sequência $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle$ é convergente, logo, segue que ela é limitada. Portanto, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle \leq M$. Além disso, do produto interno $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle$ temos também que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle &= \left\langle \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega - |g| \phi_\omega^2 \right) f_j, f_j \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{d^2}{dx^2} f_j, f_j \right\rangle + \omega \langle f_j, f_j \rangle - |g| \langle \phi_\omega^2 f_j, f_j \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dx} f_j, \frac{d}{dx} f_j \right\rangle + \omega \langle f_j, f_j \rangle - |g| \langle \phi_\omega^2, f_j^2 \rangle \\ &= \|f_j'\|^2 + \omega - |g| \langle \phi_\omega^2, f_j^2 \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle \leq M &\implies \|f_j'\|^2 + \omega - |g| \langle \phi_\omega^2, f_j^2 \rangle \leq M \\ &\implies \|f_j'\|^2 \leq M - \omega + |g| \langle \phi_\omega^2, f_j^2 \rangle \\ &\implies \|f_j'\|^2 \leq M_1 \end{aligned}$$

onde, $M_1 \in \mathbb{R}$ é uma nova constante de limitação que vale para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso, segue que a sequência (f_j) é uniformemente limitada em $H_{per}^1([0, L])$ e o item (a) fica provado.

Demonstração do item (b). Da limitação da sequência (f_j) , segue que existe uma subsequência de (f_j) , a qual denotaremos de mesma forma sem perda de generalidade, $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções de $H_{per}^1([0, L])$ que converge, fracamente, para uma função $f \in L^2([0, L])$, portanto, segue que $\langle f, \phi_\omega^3 \rangle = 0$. Com isso, o item (b) fica provado.

Demonstração do item (c). Vamos mostrar que $f \neq 0$. Primeiramente, note que a convergência fraca de f_j , permite mostrar que

$$\langle f_j^2, \phi_\omega^2 \rangle \rightarrow \langle f^2, \phi_\omega^2 \rangle,$$

se $j \rightarrow \infty$. De fato, como (f_j) é uniformemente limitada em $H^1([0, L])$, logo, a sequência $f_j^2 - f^2$ também o é. Então, de posse da imersão compacta $H_{per}^1 \hookrightarrow L^2([0, L])$ segue que

$$\langle f_j^2 - f^2, \phi_\omega^2 \rangle = \int_0^L \phi_\omega^2 (f_j^2 - f^2) dx \rightarrow 0,$$

quando $j \rightarrow \infty$, o que permite concluir que $\langle f_j^2, \phi_\omega^2 \rangle \rightarrow \langle f^2, \phi_\omega^2 \rangle$.

Agora, suponhamos por absurdo que $f = 0$. Sob essa hipótese, temos que

$$\langle f_j^2, \phi_\omega^2 \rangle \rightarrow \langle f, \phi_\omega^2 \rangle = \langle 0, \phi_\omega^2 \rangle = 0.$$

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$ dado existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j > j_0$ tem-se que

$$|g| \langle f_j^2, \phi_\omega^2 \rangle < \epsilon.$$

Por outro lado, também temos a hipótese de que $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle \rightarrow \beta$. Assim, temos que para o mesmo $\epsilon > 0$ existe $j_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle \rightarrow \beta &\implies \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle - \beta < \epsilon \\ &\implies \int_0^L |f_j'|^2 dx + \omega \int_0^L f_j^2 dx - |g| \int_0^L \phi_\omega^2 f_j^2 dx - \beta < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $j > j_1$. Do Teorema 3.8 temos que $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$, logo vale a seguinte desigualdade

$$0 < \omega < \int_0^L |f_j'|^2 dx + \omega \int_0^L f_j^2 dx < \epsilon + \beta + |g| \int_0^L \phi_\omega^2 f_j^2 dx \leq \epsilon + |g| \int_0^L \phi_\omega^2 f_j^2 dx,$$

para todo $j > j_1$. Então, tomando $j > \max\{j_0, j_1\}$, obtemos

$$0 < \omega < 2\epsilon,$$

em virtude da hipótese de convergência sobre $\int_0^L \phi_\omega^2 f_j^2 dx$. Logo, da arbitrariedade de $\epsilon > 0$, segue que $\omega = 0$ o que é um absurdo em virtude do Teorema 3.8, consequentemente, obtemos que $f \neq 0$. Assim, a demonstração do item (c) é concluída.

Demonstração do item (d). Agora, mostraremos que $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle = 0$ e que $\|f\| = 1$. Da convergência fraca $f_j \rightharpoonup f$ em $H^1([0, L])$ temos o seguinte

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle &\leq \inf \|f'\|^2 + \omega \|f\|^2 - |g| \langle \phi_\omega^2 f, f \rangle \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_j'\|^2 + \omega \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_j\|^2 - |g| \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \phi_\omega^2, f_j^2 \rangle \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle = \beta \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 \leq \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f_j, f_j \rangle = \beta = 0,$$

e disso, segue que $\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle = 0$. Com isso, resta provar que $\|f\| = 1$. Com efeito, é trivial ver que $\|f\| \leq 1$ em virtude de $\|f\| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_j\| = 1$. Então, veja que

$$\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle = \|f\|^2 \left\langle \mathcal{L}_{dn}^+ \frac{f}{\|f\|}, \frac{f}{\|f\|} \right\rangle = 0,$$

e, dado que o operador \mathcal{L}_{dn}^+ é linear, segue que $\left\langle \mathcal{L}_{dn}^+ \frac{f}{\|f\|}, \frac{f}{\|f\|} \right\rangle = 0$. Logo, podemos considerar $\|f\| = 1$, sem perda de generalidade. Com isso, o ínfimo é atingido para a função f e o item (d) do teorema fica provado.

Demonstração do Teorema 4.2. Agora, podemos, enfim, provar que a suposição de que $\beta = 0$ é um absurdo. Dos itens (a), (b), (c) e (d), bem como, da teoria dos Multiplicadores de Lagrange temos que existe um par $(\lambda, \eta) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathcal{L}_{dn}^+ f = \lambda f + \eta \phi_\omega^3.$$

Então, tomando o produto interno de $\mathcal{L}_{dn}^+ f$ com f , temos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, f \rangle &= \langle \lambda f + \eta \phi_\omega^3, f \rangle \\ &= \lambda \|f\|^2 + \eta \langle \phi_\omega^3, f \rangle \\ &= \lambda \|f\|^2 \iff \lambda = 0. \end{aligned}$$

Agora, façamos o produto interno de ϕ_ω com $\mathcal{L}_{dn}^+ f$. Mas primeiramente, note que do fato do operador \mathcal{L}_{dn}^+ ser autoadjunto, temos o seguinte

$$\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, \phi_\omega \rangle = \langle f, \mathcal{L}_{dn}^+ \phi_\omega \rangle$$

e, tendo em vista que o núcleo de \mathcal{L}_{dn}^+ é gerado por ϕ_ω , temos que

$$\langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, \phi_\omega \rangle = \langle f, \mathcal{L}_{dn}^+ \phi_\omega \rangle = 0.$$

Consequentemente, teremos o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, \mathcal{L}_{dn}^+ \phi_\omega \rangle &= \langle \mathcal{L}_{dn}^+ f, \phi_\omega \rangle \\ &= \langle \eta \phi_\omega^3, \phi_\omega \rangle \\ &= \eta \langle \phi_\omega^3, \phi_\omega \rangle \iff \eta = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\mathcal{L}_{dn}^+ f = 0 \implies \mathcal{L}_{dn}^+ f = 0 \cdot f,$$

ou seja, 0 é um autovalor associado a autofunção f . Entretanto, sabemos que o núcleo de \mathcal{L}_{dn}^+ é o espaço gerado por ϕ_ω , conseqüentemente, f deve ser linearmente dependente com ϕ_ω , i.e. $f = k\phi_\omega$ com $k \in \mathbb{R}^*$. Mas, do item (b) temos que, f é ortogonal a ϕ_ω^3 , pois $\langle f, \phi_\omega^3 \rangle = 0 \implies f \perp \phi_\omega^3 \implies k\phi_\omega \perp \phi_\omega^3$. No entanto isso é um absurdo, pois veja que

$$0 = \langle f, \phi_\omega^3 \rangle = \langle k\phi_\omega, \phi_\omega^3 \rangle = k \int_0^L \phi_\omega^4, \quad (4.15)$$

ou seja, teríamos que $\phi_\omega^4 = 0$, o que é um absurdo. Por conseguinte, temos uma contradição que vem da suposição de que $\beta = 0$, logo fica provado que $\beta > 0$.

Agora, vamos estudar o espectro do operador \mathcal{L}_{dn} .

Teorema 4.3. *O operador \mathcal{L}_{dn} , para $g \in \mathbb{R}$, dado em (4.9), tem exatamente um autovalor negativo o qual é simples; zero é um autovalor simples com autofunção ϕ' . Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

Demonstração. O operador linear $\mathcal{L}_{dn} : H_{\text{per}}^2([0, L]) \rightarrow L_{\text{per}}^2([0, L])$ é um operador de Hill, autoadjunto, com domínio denso em $L_{\text{per}}^2([0, L])$. Pelo Teorema da Oscilação (2.14), o conjunto dos autovalores do operador \mathcal{L}_{dn} é infinito, todos seus elementos são reais e os seus autovalores satisfazem as seguintes desigualdades

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \dots,$$

onde a igualdade $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$ é associado a autovalores duplos. Ademais, vemos que 0 é um autovalor de \mathcal{L}_{dn} associado a autofunção ϕ'_ω , basta considerar (4.11).

Então, de posse do Teorema (2.23), conclui-se que a família de operadores lineares $\{\mathcal{L}_{dn}\}$ é isoinercial. Portanto, as propriedades espectrais do operador \mathcal{L}_{dn} ficam definidas para um ω_0 fixado.

Agora, seguindo a nova Teoria Floquet, vamos resolver o PVI auxiliar a seguir

$$\begin{cases} -y'' + (\omega - 3|g|\phi_\omega^2)y = 0 \\ y(0) = -\frac{1}{\phi_\omega''(0)} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

posteriormente, mostraremos que a constante θ dada em (2.27)

$$\theta = \frac{y'(L)}{\phi_\omega''(0)}$$

onde L é o período da solução dnoidal ϕ_ω , é estritamente negativa.

Com a finalidade de garantirmos a máxima generalidade do resultado para o operador \mathcal{L}_{dn} , devemos mostrar que a constante θ é estritamente negativa, para todo valor de $g < 0$. Tendo isso em vista, primeiro nos ateremos ao caso particular $|g| = 1$. Isto é, estudaremos o seguinte operador

$$\mathcal{L}_{dn_1} \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3\phi_{\omega_1}^2, \quad (4.17)$$

onde ϕ_{ω_1} é a solução dnoidal para $|g| = 1$. Para esse caso, a solução dnoidal ϕ_{ω_1} e o período L são dados por:

$$\phi_{\omega_1}(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}} \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}} x, k \right) \quad (4.18)$$

$$L = 2\sqrt{\frac{2-k^2}{\omega}} K(k). \quad (4.19)$$

Ademais, o PVI (4.16) para esse caso fica dado da seguinte forma

$$\begin{cases} -y_1'' + (\omega - 3\phi_{\omega_1}^2)y_1 = 0 \\ y_1(0) = -\frac{1}{\phi_{\omega_1}''(0)} \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Com efeito, para resolvermos o PVI (4.20) e determinarmos θ , devemos empregar algum método numérico. Em particular, empregamos o método de Rugen-Kutta de quarta ordem, o qual foi implementado com a linguagem de programação Python 3.10.2.

Nesse sentido, descreveremos as ideias gerais para implementação do método. Com efeito, consideramos o PVI (4.20) façamos a mudança de variável $u = y'$, de modo a termos o seguinte PVI associado a um sistema de EDOs

$$\begin{cases} y_1' = u \\ u' = (\omega - 3\phi_{\omega_1}^2)y_1 \\ y_1(0) = -\frac{1}{\phi_{\omega_1}''(0)} \\ u(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Agora veja que, uma vez que o operador \mathcal{L}_{dn} é isonercial em k , segue que os parâmetros ω e k são livres e sua escolha fica determinada a nosso critério. Nesse sentido, adotamos a seguinte estratégia para a construção do algoritimo

1° Escolhemos os valores de ω e k e os deixamos fixados.

2° Determinamos o valor do período L , associado a onda dnoidal ϕ_ω , usando a equação (3.70).

3° Calculamos os valores de $\phi'_{\omega_1}(0)$ e $\phi''_{\omega_1}(0) = \phi''_{\omega_1}(L)$, para ter-se as condições iniciais do PVI (4.20)

4° Usando o método de Rugen-Kutta de quarta ordem resolvemos o PVI (4.20) e determinamos os valores de x , tais que $x - L \approx 0.001$.

5° Por fim, determinamos a constante θ_1 , dada por

$$\theta_1 = \frac{y'_1(L)}{\phi''_{\omega_1}(0)}.$$

Essa implementação pode ser acessada em <https://colab.research.google.com/drive/1KnRoUSDTtoEJ4RAvRNC2EzJbdq9b9pih?usp=sharing>, ou vista no apêndice B. Com isso, obtivemos a seguinte tabela inicial de dados

k	ω	η_2	L	$\phi_{\omega_1}(0)$	$\phi''_{\omega_1}(0)$	$y_1(0) = y_1(L)$	$y'_1(L)$	θ
0.5	1.0	0.926	4.4601	1.069	-0.1527	6.5479	0.5217	-3.4161

Tabela 4.1 – Tabela com valores dos termos para o cálculo da constante θ com $|g| = 1$.

Tendo em vista que a constante θ_1 é estritamente negativa, o resultado desejado segue para o operador \mathcal{L}_{dn_1} . Agora, vamos estender esse resultado para o operador \mathcal{L}_{dn} . De início, veja que o período L dado em (3.70), para k e ω fixados, não depende explicitamente de $|g|$, basta levar (3.71) em (3.69). Assim o período L para as ondas dnoidais ϕ_{ω_1} e ϕ_{ω} é o mesmo.

Ademais, para esse operador teremos que resolver o PVI auxiliar dado em (4.16). No entanto, veja que a solução $y(x) = \sqrt{|g|}y_1(x)$, onde $y_1(x)$ é a solução do PVI (4.20), resolve o PVI (4.16). De fato veja que

$$\begin{aligned} -y'' + (\omega - 3|g|\phi_{\omega}^2)y &= -(\sqrt{|g|}y_1)'' + \left(\omega - 3|g|\frac{2\omega}{|g|(2-k^2)}dn^2\left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}x, k\right) \right) \sqrt{|g|}y_1 \\ &= -\sqrt{|g|}y_1'' + \left(\omega - 3\frac{2\omega}{(2-k^2)}dn^2\left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}x, k\right) \right) \sqrt{|g|}y_1 \\ &= -\sqrt{|g|}((-y_1'' + (\omega - 3\phi_{\omega_1}^2)y_1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mostraremos, agora que $y(x)$ também satisfaz as condições iniciais. Com efeito, veja que

$$\phi''_{\omega}(x) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \phi''_{\omega_1}(x) \implies \phi''_{\omega}(0) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \phi''_{\omega_1}(0) \quad (4.22)$$

e a condição inicial para $y(0)$ pode ser escrita como

$$y(0) = -\frac{1}{\phi''_{\omega}(0)} = -\frac{\sqrt{|g|}}{\phi''_{\omega_1}(0)} = \sqrt{|g|}y_1(0) \quad (4.23)$$

e é evidente que $y'(0) = \sqrt{|g|}y_1'(0) = 0$. Então, tendo em mãos o fato de que \mathcal{L}_{dn} é isonercial em ω , podemos determinar a constante θ da seguinte forma

$$\theta = \frac{y'(L)}{\phi''_{\omega}(0)}. \quad (4.24)$$

Todavia, tendo em vista que $y(x) = \sqrt{|g|}y_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\theta = \frac{y'(L)}{\phi''_{\omega}(0)} = \frac{\sqrt{|g|}y_1'(L)}{\frac{\phi''_{\omega_1}(0)}{\sqrt{|g|}}} = |g| \frac{y_1'(L)}{\phi''_{\omega_1}(0)} = |g|\theta_1, \quad (4.25)$$

e uma vez que $|g| > 0$, segue que $\theta < 0$. Com isso, obtemos o resultado desejado para o operador \mathcal{L}_{dn} .

Portanto, com o resultado da Tabela (4.1), e fórmula (4.25) segue do Teorema 2.22 que o autovalor λ_1 do operador \mathcal{L}_{dn} , é zero, i.e. $\lambda_1 = 0$. Portanto 0 é um autovalor simples e esse operador apresenta um único autovalor estritamente negativo que também é simples. Além disso, desde que a família de operadores $\{\mathcal{L}_{dn}\}$ seja isoinercial, segue que, independentemente dos valores de $\omega \in \mathbb{R}$, 0 é um autovalor simples e há um único autovalor estritamente negativo, que também é simples. Com isso, o Teorema fica demonstrado. ■

Por fim, vamos estabelecer um resultado de positividade para o operador \mathcal{L}_{dn} análogo ao Teorema 4.2, desta vez, para o operador \mathcal{L}_{dn} .

Teorema 4.4. *Seja ϕ_{ω} a solução da onda dnoidal obtida pelo Teorema 3.8 e $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$. Então, o operador linear $\mathcal{L}_{dn} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3|g|\phi_{\omega}^2$ satisfaz*

- (a) $\inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle : u \in H_{per}^1([0, L]), \|u\| = 1, \langle u, \phi_{\omega} \rangle = 0 \right\} \equiv \gamma = 0,$
- (b) $\inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{dn}v, v \rangle : v \in H_{per}^1([0, L]), \|v\| = 1, \langle v, \phi_{\omega} \rangle = 0, \langle v, \phi_{\omega}^2 \phi'_{\omega} \rangle = 0 \right\} \equiv \xi > 0.$

Demonstração. **Demonstração do item (a).**

A demonstração é essencialmente similar ao Teorema 4.2. No entanto, vamos dividir o item (a) em três partes, sendo essas

- Na parte 1 do item (a), vamos mostrar que $\gamma \leq 0$,
- Na parte 2 do item (a), vamos mostrar que
 - Existe uma subsequência (u_j) de mesmo nome de uma sequência $(u_j) \equiv (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^1([0, L])$, tal que u_j converge fracamente para $u \in L^2([0, L])$ e vale $\langle u, \phi_{\omega} \rangle = 0$.

- O limite da sequência (u_j) é uma função $u \neq 0$.
- Temos que $\langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle = \gamma$ e que $\|u\| = 1$. Conseqüentemente, o ínfimo do conjunto

$$\left\{ \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle : u \in H_{per}^1([0, L]), \|u\| = 1, \langle u, \phi_\omega \rangle = 0 \right\},$$

é atingindo para u .

- Na parte 3 do item (a), vamos mostrar que $\gamma \geq 0$.

Ao fim, obteremos o resultado desejado para o item (a) como um todo.

Parte 1 do item (a). Primeiramente, veja que a onda dnoidal ϕ_ω é L -periódica e limitada. De fato, tomando uma função $u \in H_{per}^1([0, L])$, com $\|u\| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle &= \langle -u'' + \omega u - 3|g|\phi_\omega^2 u, u \rangle \\ &= \|u'\|^2 + \omega - 3|g| \langle \phi_\omega^2, u^2 \rangle \\ &\geq -3|g| \langle \phi_\omega^2, u^2 \rangle \\ &\geq -\|\phi_\omega^2\|_\infty, \end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma do supremo e vale para toda $u \in H_{per}^1([0, L])$. Veja, que $\langle \phi'_\omega, \phi_\omega \rangle = 0$, de fato

$$\begin{aligned} \langle \phi'_\omega, \phi_\omega \rangle = \int_0^L \phi'_\omega \phi_\omega dx &\implies \int_0^L \phi'_\omega \phi_\omega dx = \phi_\omega \phi_\omega \Big|_0^L - \int_0^L \phi_\omega \phi'_\omega dx \\ &\implies \int_0^L \phi'_\omega \phi_\omega dx = - \int_0^L \phi_\omega \phi'_\omega dx \\ &\implies \int_0^L \phi'_\omega \phi_\omega dx = 0 \\ &\implies \langle \phi'_\omega, \phi_\omega \rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

além de que, por (4.11) temos que $\mathcal{L}_{dn}\phi'_\omega = 0$. Então, combinando (4.11), (4.26) e (4.27) obtemos que $\gamma \leq 0$. Assim, a primeira parte fica provada.

Parte 2 do item (a). Consideremos uma sequência $(u_j) \subset H_{per}^1([0, L])$, tal que $\|u_j\| = 1$, $(u_j, \phi_\omega) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e $\langle \mathcal{L}_{dn}u_j, u_j \rangle \rightarrow \gamma$, quando $j \rightarrow \infty$. Em virtude da convergência da sequência $\langle \mathcal{L}_{dn}u_j, u_j \rangle$, temos que ela é limitada, ou seja, existe $M_2 \in \mathbb{R}$, tal que $\langle \mathcal{L}_{dn}u_j, u_j \rangle \leq M_2$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, do produto interno $\langle \mathcal{L}_{dn}u_j, u_j \rangle$,

temos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{dn} u_j, u_j \rangle &= \left\langle \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3|g|\phi_\omega^2 \right) u_j, u_j \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{d^2}{dx^2} u_j, u_j \right\rangle + \omega \langle u_j, u_j \rangle - 3|g| \langle \phi_\omega^2 u_j, u_j \rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dx} u_j, \frac{d}{dx} u_j \right\rangle + \omega \langle u_j, u_j \rangle - 3|g| \langle \phi_\omega^2, u_j^2 \rangle \\
&= \|u_j'\|^2 + \omega - 3|g| \langle \phi_\omega^2, u_j^2 \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{dn} u_j, u_j \rangle \leq M_2 &\implies \|u_j'\|^2 + \omega - 3|g| \langle \phi_\omega^2, u_j^2 \rangle \leq M_2 \\
&\implies \|u_j'\|^2 \leq M - \omega + 3|g| \langle \phi_\omega^2, u_j^2 \rangle \\
&\implies \|u_j'\|^2 \leq M_3
\end{aligned}$$

onde, $M_3 \in \mathbb{R}$ é uma nova constante de limitação, que vale para todo $j \in \mathbb{N}$.

Com isso, segue que a sequência (u_j) é uniformemente limitada em $H_{per}^1([0, L])$ e, portanto, existe $u \in H_{per}^1([0, L])$ e uma subsequência, que vamos denotar de igual modo por simplicidade, tal que u_j converge fracamente para $u \in L_{per}^2([0, L])$. Além disso, segue da convergência fraca que $\langle u, \phi_\omega \rangle = 0$.

Analogamente ao desenvolvimento feito na prova do Teorema [4.2](#) é possível obter $u \neq 0$. As ideias são similares e diferem, em linhas gerais, pelo fato do 3 que aparece no último termo do operador \mathcal{L}_{dn} . Assim, podemos garantir a validade dos seguintes resultados

- $\langle u_j^2, \phi_\omega^2 \rangle \rightarrow \langle u^2, \phi_\omega^2 \rangle$ para $j \rightarrow \infty$.
- $u \neq 0$.

Agora, vamos provar que $\langle \mathcal{L}_{dn} u, u \rangle = \gamma$ e que $\|u\| = 1$. Da convergência fraca $u_j \rightharpoonup u$ em $L^2([0, L])$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\gamma \leq \langle \mathcal{L}_{dn} u, u \rangle &= \|u'\|^2 + \omega \|u\|^2 - 3|g| \langle \phi_\omega^2 u, u \rangle \\
&\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_j'\|^2 + \omega \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|^2 - 3|g| \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \phi_\omega^2, u_j^2 \rangle \\
&\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{L}_{dn} u_j, u_j \rangle = \gamma,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma \leq \langle \mathcal{L}_{dn} u, u \rangle \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{L}_{dn} u_j, u_j \rangle = \gamma,$$

e disso, segue que $\langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle = \gamma$. Logo, resta provarmos que $\|u\| = 1$. Primeiro vejamos que $\|u\| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_j\| = 1$, ou seja, $\|u\| \leq 1$. Suponhamos, por absurdo, que $\|u\| < 1$, deste modo

$$\|u\| < 1 \implies \gamma = \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle < \frac{1}{\|u\|^2} \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle = \left\langle \mathcal{L}_{dn} \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle,$$

ou seja, podemos escrever

$$\|u\|^2 \gamma < \|u\|^2 \left\langle \mathcal{L}_{dn} \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle = \gamma.$$

Portanto, nos resta estudar a seguinte desigualdade

$$\|u\|^2 \gamma < \gamma, \quad \text{ou ainda} \quad 0 < \gamma(1 - \|u\|^2). \quad (4.28)$$

Pela parte 1 da demonstração vemos que $\gamma \leq 0$. Consequentemente, devemos considerar dois casos $\gamma = 0$, ou $\gamma < 0$, os quais nos fornecem

- (i) se $\gamma = 0$, então o desenvolvimento segue as linhas do Teorema 4.2. Portanto, podemos considerar $\|u\| = 1$,
- (ii) se $\gamma < 0$, então temos que $\|u\|^2 > 1$, que contradiz a hipótese de que $\|u\| < 1$. Portanto, devemos ter que $\|u\| = 1$.

Com isso, fica provado que $\|u\| = 1$ e, por conseguinte, o ínfimo do conjunto

$$\left\{ \langle \mathcal{L}_{dn}u, u \rangle : u \in H_{per}^1([0, L]), \|u\| = 1, \langle u, \phi_\omega \rangle = 0 \right\}$$

é atingido em u . Assim, a parte 2 do item (a) fica provada.

Parte 3 da demonstração do item (a)

Provemos agora que $\gamma \geq 0$. Para isso, empregaremos o Lema de Weinstein 2.2 fazendo com $A = \mathcal{L}_{dn}$, $R = \phi_\omega$ e $\tau = \gamma$. De fato, o operador \mathcal{L}_{dn} é um operador de Hill, autoadjunto e com domínio denso em $\mathcal{L}_{per}^2([0, L]) \subset L^2(\mathbb{R})$ e do Teorema 4.3 segue que o operador \mathcal{L}_{dn} tem exatamente um único autovalor negativo simples. Logo, \mathcal{L}_{dn} satisfaz todas as propriedades espectrais para o emprego do Weinstein.

Então, resta obter uma função $\chi \in L_{per}^2([0, L])$ de modo que $\mathcal{L}_{dn}\chi = \phi_\omega$. De fato, segue do Teorema 3.8 que a função ϕ_ω pode ser construída suavemente em termos do parâmetro $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$, portanto, podemos derivar a EDO (3.65) em relação a ω ,

$$\left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} \right]'' + 3|g|\phi_\omega^2 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} - \omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} - \phi_\omega = 0. \quad (4.29)$$

Logo,

$$\mathcal{L}_{dn} \left(-\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} \right) = \phi_\omega. \quad (4.30)$$

Agora, veja que de (4.11), temos que o núcleo do operador \mathcal{L}_{dn} é o espaço gerado por ϕ'_ω , i.e. $\text{Ker}(\mathcal{L}_{dn}) = [\phi'_\omega]$. Além disso, como $H^1_{per}([0, L])$ é um espaço de Hilbert, podemos escrever $H^1_{per}([0, L])$ como soma direta de um subespaço com seu complemento ortogonal, ou seja, $H^1_{per}([0, L]) = [\phi'_\omega] \oplus [\phi'_\omega]^\perp$. Com isso, a restrição do operador \mathcal{L}_{dn} ao subespaço $[\phi'_\omega]^\perp$, $\mathcal{L}_{dn} : [\phi'_\omega]^\perp \rightarrow [\phi'_\omega]^\perp$, é invertível e, portanto, de (4.30) podemos escrever

$$\mathcal{L}_{dn}^{-1} \phi_\omega = -\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}, \quad (4.31)$$

ou seja, a função χ procurada é $\chi = -\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}$. Com isso, para mostrarmos que $\gamma \geq 0$ resta verificarmos que

$$\langle \mathcal{L}_{dn}^{-1} \phi_\omega, \phi_\omega \rangle \leq 0, \quad (4.32)$$

que é a última condição para o uso do Lema de Weinstein. Com efeito, veja que o produto interno da expressão (4.32) nos resulta que

$$\langle \mathcal{L}_{dn}^{-1} \phi_\omega, \phi_\omega \rangle = \left\langle -\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}, \phi_\omega \right\rangle = -\int_0^L \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} \phi_\omega dx = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^L \phi_\omega^2 dx,$$

assim, verificar que (4.32) é satisfeita passa a ser equivalente a verificar que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^L \phi_\omega^2 dx \geq 0. \quad (4.33)$$

Para tanto, vamos multiplicar (4.29) por $-\phi_\omega$, integrar por partes em $[0, L]$, usar as condições de contorno periódicas para ϕ_ω e a igualdade (3.65), de modo a obtermos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L -\phi_\omega \left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} \right]'' - 3|g|\phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \omega \phi_\omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \phi_\omega^2 dx \\ &= -\phi_\omega \left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} \right]' \Big|_0^L + \phi'_\omega \left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} \right] \Big|_0^L + \int_0^L -\phi_\omega'' \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \omega \phi_\omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \phi_\omega^2 - 3|g|\phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx \\ &= \int_0^L -\phi_\omega'' \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \omega \phi_\omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \phi_\omega^2 - 3|g|\phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx \\ &= \int_0^L -\phi_\omega'' \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \omega \phi_\omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} + \phi_\omega^2 - |g|\phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} - 2|g|\phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx \\ &= \int_0^L \phi_\omega^2 - 2|g|\phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^L \phi_\omega^2 dx = 2|g| \int_0^L \phi_\omega^3 \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx. \quad (4.34)$$

Por outro lado, da quadratura (3.51), com $|2m| = |\hbar| = 1$, temos que

$$(\phi'_\omega)^2 = \omega\phi_\omega^2 - \frac{|g|}{2}\phi_\omega^4, \quad (4.35)$$

daí, multiplicando (3.65) por ϕ_ω , integrando por partes em $[0, L]$, impondo as condições de contorno periódicas de ϕ_ω e usando (4.35), obtemos o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L -\phi''_\omega\phi_\omega + \omega\phi_\omega^2 - |g|\phi_\omega^4 dx \\ &= -\phi_\omega\phi'_\omega|_0^L + \int_0^L (\phi'_\omega)^2 + \omega\phi_\omega^2 - |g|\phi_\omega^4 dx \\ &= \int_0^L (\phi'_\omega)^2 + \omega\phi_\omega^2 - |g|\phi_\omega^4 dx \\ &= \int_0^L \omega\phi_\omega^2 - \frac{|g|}{2}\phi_\omega^4 + \omega\phi_\omega^2 - |g|\phi_\omega^4 dx = \int_0^L 2\omega\phi_\omega^2 - \frac{3}{2}|g|\phi_\omega^4 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^L 2\omega\phi_\omega^2 dx = \frac{3}{2}|g| \int_0^L \phi_\omega^4 dx. \quad (4.36)$$

Derivando a expressão (4.36) em ω e usando (4.34), temos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\int_0^L 2\omega\phi_\omega^2 dx \right) &= \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{3}{2}|g| \int_0^L \phi_\omega^4 dx \right) \implies 2 \int_0^L \phi_\omega^2 + \omega \frac{\partial\phi_\omega^2}{\partial\omega} dx = 6|g| \int_0^L \phi_\omega^3 \frac{\partial\phi_\omega}{\partial\omega} dx \\ &\implies \int_0^L \phi_\omega^2 + \omega \frac{\partial\phi_\omega^2}{\partial\omega} dx = 3|g| \left(\frac{1}{2|g|} \int_0^L \phi_\omega^2 dx \right) \\ &\implies \omega \frac{\partial}{\partial\omega} \int_0^L \phi_\omega^2 dx = \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \int_0^L \phi_\omega^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, o produto interno desejado fica dado por

$$\langle \mathcal{L}_{dn}^{-1}\phi_\omega, \phi_\omega \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\omega} \int_0^L \phi_\omega^2 dx = -\frac{1}{4\omega} \int_0^L \phi_\omega^2 dx.$$

Em virtude de que $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$ segue do Lema de Weinstein 2.2 que $\gamma \geq 0$. Por conseguinte, sob essa condição, bem como da demonstração da parte 1 segue que $\gamma = 0$ e o resultado do item (a) fica completamente provado.

Demonstração do item (b). O resultado provado no item (a), em especial a parte 1, garante que $\xi \geq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $\xi = 0$. Nessas condições, o desenvolvimento da prova é análogo ao feito no Teorema 4.2 ou mesmo na parte (a) anterior. Com isso, os seguintes resultados podem ser assegurados

- Existe $v \in H_{per}^1([0, L])$, tal que $\|v\| = 1$,
- $\langle v, \phi_\omega \rangle = 0$,
- $\langle v, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle = 0$,

- $\langle \mathcal{L}_{dn}v, v \rangle = 0$,
- O ínfimo ξ é atingido em v .

Conseqüentemente, resta obter uma contradição sob a hipótese de que $\xi = 0$. Para isso, empregaremos a teoria dos Multiplicadores de Lagrange, a qual garante a existência de $(\lambda, \vartheta, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\mathcal{L}_{dn}v = \lambda v + \vartheta \phi_\omega + \mu \phi_\omega^2 \phi'_\omega.$$

Daí, fazendo o produto interno de $\mathcal{L}_{dn}v$ com v , obtemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathcal{L}_{dn}v, v \rangle &= \langle \lambda v + \vartheta \phi_\omega + \mu \phi_\omega^2 \phi'_\omega, v \rangle \\ &= \lambda \|v\|^2 + \vartheta \langle \phi_\omega, v \rangle + \mu \langle \phi_\omega^2 \phi'_\omega, v \rangle \\ &= \lambda \|v\|^2 \iff \lambda = 0. \end{aligned}$$

Agora, façamos o produto interno de $\mathcal{L}_{dn}v$ com ϕ'_ω . Usando o fato do operador \mathcal{L}_{dn} ser autoadjunto, $\mathcal{L}_{dn}\phi'_\omega = 0$, e a igualdade (4.27), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, \mathcal{L}_{dn}\phi'_\omega \rangle &= \langle \mathcal{L}_{dn}v, \phi'_\omega \rangle \\ &= \langle \vartheta \phi_\omega + \mu \phi_\omega^2 \phi'_\omega, \phi'_\omega \rangle \\ &= \vartheta \langle \phi_\omega, \phi'_\omega \rangle + \mu \langle \phi_\omega^2 \phi'_\omega, \phi'_\omega \rangle \\ &= \mu \langle \phi_\omega^2 \phi'_\omega, \phi'_\omega \rangle \iff \mu = 0. \end{aligned}$$

Logo, como $\lambda = \mu = 0$, podemos concluir que

$$\mathcal{L}_{dn}v = \vartheta \phi_\omega.$$

Por outro lado, veja que a autofunção $\chi = -\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}$, obtida em (4.30), é tal que $\mathcal{L}_{dn}\chi = \phi_\omega$, então, usando a linearidade do operador \mathcal{L}_{dn} , podemos escrever

$$\mathcal{L}_{dn}(v - \vartheta \chi) = 0,$$

conseqüentemente, a função $v - \vartheta \chi$ pertence ao núcleo do operador \mathcal{L}_{dn} . Tendo em vista que o núcleo de \mathcal{L}_{dn} é o espaço gerado por ϕ'_ω , então, segue que existe $\sigma \in \mathbb{R}$ de modo que $v - \vartheta \chi = \sigma \phi'_\omega$. De posse disso, vamos calcular o produto interno de $v - \vartheta \chi$ com ϕ_ω , de fato

$$\sigma \langle \phi'_\omega, \phi_\omega \rangle = \langle v - \vartheta \chi, \phi_\omega \rangle = \langle v, \phi_\omega \rangle - \vartheta \langle \chi, \phi_\omega \rangle = -\vartheta \langle \chi, \phi_\omega \rangle,$$

onde usamos o fato de que $\langle v, \phi_\omega \rangle = 0$ e que $\langle \chi, \phi_\omega \rangle \neq 0$, para $|g| > \frac{2}{3}$. Mas note que anteriormente mostramos que $\langle \phi'_\omega, \phi_\omega \rangle = 0$, obtemos que

$$\vartheta \langle \chi, \phi_\omega \rangle = 0 \iff \vartheta = 0,$$

e, portanto, $\mathcal{L}_{dn}v = 0$.

Tendo em vista que o núcleo do operador \mathcal{L}_{dn} é o espaço gerado por ϕ'_ω , temos que v pode ser escrito como combinação linear desse vetor, i.e. $v = k\phi'_\omega$ para $k \neq 0$. Com isso, temos que

$$0 = \langle v, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle = k \langle \phi'_\omega, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle = k \langle (\phi'_\omega)^2, \phi_\omega^2 \rangle = k \|\phi'_\omega \phi_\omega\| \iff \|\phi'_\omega \phi_\omega\| = 0, \quad (4.37)$$

que é um absurdo, pois $\|\phi'_\omega \phi_\omega\| = 0$ se, e somente se, a função $\phi_\omega \phi'_\omega$ é identicamente nula. Em verdade, temos que $\|\phi'_\omega \phi_\omega\| > 0$, logo, segue que a suposição inicial de que $\xi = 0$ é falsa. Então, devemos ter que $\xi \neq 0$ e junto com o resultado anterior, segue que $\xi > 0$ e assim o resultado fica provado. ■

Com os Teoremas [4.2](#) e [4.4](#) em mão, temos as ferramentas necessárias para o estudo da estabilidade das soluções u de [\(3.1\)](#).

5 ESTABILIDADE

De posse dos resultados de boa colocação global, análise espectral e positividade dos operadores \mathcal{L}_{dn} e \mathcal{L}_{dn}^+ , mostraremos que as soluções periódicas $u(x, t)$ da NLSE são estáveis, para perturbações dos dados iniciais. Para isso, empregaremos o método clássico de Lyapunov e as quantidades conservadas (3.18) e (3.19), bem como o fato de que a NLSE é invariante sob translações e rotações, para mostrarmos que a órbita

$$\mathcal{O}_{\phi_\omega} = \{e^{i\varphi}\phi_\omega(\cdot + y, t); (y, \varphi) \in \mathbb{R}^2\} \quad (5.1)$$

gerada ϕ_ω é estável com respeito ao fluxo gerado pela equação de Schrödinger não linear.

Definição 5.1. Dizemos que a solução periódica da equação (3.1), é orbitalmente estável, em $H_{per}^1([0, L])$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta,$$

então a solução u da equação de Schrödinger não-linear (3.1), com dado inicial u_0 , satisfaz

$$\inf_{(y, \varphi) \in \mathbb{R}^2} \|u(t) - e^{i\varphi}\phi_\omega(\cdot + y)\|_1 < \varepsilon.$$

Agora, nosso objetivo será demonstrar que as soluções $u(t)$ são estáveis em $H_{per}^1([0, L])$, com respeito ao fluxo da NLSE. Para isso, vamos prosseguir com uma série de resultados auxiliares. Posteriormente, estabeleceremos a estabilidade de ϕ_ω em um conjunto particular sob a condição de pequenas perturbações. Em seguida, usando o mapa α obtido no Teorema 3.8 mostraremos que é possível estender a estabilidade de ϕ_ω para perturbações arbitrárias em todo $H_{per}^1([0, L])$.

Tendo isso em vista, vamos a algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 5.2. Para cada $y \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $t \in \mathbb{R}$, definamos

$$\Omega_t(y, \varphi) = \|u'(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega'\|^2 + \omega \|u(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega\|^2. \quad (5.2)$$

Então, a distância da solução $u \equiv u(t)$ do problema (3.1) até a órbita $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$, denotada por $\rho_\omega(\cdot, \cdot)$ é medida por

$$[\rho_\omega(u, \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 \equiv \inf_{(y, \varphi) \in [0, L] \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \varphi). \quad (5.3)$$

Observação 5.1. Note que o funcional $\Omega_t(y, \varphi)$ definido em (5.2) corresponde a uma seminorma que associa a solução dnoidal ϕ_ω com a solução $u(t)$ do problema de Cauchy. Mais que isso, os parâmetros y e φ correspondem as variáveis de translação e rotação da solução $u(t)$ em relação a solução dnoidal ϕ_ω . Nesse sentido, uma definição onde o termo $e^{i\varphi}$ esteja associado a ϕ_ω torna-se, essencialmente, análoga.

De posse do funcional $\Omega_t(y, \varphi)$, vamos mostrar que seu ínfimo é atingido em $(y(t), \varphi(t))$. Para isso, vamos demonstrar dois importantes lemas.

Lema 5.1. *Suponha que para algum $t \in [0, \infty)$ e algum (y_0, φ_0) , tenhamos*

$$\Omega_t((y_0, \varphi_0)) < \|\phi'_\omega\|^2 + \omega\|\phi_\omega\|^2. \quad (5.4)$$

Então, segue que

$$\inf\{\Omega_t((y, \varphi)|y \in [0, L], \varphi \in [0, 2\pi])\} \quad (5.5)$$

é atingido em \mathbb{R} .

Demonstração. Consideremos $u(t)$ uma solução do L -periódica do problema de Cauchy (3.1) com dado inicial u_0 e $v(x, t) = e^{i\omega t}\phi_\omega$ a solução associada a onda dnoidal. De posse disso, vamos calcular o limite do funcional $\Omega_t(y, \varphi)$ para quando $y \rightarrow L$, com efeito

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow L} \Omega_t(y, \varphi) &= \lim_{y \rightarrow L} \left[\|u'(x+y, t)e^{i\varphi} - \phi'_\omega\|^2 + \omega \|u(x+y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega\|^2 \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow L} \left[\|u'(x+y, t)e^{i\varphi}\|^2 + \|\phi'_\omega\|^2 - 2\|u'(x+y, t)e^{i\varphi}\phi'_\omega\| \right] + \\ &+ \lim_{y \rightarrow L} \left[\|u(x+y, t)e^{i\varphi}\|^2 + \|\phi_\omega\|^2 - 2\|u(x+y, t)e^{i\varphi}\phi_\omega\| \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow L} \left[\|u'(t)\|^2 + \|\phi'_\omega\|^2 - 2\|u'(x+y, t)\phi'_\omega\| \right] + \\ &+ \lim_{y \rightarrow L} \left[\|u(t)e^{i\varphi}\|^2 + \|\phi_\omega\|^2 - 2\|u(x+y, t)e^{i\varphi}\phi_\omega\| \right] + \\ &= \|u'(t)\|^2 + \|\phi'_\omega\|^2 + \omega\|u(t)\|^2 + \omega\|\phi_\omega\|^2 \\ &- \left[\lim_{y \rightarrow L} 2 \int_0^L \operatorname{Re}(u'(x+y, t)e^{i\varphi}\phi'_\omega)dx + \lim_{y \rightarrow L} 2 \int_0^L \operatorname{Re}(u(x+y, t)e^{i\varphi}\phi_\omega)dx \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Portanto, para obtermos o desejado, basta mostrar que o termo dos colchetes (5.6) é nulo. Primeiramente, mostraremos que

$$I_1 \equiv \lim_{y \rightarrow L} \int_0^L \operatorname{Re}(u'(x+y, t)e^{i\varphi}\phi'_\omega(x))dx$$

é zero. Explicitando a função $u(t) = e^{i\omega t}\phi$, integrando por partes e usando a periodicidade das funções u_0 e ϕ_ω temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{y \rightarrow L} \int_0^L \operatorname{Re}(\phi'(x+y)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi'_\omega(x))dx \\ &= \lim_{y \rightarrow L} \operatorname{Re}(\phi(x+y)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi'_\omega(x))\Big|_0^L - \lim_{y \rightarrow L} \int_0^L \operatorname{Re}(\phi(x+y)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi''_\omega(x))dx \\ &= \lim_{y \rightarrow L} \int_y^{L+y} \operatorname{Re}(u_0(x)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi''_\omega(x-y))dx, \end{aligned}$$

onde na última linha fizemos uma mudança de variáveis. Agora, note que como $|e^{i(\varphi+\omega t)}| = 1$, podemos escrever

$$-u_0(x)\phi''_{\omega}(x-y) \leq u_0(x)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi''_{\omega}(x-y) \leq u_0(x)\phi''_{\omega}(x-y). \quad (5.7)$$

Agora, vamos mostrar que a função $u_0(x)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi''_{\omega}(x-y)$ é integrável. Para isso, note que da desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \int_y^{L+y} |u_0(x)e^{i(\varphi+\omega t)}\phi''_{\omega}(x-y)|dx &\leq \int_y^{L+y} |u_0(x)\phi''_{\omega}(x-y)|dx \\ &\leq \left(\int_y^{L+y} |u_0|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_y^{L+y} |\phi''_{\omega}(x-y)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|u_0\| \|\phi''_{\omega}(\cdot - y)\| \end{aligned}$$

e, em virtude das funções u_0 e ϕ''_{ω} pertencerem a $L^2_{per}([0, L])$, segue que

$$\|u_0\| \|\phi''_{\omega}(\cdot - y)\| < \infty$$

e, logo, a integral acima é limitada. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos garantir tanto a integrabilidade da função desejada, quanto que

$$\lim_{y \rightarrow L} \int_0^L \operatorname{Re}(u'(x+y, t)e^{i\varphi}\phi'_{\omega}(x))dx = \lim_{y \rightarrow L} \int_y^{L+y} \operatorname{Re}(u_0(x)\phi''_{\omega}(x-y))dx, \quad (5.8)$$

em virtude da desigualdade (5.7).

Agora, veja que, como u_0 e ϕ_{ω} são duas funções L -periódicas, segue que o produto $u_0\phi_{\omega}$ também é uma função periódica. Todavia, o período fundamental do produto dessas funções é, um divisor do período L . Logo, esse produto também possui periodicidade em L , mas não periodicidade mínima. Considerando a função

$$\Phi(x) = \frac{d}{dx} (u_0(x)\phi''_{\omega}(x)),$$

podemos escrever

$$\lim_{y \rightarrow L} \int_y^{L+y} u_0(x)\phi''_{\omega}(x)dx = \Phi(2L) - \Phi(L) = 0$$

e, portanto

$$\lim_{y \rightarrow L} \int_0^L \operatorname{Re}(u'(x+y, t)e^{i\varphi}\phi'_{\omega}(x))dx = \lim_{y \rightarrow L} \int_y^{L+y} \operatorname{Re}(u_0(x)\phi''_{\omega}(x-y))dx = 0, \quad (5.9)$$

conforme desejado. Analogamente, podemos mostrar que

$$I_2 \equiv \lim_{y \rightarrow L} \int_0^L \operatorname{Re}(u(x+y, t)e^{i\varphi}\phi_{\omega})dx = 0. \quad (5.10)$$

Tendo em vista que os termos do colchetes em (5.6) são nulos, obtemos que

$$\lim_{y \rightarrow L} \Omega_t(y, \varphi) = \|u'(t)\|^2 + \|\phi'_{\omega}\|^2 + \|u(t)\|^2 + \|\phi_{\omega}\|^2.$$

Logo, existem $y_1, \varphi_1 \in \mathbb{R}$ e um retângulo R , definido por

$$R = \{(y, \varphi) \in [0, L] \times [0, 2\pi) \mid -y_1 \leq y \leq y_1, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1\}, \quad (5.11)$$

com $-y_1 < y_0 < y_1$ e $-\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_1$, tal que $\Omega_t|_R$ é contínua e, portanto, o ínfimo $\inf_{(y, \varphi) \in [0, L] \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \varphi) = \inf_{(y, \varphi) \in R} \Omega_t(y, \varphi)$ é atingido. Com isso, o lema fica demonstrado. ■

Agora, vamos mostrar que existe um intervalo $I = [0, T]$, tal que o ínfimo de $\Omega_t(y, \varphi)$ é atingido, para todo $t \in [0, T]$ em $(y(t), \varphi(t))$.

Lema 5.2. *Existe um intervalo temporal da forma $I = [0, T]$, onde o $\inf \Omega_t(y, \varphi)$ é atingido em $(y(t), \varphi(t))$, para todo $t \in [0, T]$.*

Demonstração. De início, consideremos $u(t) = e^{i\omega t}u_0(x)$ uma solução do problema de Cauchy (3.1), com dado inicial $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$, e $v(x, t) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ a solução associada a onda dnoidal. Segue da dependência contínua dos dados iniciais que para $\varepsilon > 0$ arbitrário, é possível obter $\delta > 0$, de modo que

$$\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta, \quad (5.12)$$

então

$$\|u(t) - e^{i\omega t}\phi_\omega\|_1 < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (5.13)$$

Logo, se $t \in [0, T]$, então

$$\begin{aligned} \Omega_t(y, \omega t) &= \|u'(\cdot + y, t)e^{i\omega t} - \phi'_\omega\|^2 + \omega \|u(\cdot + y, t)e^{i\omega t} - \phi_\omega\|^2 \\ &\leq \max\{1, \omega\} \|u(\cdot + y, t)e^{i\omega t} - \phi_\omega\|_1^2 \\ &\leq \max\{1, \omega\} \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε , podemos escolher $\varepsilon > 0$, tal que

$$\varepsilon^2 < \frac{\|\phi'_\omega\|^2 + \omega \|\phi_\omega\|^2}{\max\{1, \omega\}}. \quad (5.14)$$

Portanto, segue do Lema 5.1, que o ínfimo de $\Omega_t(y, \varphi)$ será atingido em $(y(t), \varphi(t))$, com $t \in [0, T]$. Com isso, o lema fica provado. ■

Com o Lema 5.2, temos que existe $T > 0$, de modo que o $\inf \Omega_t(y, \varphi)$ é atingido em $(y, \varphi) = (y(t), \varphi(t)), \forall t \in [0, T]$. Assim, podemos escrever

$$[\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 = \Omega_t(y(t), \varphi(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.15)$$

Agora, vamos considerar uma perturbação na onda viajante ϕ_ω do seguinte modo

$$u(x + y, t)e^{i\varphi} \equiv \phi_\omega(x) + z(x, t); \quad \text{com } z = p(x, t) + iq(x, t) \quad (5.16)$$

para $t \in [0, T]$ e $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ determinados por (5.15) e, por simplicidade, vamos por $p \equiv p(x, t)$ e $q \equiv q(x, t)$. Agora, vamos enunciar o resultado sobre as relações de compatibilidade entre p e q .

Lema 5.3. *O par (p, q) satisfaz a seguinte relação de compatibilidade*

$$\begin{cases} \int_0^L \phi_\omega^2 \phi_\omega' p(x, t) dx = 0 \\ \int_0^L \phi_\omega^3 q(x, t) dx = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (5.17)$$

Demonstração. Com efeito, vamos escrever a solução $u \in \mathbb{C}$ como, $u(t) = a + bi$ em que as funções $a \equiv a(x, t)$ e $b \equiv b(x, t)$ são ambas reais. Além disso, para $t > 0$ obtemos que

$$\Omega(y, \varphi) \equiv \int_0^L |u' - \phi_\omega'|^2 dx + \int_0^L |u - \phi_\omega|^2 dx \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^L (a'e^{i\varphi} + ib'e^{i\varphi} - \phi_\omega') (a'e^{-i\varphi} - ib'e^{-i\varphi} - \phi_\omega') dx + \\ &+ \omega \int_0^L (ae^{i\varphi} + ibe^{i\varphi} - \phi_\omega) (ae^{-i\varphi} - ibe^{-i\varphi} - \phi_\omega) dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Vamos derivar a igualdade (5.19) em relação a φ . Com efeito, temos o

$$\begin{aligned} \Omega_\varphi &= \int_0^L (ia'e^{i\varphi} - b'e^{i\varphi}) (a'e^{-i\varphi} - ib'e^{-i\varphi} - \phi_\omega') + (a'e^{i\varphi} + ib'e^{i\varphi} - \phi_\omega') (-ia'e^{-i\varphi} - b'e^{-i\varphi}) dx \\ &+ \omega \left[\int_0^L (iae^{i\varphi} - be^{i\varphi}) (ae^{-i\varphi} - ibe^{-i\varphi} - \phi_\omega) + (ae^{i\varphi} + ibe^{i\varphi} - \phi_\omega) (-iae^{-i\varphi} - be^{-i\varphi}) dx \right], \end{aligned}$$

agora, vamos desenvolver o produto dos parênteses acima. Para a integral sem o fator ω temos

$$\begin{aligned} (ia'e^{i\varphi} - b'e^{i\varphi}) (a'e^{-i\varphi} - ib'e^{-i\varphi} - \phi_\omega') &= ia'^2 + b'a' - ia'e^{i\varphi}\phi_\omega' - b'a' + ib'^2 + b'e^{i\varphi}\phi_\omega' \\ &= i(a'^2 + b'^2) + e^{i\varphi}(b' - ia')\phi_\omega', \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} (a'e^{i\varphi} + ib'e^{i\varphi} - \phi_\omega') (-ia'e^{-i\varphi} - b'e^{-i\varphi}) &= -ia'^2 - a'b' + b'a' - ib'^2 + ia'e^{-i\varphi}\phi_\omega' + b'e^{-i\varphi}\phi_\omega' \\ &= i(-b'^2 - a'^2) + e^{-i\varphi}(ia' + b')\phi_\omega'. \end{aligned}$$

Daí, a primeira integral de Ω_φ pode ser escrita como

$$\int_0^L e^{-i\varphi}(ia' + b')\phi_\omega' + e^{i\varphi}(b' - ia')\phi_\omega' dx.$$

Para a integral proporcional a ω o desenvolvimento é análogo, ou seja, temos o seguinte

$$\omega \int_0^L +e^{-i\varphi}(ia + b)\phi_\omega + e^{i\varphi}(b - ia)\phi_\omega dx.$$

Com isso, podemos continuar o desenvolvimento para Ω_φ . Com efeito, expandindo as exponenciais de Euler, integrando por partes e usando a condição de contorno periódica sobre ϕ_ω , temos o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned}
\Omega_\varphi &= \int_0^L e^{-i\varphi}(ia' + b')\phi'_\omega + e^{i\varphi}(b' - ia')\phi'_\omega dx + \omega \int_0^L e^{-i\varphi}(ia + b)\phi_\omega + e^{i\varphi}(b - ia)\phi_\omega dx \\
&= \int_0^L \phi'_\omega a' i(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) + \phi'_\omega b'(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) dx + \omega \int_0^L \phi_\omega a i(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) + \phi_\omega b(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) dx \\
&= \int_0^L \phi'_\omega a'(2 \sin(\varphi)) - \phi'_\omega b'(2 \cos(\varphi)) dx + \omega \int_0^L \phi_\omega a(2 \sin(\varphi)) + \phi_\omega b(2 \cos(\varphi)) dx \\
&= 2 \int_0^L ((a\phi'_\omega)' - a\phi''_\omega) \sin(\varphi) - ((b\phi'_\omega)' + b\phi''_\omega) \cos(\varphi) dx + \\
&+ \omega \int_0^L \phi_\omega a(2 \sin(\varphi)) + \phi_\omega b(2 \cos(\varphi)) dx \\
&= 2 \sin(\varphi) \int_0^L a(-\phi''_\omega + \omega\phi_\omega) dx + 2 \cos(\varphi) \int_0^L b(-\phi''_\omega + \omega\phi_\omega) dx,
\end{aligned}$$

como ϕ_ω satisfaz a EDO (3.65), então, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\Omega_\varphi &= 2 \sin(\varphi) \int_0^L a(-\phi''_\omega + \omega\phi_\omega) dx + 2 \cos(\varphi) \int_0^L b(-\phi''_\omega + \omega\phi_\omega) dx \\
&= 2 \sin(\varphi) \int_0^L a|g|\phi_\omega^3 dx + 2 \cos(\varphi) \int_0^L b|g|\phi_\omega^3 dx. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Por outro lado, derivando a igualdade (5.19) em relação à y , nós obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega_y &= \int_0^L (a''e^{i\varphi} + ib''e^{i\varphi})(a'e^{-i\varphi} - ib'e^{-i\varphi} - \phi'_\omega) + (a'e^{i\varphi} + ib'e^{i\varphi} - \phi'_\omega)(a''e^{-i\varphi} - ib''e^{-i\varphi}) dx \\
&+ \omega \int_0^L (a'e^{i\varphi} + ib'e^{i\varphi})(ae^{-i\varphi} - ibe^{-i\varphi} - \phi_\omega) + (ae^{i\varphi} + ibe^{i\varphi} - \phi_\omega)(a'e^{-i\varphi} - ib'e^{-i\varphi}) dx
\end{aligned}$$

vamos prosseguir de forma análoga ao feito acima. Com efeito, vamos desenvolver os integrandos da primeira integral, esses são

$$\begin{aligned}
(a''e^{i\varphi} + ib''e^{i\varphi})(a'e^{-i\varphi} - ib'e^{-i\varphi} - \phi'_\omega) &= a''a' - ia''b' - a''\phi'_\omega e^{i\varphi} + ia'b'' + b'b'' - ib''\phi'_\omega e^{i\varphi} \\
&= e^{i\varphi}(-a'' - ib'')\phi'_\omega + a''(a' - ib') + b''(b' + ia')
\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}
(a'e^{i\varphi} + ib'e^{i\varphi} - \phi'_\omega)(a''e^{-i\varphi} - ib''e^{-i\varphi}) &= a'a'' - ia'b'' + b'b'' - a''e^{-i\varphi}\phi'_\omega + ib'a'' - i\phi'_\omega b''e^{-i\varphi} \\
&= e^{-i\varphi}(-a'' + ib'')\phi'_\omega + a''(a' + ib') + b''(b' - ia')
\end{aligned}$$

logo, a primeira integral de Ω_y é

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_0^L -a''(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})\phi'_\omega + ib''(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})\phi'_\omega - 2e^{i\varphi}a''\phi'_\omega + 2a''a' + 2b''b' dx \\
&= \int_0^L -a''(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})\phi'_\omega + ib''(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})\phi'_\omega dx + \int_0^L \frac{d}{dx}(a'^2 + b'^2) dx \\
&= \int_0^L -a''(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})\phi'_\omega + ib''(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})\phi'_\omega dx + \int_0^L \frac{d}{dx}(|u|^2) dx \\
&= \int_0^L -a''(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})\phi'_\omega + ib''(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})\phi'_\omega,
\end{aligned}$$

onde usamos a periodicidade da função u . A outra parte da integral de Ω_y é análoga, portanto, segue que Ω_y é

$$\begin{aligned}\Omega_y &= \int_0^L -a''(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})\phi'_\omega + ib''(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})\phi'_\omega dx \\ &+ \omega \int_0^L -a'(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})\phi_\omega + b'(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})\phi_\omega dx.\end{aligned}$$

Então, desenvolvendo as exponenciais, integrando por partes e aplicando as condições de contorno periódicas, obtemos o seguinte para Ω_y

$$\begin{aligned}\Omega_y &= 2 \int_0^L -a''\phi'_\omega \cos(\varphi) + b''\phi'_\omega \sin(\varphi) dx + 2\omega \int_0^L -a'\phi_\omega \cos(\varphi) + b'\phi_\omega \sin(\varphi) dx \\ &= 2 \int_0^L ((a'\phi'_\omega)' - a'\phi''_\omega) \cos(\varphi) + ((b'\phi'_\omega)' - b'\phi''_\omega) \sin(\varphi) dx + \\ &+ 2\omega \int_0^L -a'\phi_\omega \cos(\varphi) + b'\phi_\omega \sin(\varphi) dx \\ &= 2 \int_0^L -a''\phi'_\omega \cos(\varphi) dx + b''\phi'_\omega \sin(\varphi) dx + 2\omega \int_0^L b'\phi_\omega \sin(\varphi) - a'\phi_\omega \cos(\varphi) dx \\ &= 2 \cos(\varphi) \int_0^L a'(\phi''_\omega - \omega\phi_\omega) dx - 2 \sin(\varphi) \int_0^L b'(\phi''_\omega - \omega\phi_\omega) dx\end{aligned}$$

Usando o fato que ϕ_ω é solução da EDO (3.65), temos que:

$$\begin{aligned}\Omega_y &= 2 \cos(\varphi) \int_0^L a'(\phi''_\omega - \omega\phi_\omega) dx - 2 \sin(\varphi) \int_0^L b'(\phi''_\omega - \omega\phi_\omega) dx \\ &= 2 \cos(\varphi) \int_0^L a'|g|\phi_\omega^3 dx - 2 \sin(\varphi) \int_0^L b'|g|\phi_\omega^3 dx \\ &= 2 \cos(\varphi) \int_0^L a\phi_\omega'^2 \phi_\omega' dx - 2 \sin(\varphi) \int_0^L b\phi_\omega'^2 \phi_\omega' dx.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Agora, usando a representação da perturbação na solução onda viajante, isto é a igualdade (5.16), podemos escrever

$$\begin{aligned}u &= e^{-i\varphi}(\phi_\omega + z) \\ &= e^{-i\varphi}(\phi_\omega + p + iq) \\ &= (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi))(\phi_\omega + p + iq) \\ &= \phi_\omega \cos(\varphi) - i\phi_\omega \sin(\varphi) + p \cos(\varphi) - ip \sin(\varphi) + iq \cos(\varphi) + q \sin(\varphi).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Então, como $u = a + bi$ obtemos, por inspeção na expressão (5.22) que os termos a e b são tais que

$$\begin{cases} a = \phi_\omega \cos(\varphi) + p \cos(\varphi) + q \sin(\varphi) \\ b = q \cos(\varphi) - \phi_\omega \sin(\varphi) - p \sin(\varphi). \end{cases}\tag{5.23}$$

Agora, de fato obteremos as relações de compatibilidade. Para isso, usaremos a propriedade de mínimo, a qual exige que $\Omega_\varphi = 0$ e $\Omega_y = 0$. Desta forma, pondo as igualdades (5.23)

em (5.20) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \sin(\varphi) \int_0^L a |g| \phi_\omega^3 dx + 2 \cos(\varphi) \int_0^L b |g| \phi_\omega^3 dx \\
&= 2 |g| \sin(\varphi) \int_0^L (\phi_\omega \cos(\varphi) + p \cos(\varphi) + q \sin(\varphi)) \phi_\omega^3 dx \\
&\quad + 2 |g| \cos(\varphi) \int_0^L (q \cos(\varphi) - \phi_\omega \sin(\varphi) - p \sin(\varphi)) \phi_\omega^3 dx \\
&= 2 |g| \sin^2(\varphi) \int_0^L q \phi_\omega^3 dx + 2 \cos^2(\varphi) \int_0^L q \phi_\omega^3 dx \\
&= 2 |g| (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \int_0^L q \phi_\omega^3 dx \\
&= 2 |g| \int_0^L \phi_\omega^3 q dx,
\end{aligned}$$

com isso, obtemos a primeira relação de compatibilidade que é

$$\int_0^L q \phi_\omega^3 dx = 0. \quad (5.24)$$

Agora, usando as igualdades (5.22) em (5.21) obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \cos(\varphi) \int_0^L (\phi_\omega \cos(\varphi) + p \cos(\varphi) + q \sin(\varphi)) \phi_\omega^2 \phi_\omega' dx \\
&\quad - 2 \sin(\varphi) \int_0^L (q \cos(\varphi) - \phi_\omega \sin(\varphi) - p \sin(\varphi)) \phi_\omega^2 \phi_\omega' dx \\
&= 2 \int_0^L \phi_\omega^3 \phi_\omega' dx + 2 \int_0^L p \phi_\omega^2 \phi_\omega' dx = 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^L \phi_\omega^3 \phi_\omega' dx = \frac{1}{4} \int_0^L \frac{d\phi_\omega^4}{dx} dx = \frac{\phi_\omega^4(L) - \phi_\omega^4(0)}{4} = 0,$$

em vista da periodicidade da função ϕ_ω , então, a segunda relação de compatibilidade fica determinada, esta é

$$\int_0^L \phi_\omega^2 \phi_\omega' p(x, t) dx = 0. \quad (5.25)$$

Com isso, o lema fica provado. ■

Agora, vamos estudar o funcional \mathcal{G} definido em (4.2). Em particular, vamos obter a variação de \mathcal{G} em relação a onda dnoidal ϕ_ω e a solução perturbada dada em (5.16), com efeito

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{G}(0) &= \mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_\omega) = \Delta \mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(u(t)) - \mathcal{G}(\phi_\omega) = \mathcal{G}(\phi_\omega + z(t)) - \mathcal{G}(\phi_\omega) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_\omega' + z'|^2 - \frac{|g|}{2} |\phi_\omega + z|^4 + \omega |\phi_\omega + z|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_\omega'|^2 - \frac{|g|}{2} |\phi_\omega|^4 + \omega |\phi_\omega|^2 dx
\end{aligned} \quad (5.26)$$

O cálculo de $\Delta \mathcal{G}$ será essencial para mostrarmos a estabilidade das ondas dnoidais. Tendo isso em vista, vamos estabelecer alguns resultados para aproximarmos $\Delta \mathcal{G}$ considerando até as formas quadráticas de z .

Definição 5.3. Definamos o funcional linear $f : H_{per}^1([0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(y) = |y|^4$.

Usando a série de Taylor, podemos expandir o o funcional linear f com $y = \phi_\omega + z$, em relação a variável z , em torno de ϕ de modo a termos

$$\begin{aligned} f(\phi_\omega + z) &= |\phi_\omega + z|^4 \\ &= f(\phi_\omega) + f'(\phi_\omega)z + \frac{f''(\phi_\omega)z^2}{2} + R(z). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Agora, vamos calcular as expressões para $f'(\phi_\omega)$ e $f''(\phi_\omega)$.

Note que, o funcional $f(y)$ pode ser tratado como uma função de duas variáveis. De fato, podemos escrever que $f = f(y, \bar{y}) = (y\bar{y})^2$. Com isso, a derivada total de $f(y, \bar{y})$ é

$$f'(y, \bar{y}) = 2(y\bar{y})\bar{y} + 2(y\bar{y})y = 2|y|^2\bar{y} + 2|y|^2y, \quad (5.28)$$

aplicando ao vetor (z, \bar{z}) temos o seguinte

$$\begin{aligned} f'(y, \bar{y})(z, \bar{z}) &= 2|y|^2\bar{y}z + 2|y|^2y\bar{z} \\ &= 2|y|^2(\bar{y}z + y\bar{z}) \\ &= 4|y|^2 \operatorname{Re}(\bar{y}z). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Agora, vamos calcular f'' , com efeito a derivada segunda do funcional f é matriz hessiana associada. Logo é dada por:

$$f''(y, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y} \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\bar{y}^2 & 4|y|^2 \\ 4|y|^2 & 2y^2 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Usando (5.30), vamos calcular de $f''(y, \bar{y})$ aplicado ao vetor $(z, \bar{z})^2$, com efeito temos os seguinte

$$\begin{aligned} f''(y, \bar{y})(z, \bar{z})^2 &= \begin{pmatrix} z & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{y}^2 & 4|y|^2 \\ 4|y|^2 & 2y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \\ &= 2\bar{y}^2 z^2 + 4|y|^2 z\bar{z} + 4|y|^2 z\bar{z} + 2y^2 \bar{z}^2 \\ &= 2|y|^2 z^2 + 8|y|^2 z\bar{z} + 2|y|^2 \bar{z}^2 \\ &= 2|y|^2 (z^2 + 4z\bar{z} + \bar{z}^2) \\ &= 2|y|^2 (z^2 + 2z\bar{z} + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \\ &= 2|y|^2 (z^2 + 2|z|^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2) \\ &= 2|y|^2 ((p^2 + 2pqi - q^2) + 2(p^2 + q^2) + 2(p^2 + q^2) + (p^2 - 2pqi - q^2)) \\ &= 2|y|^2 (4p^2 + 2p^2 + 2q^2) \\ &= 4|y|^2 (2p^2 + (p^2 + q^2)) \\ &= 4|y|^2 (2p^2 + |z|^2). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Agora, vamos fazer $y = \phi_\omega$ nas igualdades (5.29) e (5.31). Em (5.29) segue

$$f'(\phi_\omega, \phi_\omega)(z, \bar{z}) = 4|\phi_\omega|^2 \operatorname{Re}(\overline{\phi_\omega z}) = 4|\phi_\omega|^2 \phi_\omega p = 4|\phi_\omega|^3 p, \quad (5.32)$$

e em (5.31)

$$f''(\phi_\omega, \phi_\omega)(z, \bar{z}) = 4|\phi_\omega|^2 (2p^2 + |z|^2). \quad (5.33)$$

Substituindo as expressões (5.32) e (5.33) na igualdade (5.27) obtemos

$$\begin{aligned} f(\phi_\omega) &= |\phi_\omega|^4 + 4|\phi_\omega|^3 p + \frac{4|\phi_\omega|^2 (2p^2 + |z|^2)}{2} + R(z) \\ &= |\phi_\omega|^4 + 4|\phi_\omega|^3 p + 2|\phi_\omega|^2 (2p^2 + |z|^2) + R(z). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Agora, podemos voltar a nos ater ao funcional $\Delta \mathcal{G}$.

Então, usando a imersão compacta $H_{per}^1([0, L]) \xrightarrow{c} L_{per}^2([0, L])$, levando a igualdade (5.34) em (5.26) e usando que ϕ_ω é solução da EDO (3.65) obtemos que a variação do funcional $\mathcal{G}(u)$ é

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L |\phi'_\omega + z'|^2 - \frac{|g|}{2} |\phi_\omega + z|^4 + \omega |\phi_\omega + z|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\phi'_\omega|^2 - \frac{|g|}{2} |\phi_\omega|^4 + \omega |\phi_\omega|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L |\phi'_\omega + z'|^2 - \frac{|g|}{2} [|\phi_\omega|^4 + 4|\phi_\omega|^3 p + 2|\phi_\omega|^2 (2p^2 + |z|^2) + R(z)] + \omega |\phi_\omega + z|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L |\phi'_\omega|^2 - \frac{|g|}{2} |\phi_\omega|^4 + \omega |\phi_\omega|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L |(\phi'_\omega + p) + iq'|^2 - \frac{|g|}{2} [(\phi_\omega)^4 + 4(\phi_\omega)^3 p + 2(\phi_\omega)^2 (2p^2 + |z|^2) + R(z)] \\ &\quad + \omega |(\phi_\omega + p) + iq|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L (\phi'_\omega)^2 - \frac{|g|}{2} (\phi_\omega)^4 + \omega (\phi_\omega)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\phi'_\omega + p)^2 - (q')^2 - |g| \left[2(\phi_\omega)^3 p + 2(\phi_\omega)^2 p^2 + 2(\phi_\omega)^2 |z|^2 - \frac{R(z)}{2} \right] \\ &\quad + \omega [(\phi_\omega + p)^2 - q^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L (\phi'_\omega)^2 + \omega (\phi_\omega)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\phi'_\omega)^2 + 2\phi'_\omega p' + p'^2 - (q')^2 - |g| \left[2(\phi_\omega)^3 p + 2(\phi_\omega)^2 p^2 + 2(\phi_\omega)^2 |z|^2 - \frac{R(z)}{2} \right] \\ &\quad + \omega [(\phi_\omega)^2 + 2\phi_\omega p + p^2 - q^2] - (\phi'_\omega)^2 - \omega (\phi_\omega)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L 2\phi'_\omega p' + p'^2 - (q')^2 - |g| \left[2(\phi_\omega)^3 p + 2(\phi_\omega)^2 p^2 + 2(\phi_\omega)^2 |z|^2 - \frac{R(z)}{2} \right] \\ &\quad + \omega (2\phi_\omega p + p^2 - q^2) dx \\ &= \int_0^L \phi'_\omega p' - |g| \phi_\omega^3 p + \omega \phi_\omega p dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (p')^2 - (q')^2 - |g| \left[2(\phi_\omega)^2 p^2 + 2(\phi_\omega)^2 |z|^2 - \frac{R(z)}{2} \right] + \omega (+p^2 - q^2) dx \\ &= p\phi'_\omega \Big|_0^L + \int_0^L (-\phi''_\omega + \omega \phi_\omega - |g| \phi_\omega^3) p dx + \frac{1}{2} ((p'p - q'q) \Big|_0^L \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L p''p - q''q - |g| \left[3(\phi_\omega)^2 p^2 + (\phi_\omega)^2 q^2 - \frac{R(z)}{2} \right] + \omega (+p^2 - q^2) dx \end{aligned} \quad (5.35)$$

Como as funções ϕ_ω e $u = p + iq$ são periódicas, segue que

$$\frac{1}{2} ((p'p - q'q)|_0^L = p\phi'_\omega|_0^L = 0,$$

então, aplicando esse resultado no cálculo variação do funcional \mathcal{G} , temos

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G}(t) &= \int_0^L (-\phi''_\omega + \omega\phi_\omega - |g|\phi_\omega^3) p dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left[p''p - q''q - |g| \left[3(\phi_\omega)^2 p^2 + (\phi_\omega)^2 q^2 - \frac{R(z)}{2} \right] + \omega(p^2 - q^2) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (p'' - 3|g|\phi_\omega + \omega)p dx + \frac{1}{2} \int_0^L (-q'' - |g|\phi_\omega + \omega)q dx - \frac{|g|}{2} \int_0^L R(z) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{dn} p, p \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ q, q \rangle - o(\|z\|^2), \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde empregamos as definições dos operadores de \mathcal{L}_ω associados ao produto interno e $o(\|z\|^2) = \frac{g}{2} \int_0^L R(z) dx$.

De posse da expressão (5.36), vamos determinar algumas relações que associem p e ϕ_ω .

Proposição 5.1. *Sejam ϕ_ω a solução onda viajante obtida no Teorema 3.8 e u dada em (5.16). Então, vale que*

$$\langle p, \phi_\omega \rangle = -\frac{1}{2} \|z\|^2. \quad (5.37)$$

Demonstração. Consideremos a normalização $\|u(t)\|^2 = \|\phi_\omega\|^2$ para todo $t \in [0, T]$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \|\phi_\omega\|^2 &= \|u\|^2 = \|\phi_\omega + z\|^2 \\ &= \langle \phi_\omega + z, \phi_\omega + z \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvendo $\langle \phi_\omega + z, \phi_\omega + z \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi_\omega\|^2 &= \langle \phi_\omega + z, \phi_\omega + z \rangle = \langle \phi_\omega + p + iq, \phi_\omega + p + iq \rangle \\ &= \langle \phi_\omega, \phi_\omega + p + iq \rangle + \langle p, \phi_\omega + p + iq \rangle + \langle iq, \phi_\omega + p + iq \rangle \\ &= \langle \phi_\omega, \phi_\omega \rangle + \langle \phi_\omega, p \rangle + \langle \phi_\omega, iq \rangle + \langle p, \phi_\omega \rangle + \langle p, p \rangle + \langle p, iq \rangle \\ &+ \langle iq, \phi_\omega \rangle + \langle iq, p \rangle + \langle iq, iq \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} (\langle p, \phi_\omega \rangle + \langle \phi_\omega, iq \rangle + \langle p, iq \rangle) + \|p\|^2 + \|q\|^2 + \|\phi_\omega\|^2 \\ &= 2 \langle p, \phi_\omega \rangle + \|p\|^2 + \|q\|^2 + \|\phi_\omega\|^2 \\ &= 2 \langle p, \phi_\omega \rangle + \|z\|^2 + \|\phi_\omega\|^2 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, segue que

$$2 \langle p, \phi_\omega \rangle + \|z\|^2 = 0 \implies \langle p, \phi_\omega \rangle = -\frac{1}{2} \|z\|^2$$

que é a expressão desejada. ■

A partir de então, vamos assumir, sem perda de generalidade que $\|\phi_\omega\| = 1$. Agora, vamos definir duas funções auxiliares, p_{\parallel} e p_{\perp} .

Definição 5.4. *Definamos as funções p_{\parallel} e p_{\perp} da seguinte forma:*

$$p_{\parallel} = \langle p, \phi_\omega \rangle \phi_\omega = -\frac{1}{2} (\|p\|^2 + \|q\|^2) \phi_\omega = -\frac{1}{2} \|z\|^2 \phi_\omega \quad (5.38)$$

$$p_{\perp} = p - p_{\parallel}. \quad (5.39)$$

Proposição 5.2. *Seja p_{\parallel} e p_{\perp} as funções definidas na Definição 5.4. Então, as seguintes relações de ortogonalidade são satisfeitas*

$$(a) \ p_{\perp} \perp \phi_\omega,$$

$$(b) \ p_{\perp} \perp \phi_\omega^2 \phi'_\omega.$$

Demonstração. A prova de ambos os itens é direta. Provemos o item (a), com efeito

$$\begin{aligned} \langle p_{\perp}, \phi_\omega \rangle &= \langle p - p_{\parallel}, \phi_\omega \rangle = \langle p, \phi_\omega \rangle - \langle p_{\parallel}, \phi_\omega \rangle = \langle p, \phi_\omega \rangle - \langle \langle p, \phi_\omega \rangle \phi_\omega, \phi_\omega \rangle \\ &= \langle p, \phi_\omega \rangle - \langle p, \phi_\omega \rangle = 0. \end{aligned}$$

Para o item (b), segue que

$$\begin{aligned} \langle p_{\perp}, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle &= \langle p - p_{\parallel}, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle = \langle p, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle - \langle p_{\parallel}, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle \\ &= \langle p, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle - \langle \langle p, \phi_\omega \rangle \phi_\omega, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle \\ &= \langle p, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle - \langle p, \phi_\omega \rangle \langle \phi_\omega^3, \phi'_\omega \rangle. \end{aligned}$$

Vejam que ambos os produtos internos acima são nulos, de fato $\langle p, \phi_\omega^2 \phi'_\omega \rangle$ é nulo pelas relações de compatibilidade (5.17). Por outro lado, desenvolvendo o produto interno $\langle \phi_\omega^3, \phi'_\omega \rangle$ e o fato que ϕ_ω é L -periódica segue que

$$\langle \phi_\omega^3, \phi'_\omega \rangle = \int_0^L \phi_\omega^3 \phi'_\omega dx = \phi_\omega^3 \phi_\omega \Big|_0^L - 3 \int_0^L \phi_\omega^3 \phi'_\omega dx = -3 \int_0^L \phi_\omega^3 \phi'_\omega dx = -3 \langle \phi_\omega^3, \phi'_\omega \rangle,$$

consequentemente, $\langle \phi_\omega^3, \phi'_\omega \rangle = 0$ e o item (b) fica provado. ■

Com as funções p_{\parallel} e p_{\perp} definidas e as relações de ortogonalidade estabelecidas na Proposição 5.2, podemos então estudar operadores \mathcal{L}_{dn} e \mathcal{L}_{dn}^+ fazendo uso de suas propriedades espectrais. Nesse sentido, enunciamos o seguinte resultado.

Proposição 5.3. *Seja \mathcal{L}_{dn} o operador definido em (4.9) e a função p_{\perp} da Definição 5.4. Então, o produto interno $\langle \mathcal{L}_{dn} p_{\perp}, p_{\perp} \rangle$ satisfaz a desigualdade*

$$\langle \mathcal{L}_{dn} p_{\perp}, p_{\perp} \rangle \geq \xi \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4, \quad (5.40)$$

para ξ definido no item (b) do Teorema 4.4 e D_i , com $i = 1, 2$ duas constantes positivas.

Demonstração. Do item (b) do Teorema 4.4, segue que o operador \mathcal{L}_{dn} satisfaz

$$\left\langle \mathcal{L}_{dn} \frac{p_{\perp}}{\|p_{\perp}\|}, \frac{p_{\perp}}{\|p_{\perp}\|} \right\rangle \geq \xi. \quad (5.41)$$

Em consequência da linearidade de \mathcal{L}_{dn} , segue também que

$$\left\langle \mathcal{L}_{dn} \frac{p_{\perp}}{\|p_{\perp}\|}, \frac{p_{\perp}}{\|p_{\perp}\|} \right\rangle \geq \xi \implies \langle \mathcal{L}p_{\perp}, p_{\perp} \rangle \geq \xi \|p_{\perp}\|^2. \quad (5.42)$$

Desenvolvendo a última desigualdade e usando a imersão compacta de $H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn} p_{\perp}, p_{\perp} \rangle &\geq \xi \|p_{\perp}\|^2 \\ &\geq \xi \left\langle p + \frac{1}{2} \|z\|^2 \phi_{\omega}, p + \frac{1}{2} \|z\|^2 \phi_{\omega} \right\rangle \\ &\geq \xi \left[\langle p, p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, \|z\|^2 \phi_{\omega} \rangle + \frac{1}{2} \langle \|z\|^2 \phi_{\omega}, p \rangle + \frac{1}{4} \langle \|z\|^2 \phi_{\omega}, \|z\|^2 \phi_{\omega} \rangle \right] \\ &\geq \xi \left[\langle p, p \rangle + \|z\|^2 \langle p, \phi_{\omega} \rangle + \frac{1}{4} \|z\|^4 \right] \\ &\geq \xi \left(\|p\|^2 - \frac{1}{2} \|z\|^4 + \frac{1}{4} \|z\|^4 \right) \\ &\geq \xi \|p\|^2 - \xi \frac{1}{4} \|z\|^4 \\ &\geq \xi \|p\|^2 - \xi \frac{1}{4} \|z\|^3 - \xi \frac{1}{4} \|z\|^4 \\ &\geq \xi \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4, \end{aligned}$$

com $D_i > 0, i = 1, 2$. E o resultado fica provado. ■

Antes de prosseguirmos, vamos a uma proposição importante.

Proposição 5.4. *O produto interno $\langle \mathcal{L}_{dn} \phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle$ é negativo.*

Demonstração. Usando o fato que ϕ_{ω} satisfaz a EDO (3.65) temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn} \phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle &= \langle -\phi_{\omega}'' + \omega \phi_{\omega} - 3|g| \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle \\ &= -\langle \phi_{\omega}'', \phi_{\omega} \rangle + \langle \omega \phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle - 3|g| \langle \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle \\ &= -\langle \omega \phi_{\omega} - |g| \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle + \langle \omega \phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle - 3|g| \langle \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle \\ &= |g| \langle \phi_{\omega}^2, \phi_{\omega} \rangle - 3|g| \langle \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle \\ &= -2|g| \langle \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle, \end{aligned}$$

em virtude de que $\langle \phi_{\omega}^3, \phi_{\omega} \rangle > 0$ e $|g| > 0$ segue que o $\langle \mathcal{L}_{dn} \phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle < 0$. ■

De posse das Proposições 5.3 e 5.4 podemos enunciar o seguinte resultado para o $(\mathcal{L}_{dn} p, p)$.

Proposição 5.5. *Sejam \mathcal{L}_{dn} o operador definido em (4.9) e a função p_{\perp} da Definição 5.4. Então, o produto interno $\langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle$ satisfaz a desigualdade*

$$\langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle \geq \xi_1 \|p\|_1^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4, \quad (5.43)$$

com ξ_1 e D_i , $i = 1, 2$ constantes positivas.

Demonstração. De posse das funções p_{\parallel} e p_{\perp} estabelecidas na Definição 5.4, da desigualdade (5.41), das Proposições 5.1 e 5.4 e da imersão compacta de $H^2([0, L]) \hookrightarrow L^2([0, L])$, podemos desenvolver o produto interno $\langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle$, com efeito

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle &= \langle \mathcal{L}_{dn}p_{\perp} + p_{\parallel}, p_{\perp} + p_{\parallel} \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_{dn}p_{\perp}, p_{\perp} \rangle + \langle \mathcal{L}p_{\parallel}, p_{\parallel} \rangle + 2 \langle \mathcal{L}p_{\perp}, p_{\parallel} \rangle \\ &\geq \left(\xi \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4 \right) + \left(\frac{1}{4} \|z\|_1^4 \langle \mathcal{L}_{dn}\phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle \right) + 2 \left(\frac{-\|z\|^2}{2} \langle \mathcal{L}_{dn}p_{\perp}, \phi_{\omega} \rangle \right) \\ &\geq \xi \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4 + \frac{1}{4} \|z\|_1^4 \langle \mathcal{L}\phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle - \|z\|^2 \langle \mathcal{L}_{dn}p_{\perp}, \phi_{\omega} \rangle \\ &\geq \xi \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 + \left(\frac{1}{4} \langle \mathcal{L}_{dn}\phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle - D_2 \right) \|z\|_1^4 - \|z\|_1^3 \|\mathcal{L}_{dn}\phi_{\omega}\| \\ &\geq \xi \|p\|^2 - (D_1 + \|\mathcal{L}_{dn}\phi_{\omega}\|) \|z\|_1^3 + \left(\frac{1}{4} \langle \mathcal{L}_{dn}\phi_{\omega}, \phi_{\omega} \rangle - D_2 \right) \|z\|_1^4 \\ &\geq \xi \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4, \end{aligned}$$

com $D_i > 0$, $i = 1, 2$. Resolvendo a desigualdade acima para $\xi \|p\|^2$ temos

$$\xi \|p\|^2 \leq \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + D_1 \|z\|_1^3 + D_2 \|z\|_1^4.$$

Então, podemos dizer que, para $a, b > 0$, segue que

$$\begin{aligned} a \|p'\|^2 + b \|p\|^2 &\leq a \|p'\|^2 + b \xi \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4 \\ &= a \int_0^L p'^2 dx + b \xi \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4 \\ &= a \int_0^L \frac{d(pp')}{dx} - pp'' dx + b \xi \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4 \\ &\leq a \int_0^L p(\mathcal{L}_{dn}p - \omega p + 3|g|\phi_{\omega}^2 p) dx + b \xi \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4 \\ &\leq a \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle - a \int_0^L \omega p^2 - 3|g|\phi_{\omega}^2 p^2 dx + b \xi \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4 \\ &\leq (a + b \xi) \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle - a \int_0^L (\omega - 3|g|\phi_{\omega}^2) p^2 dx + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4 \\ &\leq (a + b \xi) \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + a \left\| \omega - 3|g|\phi_{\omega}^2 \right\|_{\infty} \|p\|^2 + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4, \end{aligned}$$

daí segue que

$$a \|p'\|^2 + \left(b - a \left\| \omega - 3|g|\phi_{\omega}^2 \right\|_{\infty} \right) \|p\|^2 \leq (a + b \xi) \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + b D_1 \|z\|_1^3 + b D_2 \|z\|_1^4. \quad (5.44)$$

Agora, vamos escolher $a, b > 0$ de modo que

$$(b - a \|\omega - 3|g|\phi_\omega^2\|_\infty) > 0,$$

podemos escrever

$$0 < (b - a \|\omega - 3|g|\phi_\omega^2\|_\infty) \|p\|^2 \leq (a + b\xi) \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle + bD_1 \|z\|_1^3 + bD_2 \|z\|_1^4,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{dn}p, p \rangle &\geq \frac{(b - a \|\omega - 3|g|\phi_\omega^2\|_\infty) \|p\|^2}{a + \xi b} \|p\|^2 - \frac{bD_1}{a + \xi b} \|z\|_1^3 - \frac{bD_2}{a + \xi b} \|z\|_1^4 \\ &= \xi_1 \|p\|^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4, \end{aligned}$$

onde agrupamos o fator $\frac{b}{a + \xi b}$ nas constantes de D_1 e D_2 para uma notação mais limpa. Dessa forma, provamos o desejado. \blacksquare

Vamos enunciar o último resultado antes de nos atermos, precisamente, a estabilidade das soluções ϕ_ω .

Teorema 5.1. *Considere $t \in [0, T]$. Então, a variação do funcional $\mathcal{G}(t)$ satisfaz a seguinte desigualdade*

$$\Delta \mathcal{G}(t) \geq h([\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2) \quad (5.45)$$

em que $h(x)$ é uma função dada por $h(x) = x^2(a - bx - cx^2)$ com $a, b, c > 0$ e que satisfaz

- $h(0) = 0$,
- $h(x) > 0$ para x suficientemente pequeno.

Demonstração. Primeiramente, veja que para $t \in [0, T]$ temos do Teorema 5.2 que $\inf \Omega_t$ é atingido em $(y(t), \varphi(t))$. Em particular, temos que

$$[\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 = \Omega_t(y(t), \varphi(t)) = \|u'(x + y, t)e^{i\varphi} - \phi'_\omega\|^2 + \omega \|u(x + y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega\|^2$$

onde, da igualdade (5.16) temos ainda que $z = u(x + y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega$, ou seja

$$[\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 = \|z'\|^2 + \omega \|z\|^2. \quad (5.46)$$

Além disso, veja que se aplicarmos o resultado Teorema 4.2 para uma função $\frac{q}{\|q\|}$ teremos

$$\left\langle \mathcal{L}_{dn}^+ \frac{q}{\|q\|_1}, \frac{q}{\|q\|_1} \right\rangle \geq \beta \implies \langle \mathcal{L}_{dn}^+ q, q \rangle \geq \beta \|q\|_1^2 \quad (5.47)$$

Então, de posse das desigualdades (5.36), (5.43), (5.47) e do Teorema 4.2 temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{G}(t) &\geq \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{dn} p, p \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{dn}^+ q, q \rangle - o(\|z\|^2) \\
&\geq \frac{1}{2} \beta \|q\|^2 \langle \mathcal{L}_{dn}^+ q, q \rangle + \frac{1}{2} \left(\xi_1 \|p\|_1^2 - D_1 \|z\|_1^3 - D_2 \|z\|_1^4 \right) \\
&\geq \min \left\{ \frac{\beta}{2}, \frac{\xi_1}{2} \right\} (\|q\|_1^2 + \|p\|_1^2) - \frac{D_1}{2} \|z\|_1^3 - \frac{D_2}{2} \|z\|_1^4 \\
&\geq \min \left\{ \frac{\beta}{2}, \frac{\xi_1}{2} \right\} \|z\|_1^2 - \frac{D_1}{2} \|z\|_1^3 - \frac{D_2}{2} \|z\|_1^4
\end{aligned}$$

onde o termo $o(\|z\|^2)$ foi desconsiderado em virtude de estarmos nos atendo a pequenas perturbações. Nesse sentido, temos que as potências $\|z\|$ contidas nesse termo podem ser desconsideradas.

Definindo $\gamma_0 \equiv \min \left\{ \frac{\beta}{2}, \frac{\xi_1}{2} \right\}$, $\gamma_1 \equiv \frac{D_1}{2}$ e $\gamma_2 \equiv \frac{D_2}{2}$ temos

$$\Delta\mathcal{G}(t) \geq \gamma_0 \|z\|_1^2 - \gamma_1 \|z\|_1^3 - \gamma_2 \|z\|_1^4 \quad (5.48)$$

onde $\gamma_i > 0$ para $i = 0, 1, 2$. Explicitando a norma de $H_{per}^1([0, L])$, temos que

$$\Delta\mathcal{G}(t) \geq \gamma_0 (\|z'\|^2 + \|z\|^2)^2 - \gamma_1 (\|z'\|^2 + \|z\|^2)^3 - \gamma_2 (\|z'\|^2 + \|z\|^2)^4,$$

agora, veja que é possível obtermos as seguintes relações com a norma de $H_{per}^1([0, L])$

$$\begin{aligned}
\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2 \leq \max\{1, \omega\} (\|z'\|^2 + \|z\|^2) &\implies \|z'\|^2 + \|z\|^2 \geq \frac{\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2}{\max\{1, \omega\}} \\
\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2 \geq \min\{1, \omega\} (\|z'\|^2 + \|z\|^2) &\implies -(\|z'\|^2 + \|z\|^2) \geq -\left(\frac{\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2}{\min\{1, \omega\}} \right)
\end{aligned}$$

com isso, teremos, para todo $t \in [0, T]$, o seguinte desenvolvimento para $\Delta\mathcal{G}(t)$

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{G}(t) &\geq \gamma_0 (\|z'\|^2 + \|z\|^2)^2 - \gamma_1 (\|z'\|^2 + \|z\|^2)^3 - \gamma_2 (\|z'\|^2 + \|z\|^2)^4 \\
&\geq \left(\frac{\gamma_0^{1/2}}{\max\{1, \omega\}} (\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2) \right)^2 - \left(\frac{\gamma_1^{1/3}}{\min\{1, \omega\}} (\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2) \right)^3 \\
&\quad - \left(\frac{\gamma_2^{1/4}}{\min\{1, \omega\}} (\|z'\|^2 + \omega \|z\|^2) \right)^4 \\
&\geq \left(\frac{\gamma_0^{1/2}}{\max\{1, \omega\}} \Omega_t(y, \varphi) \right)^2 - \left(\frac{\gamma_1^{1/3}}{\min\{1, \omega\}} \Omega_t(y, \varphi) \right)^3 - \left(\frac{\gamma_2^{1/4}}{\min\{1, \omega\}} \Omega_t(y, \varphi) \right)^4 \\
&\geq [\Omega_t(y, \varphi)]^2 \left[\left(\frac{\gamma_0^{1/2}}{\max\{1, \omega\}} \right)^2 - \left(\frac{\gamma_1^{1/3}}{\min\{1, \omega\}} \right)^3 \Omega_t(y, \varphi) - \left(\frac{\gamma_2^{1/4}}{\min\{1, \omega\}} \right)^4 \Omega_t(y, \varphi)^2 \right].
\end{aligned} \quad (5.49)$$

Definamos as seguintes constantes auxiliares

$$\begin{aligned} a &\equiv \left(\frac{\gamma_0^{1/2}}{\max\{1, \omega\}} \right)^2 \\ b &\equiv \left(\frac{\gamma_1^{1/3}}{\min\{1, \omega\}} \right)^3 \\ c &\equiv \left(\frac{\gamma_2^{1/4}}{\min\{1, \omega\}} \right)^4, \end{aligned}$$

onde $a, b, c > 0$ em virtude de que $\gamma_j > 0$ para $j = 0, 1, 2$ e $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$. De posse das constantes a, b e c vamos definir a seguinte função $h(x)$

$$h(x) \equiv x^2(a - bx - cx^2). \quad (5.50)$$

Com efeito, veja que $h(0) = 0$ e que para x suficientemente pequeno o termo quadrático torna-se dominante, portanto temos que

$$h(x) \approx ax^2 > 0,$$

uma vez que, por definição $a > 0$. Agora, veja que se fizermos $x = \Omega_t(y, \varphi)$ e recorrendo a definição da métrica $\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})$, teremos o seguinte

$$h([\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_\omega)]^2) = h(\Omega_t(y, \varphi)) = [\Omega_t(y, \varphi)]^2 [a - b\Omega_t(y, \varphi) - c[\Omega_t(y, \varphi)]^2].$$

De posse disso, a variação do funcional $\mathcal{G}(t)$ dada em (5.49) pode ser posta do seguinte modo

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G}(t) &\geq [\Omega_t(y(t), \varphi(t))]^2 [a - b[\Omega_t(y(t), \varphi(t))] - c[\Omega_t(y(t), \varphi(t))]^2] \\ &\geq h(\Omega_t(y(t), \varphi(t))) \\ &\geq h([\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2) \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

Com base no resultado do Teorema 5.1 podemos enfim nos ater a estabilidade das soluções periódicas para a NLSE. Tendo isso em vista, vamos estabelecer, inicialmente, a estabilidade para pequenas perturbações num conjunto S_ω definido da seguinte forma

$$S_\omega = \left\{ v \in H_{per}^1([0, L]); \|v\| = \|\phi_\omega\| \right\}, \quad (5.51)$$

posteriormente, com uso da aplicação α definida no Teorema 3.8 vamos estender o resultado para quaisquer perturbações das soluções $u(t)$.

Teorema 5.2. *(Estabilidade em S_ω)* Sejam ϕ_ω a solução do tipo onda viajante periódica dada em (3.72), obtida pelo Teorema 3.8, e $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$. Então, as soluções $u(x, t) \in S_\omega$ para $t \in [0, T]$ são orbitalmente estáveis, em $H_{per}^1([0, L])$.

Demonstração. O resultado é obtido diretamente através da desigualdade (5.45). Com efeito, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrário, de fato, do Teorema 5.1 segue que $h(\varepsilon) > 0$ mesmo que ε seja suficientemente pequeno. Além disso, veja que o funcional \mathcal{G} é contínuo em S_ω definido em (5.51). Portanto, segue da continuidade de \mathcal{G} em S_ω que, para $u_0 \in S_\omega$, existe $0 < \delta < \varepsilon$, onde $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$, tal que

$$\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta \implies |\Delta\mathcal{G}(0)| = |\mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_\omega)| < h(\varepsilon^2). \quad (5.52)$$

Notemos que uma vez que a arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que $h(\varepsilon^2)$ sempre será positiva. Agora veja que o funcional \mathcal{G} é constante em relação ao tempo t , em virtude de ser definido em termos das quantidades conservadas $E(u(t))$ e $F(u(t))$, ou seja, temos

$$\Delta\mathcal{G}(t) = \Delta\mathcal{G}(0). \quad (5.53)$$

De posse da igualdade (5.53) e as desigualdades (5.45) e (5.52) além da continuidade da aplicação $\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})$ em t , obtemos

$$h([\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2) \leq \Delta\mathcal{G}(t) = \Delta\mathcal{G}(0) < h(\varepsilon^2) \quad (5.54)$$

que vale para todo $t \in [0, T]$. Por transitividade, temos então que

$$h([\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2) < h(\varepsilon^2) \quad (5.55)$$

tendo em vista que h é uma função crescente se seu argumento é suficientemente pequeno, segue que, nessas condições, h é invertível e logo temos

$$\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega}) < \varepsilon \quad (5.56)$$

para todo $t \in [0, T]$. Consequentemente, temos que para pequenos valores de x a distância das soluções $u(t)$ da NLSE em relação a órbita $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ gerada pelas soluções dnoidais é suficientemente pequena. Portanto, segue que as órbitas $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ são orbitalmente estáveis para pequenas perturbações na qual os dados iniciais se preservam na norma em $L_{per}^2([0, L])$.

Teorema 5.3. (*Extensão para o intervalo $[0, \infty)$*). *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 5.2. Então, a órbita $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é estável em $H_{per}^1([0, L])$ com respeito ao fluxo da NLSE.*

Demonstração. De início, vamos definir o conjunto \mathcal{A} da seguinte forma

$$\mathcal{A} = \{t \mid \text{o mínimo do funcional } \Omega_t(y, \varphi) \text{ é atingido}\}. \quad (5.57)$$

Veja que em virtude do Lema 5.2 temos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois o intervalo no $[0, T]$ temos que o ínfimo do funcional $\Omega_t(y(t), \varphi(t))$ é atingido, consequentemente $[0, T] \subset \mathcal{A}$. Vamos mostrar que podemos estender o intervalo da forma $[0, T]$ para o intervalo $[0, \infty)$. Considere \tilde{T} o maior valor de T , tal que $[0, \tilde{T}] \subset \mathcal{A}$ e suponhamos por absurdo que $\tilde{T} < \infty$.

Agora, veja que do Lema [5.2](#), temos que o ínfimo de $\Omega_t(y(t), \varphi(t))$ é atingido e, logo, segue que

$$\inf_{(y, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \varphi) = [\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 \leq \max\{1, \omega\} \varepsilon^2 \leq \|\phi'_\omega\| + \omega \|\phi_\omega\|^2. \quad (5.58)$$

Além disso, segue da continuidade da aplicação $t \mapsto \Omega_t(y, \varphi)$, que existe $T'' > 0$, tal que

$$\inf_{(y, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \varphi) \leq \|\phi'_\omega\|^2 + \omega \|\phi_\omega\|^2. \quad (5.59)$$

para todo $t \in [\tilde{T}, \tilde{T} + T'']$. Logo $[\tilde{T}, \tilde{T} + T''] \subset \mathcal{A}$, mas isto é absurdo, pois contradiz a maximalidade do elemento \tilde{T} . Conseqüentemente, a suposição de que $\tilde{T} < \infty$ deve ser falsa e, logo, devemos ter que $\tilde{T} = \infty$. Com isso, obtemos que a órbita gerada por translações e rotações das soluções dnoidais $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é estável, em $H_{per}^1[0, L]$, para perturbações pequenas, na qual os dados iniciais se preservam na norma em $L_{per}^2([0, L])$. ■

Agora, vamos exibir um lema importante para o resultado seguinte.

Lema 5.4. *Se $\omega \in \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$ e $0 < \beta < \omega$, então existem $\delta > 0$ e um único e , com $|e - \omega| < \beta$, tais que $\|v - \phi_\omega\|_1 < \delta$ e $F(v) = F(\phi_e)$.*

Demonstração. Da desigualdade $0 < \beta < \omega$ podemos obter que $\omega + \beta > \omega > \omega - \beta > 0$. Agora, definamos uma função auxiliar h , tal que $h(s) = F(\phi_s) = \frac{1}{2} \int_0^L \phi_s^2 dx$. Note que $h(s)$ é uma função contínua, tendo em vista que a função α definida no Teorema [3.8](#) assegura a continuidade da aplicação $s \mapsto \phi_s$. Além disso, $h(s)$ é estritamente positiva, pois

$$h'(s) = \frac{1}{2} \phi_s^2(L) > 0.$$

Logo, aplicando h na desigualdade $\omega + \beta > \omega > \omega - \beta > 0$ temos

$$h(\omega + \beta) > h(\omega) > h(\omega - \beta), \quad (5.60)$$

o que nos permite obter as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} h(\omega + \beta) - h(\omega) > 0 \\ h(\omega - \beta) - h(\omega) < 0. \end{cases} \quad (5.61)$$

Em particular, temos que existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\begin{cases} h(\omega + \beta) - h(\omega) < \eta \\ h(\omega - \beta) - h(\omega) < -2\eta. \end{cases} \quad (5.62)$$

Por outro lado, temos que a quantidade conservada F pode ser vista, também, como uma função contínua em $H_{per}^1([0, L])$. Conseqüentemente, segue que existe $\delta > 0$, tal que se $\|v - \phi_\omega\|_1 < \delta$, então

$$|F(v) - F(\phi_\omega)| < \eta \implies -\eta < F(\phi_\omega) - F(v) < \eta. \quad (5.63)$$

Logo, para o índice $\omega + \beta$, temos que

$$\begin{aligned} F(\phi_{\omega+\beta}) - F(v) &= F(\phi_{\omega+\beta}) - F(\phi_\omega) + F(\phi_\omega) - F(v) \\ &= (h(\omega + \beta) - h(\omega)) + F(\phi_\omega) - F(v) \\ &> 2\eta - \eta = \eta. \end{aligned}$$

Por outro lado, para o índice $\omega - \beta$, temos

$$\begin{aligned} F(\phi_{\omega-\beta}) - F(v) &= F(\phi_{\omega-\beta}) - F(\phi_\omega) + F(\phi_\omega) - F(v) \\ &= (h(\omega - \beta) - h(\omega)) + F(\phi_\omega) - F(v) \\ &< -2\eta + \eta = -\eta \end{aligned}$$

Combinando os resultados acima, podemos obter a seguinte desigualdade

$$F(\phi_{\omega-\beta}) - F(v) < -\eta < 0 < \eta < F(\phi_{\omega+\beta}) - F(v), \quad (5.64)$$

recorrendo a definição da função h , temos, ainda, que

$$h(\omega - \beta) < F(v) < h(\omega + \beta). \quad (5.65)$$

Uma vez que, h é contínua e estritamente crescente, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $e \in (\omega - \beta, \omega + \beta)$, tal que

$$F(\phi_e) = F(v), \quad (5.66)$$

assim, provando o desejado. ■

De posse do Lema 5.4, finalmente podemos estender os Teoremas 5.2 e 5.3 para o caso em que $u \notin S_\omega$, isto é, quando os dados iniciais não preservam a norma em $L^2_{per}([0, L])$.

Teorema 5.4. *(Estabilidade para perturbações arbitrárias) Sejam ϕ_ω a solução do tipo onda viajante periódica dada em (3.72), obtida pelo Teorema 3.8, e $\omega \in (\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$. Então, as soluções $u(x, t) \notin S_\omega$ são orbitalmente estáveis, em $H^1_{per}([0, L])$, para todo $t > 0$.*

Demonstração. De início, veja que a quantidade conservada E é um funcional localmente uniformemente contínuo. Logo, dado $\varepsilon > 0$ definamos $\varepsilon_1 > 0$ por

$$\varepsilon_1^2 = \frac{4\varepsilon^2}{\max\{1, \omega\} (1 + c_e)},$$

onde c_e é uma constante que depende do número e obtido no Lema 5.4, existe $0 < \delta_1 < \frac{\varepsilon_1}{2}$, tal que se as soluções u e v estejam na bola $B_{\delta_1}(\phi_\omega)$, então $|E(u) - E(v)| < \varepsilon_1$.

Consideremos o funcional \mathcal{G} associado ao parâmetro e da seguinte forma $\mathcal{G}_e \equiv E + eF$, onde e é o número obtido no Lema 5.4. Assim, temos que $F(u_0) = F(\phi_e)$. Prosseguindo de forma análoga ao Teorema 5.2, temos que

$$\mathcal{G}_e(u_0) - \mathcal{G}_e(\phi_e) > h_e(\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})), \quad (5.67)$$

onde h_e é uma função estritamente crescente no intervalo $[0, A]$, com A suficientemente pequeno, e

$$[\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})]^2 = \|z'_e\|^2 + e\|z_e\|^2, \quad (5.68)$$

com $z_e = u(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_e$.

De posse disso, mostraremos que a distância entre a órbita $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ e a solução $u(t)$ é arbitrariamente pequena.

E virtude da aplicação α contínua definida no Teorema 3.8, temos que para $\delta_1 > 0$ arbitrário, existe $0 < \delta_2 < \delta_1$, tal que

$$|e - \omega| < \delta_2 \implies \|\phi_\omega - \phi_e\|_1 < \delta_1. \quad (5.69)$$

Por outro lado, segue do Lema 5.4 que se $0 < \delta_2 < \omega$, então existem $0 < \delta < \delta_2$, e um único e com $|e - \omega| < \delta_2$, tais que $\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta$, e $F(u_0) = F(\phi_e)$.

De posse disso, provaremos que Provemos que se $\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta$, então

$$[\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 = \|z'_\omega\|^2 + \omega\|z_\omega\|^2 < \varepsilon^2.$$

Com efeito, da hipótese $\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta$, podemos considerar e tal que $|e - \omega| < \delta_2$ e $F(u_0) = F(\phi_e)$. Particularmente, temos que $\|\phi_\omega - \phi_e\| < \delta_1 < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Evidentemente, $u_0 \in B_{\delta_1}(\phi_\omega)$ e $\phi_e \in B_{\delta_1}(\phi_\omega)$. Sob essas condições, segue da continuidade do funcional E que

$$\|u_0 - \phi_e\|_1 < \delta + \delta_1 \implies |E(u_0) - E(\phi_e)| < h_e \left(\frac{\varepsilon_1^2}{4} \right),$$

onde h_e é estritamente positiva e arbitrariamente pequena se $\varepsilon_1 > 0$ também for. Seguindo do fato de que $F(u_0) = F(\phi_e)$, temos o seguinte

$$\begin{aligned} |E(u_0) - E(\phi_e)| &= |E(u_0) + eF(\phi_e) - eF(\phi_e) - E(\phi_e)| \\ &= |E(u_0) + eF(\phi_e) - eF(u_0) - E(\phi_e)| \\ &= |E(u_0) - eF(u_0) + eF(\phi_e) - E(\phi_e)| \\ &= |\mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_e)| \geq \mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_e) \end{aligned}$$

Logo, obtemos a seguinte desigualdade

$$\mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_e) \leq |\mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_e)| < h_e \left(\frac{\varepsilon_1^2}{4} \right). \quad (5.70)$$

Daí, combinando as desigualdades (5.67) e (5.70), obtemos

$$h_e([\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})]^2) < \Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_e) < h_e \left(\frac{\varepsilon_1^2}{4} \right), \quad (5.71)$$

consequentemente, obtemos, por transitividade, a seguinte desigualdade

$$h_e([\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})]^2) < h_e\left(\frac{\varepsilon_1^2}{4}\right). \quad (5.72)$$

Tendo em vista que a aplicação h_e é contínua e estritamente crescente, segue que h_e é invertível e, logo, obtemos que

$$[\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})] < \frac{\varepsilon_1}{2}. \quad (5.73)$$

Com isso em mãos, vamos mostrar que a distância da solução até a órbita gerada pelo dado inicial ϕ_ω é suficientemente pequena. Com efeito,

$$\begin{aligned} [\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 &= \|u'(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi'_\omega\|^2 + \omega \|u(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega\|^2 \\ &\leq \max\{1, \omega\} \|u(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_\omega\|_1^2 \\ &\leq \max\{1, \omega\} \|u(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_e + \phi_e - \phi_\omega\|_1^2 \\ &\leq \max\{1, \omega\} \left(\|u(\cdot + y, t)e^{i\varphi} - \phi_e\|_1^2 + \|\phi_e - \phi_\omega\|_1^2 \right). \end{aligned}$$

Agora, veja que é possível estabelecer uma equivalência entre a norma de $H_{per}^1([0, L])$ e a norma $\|\cdot\|^2 + e\|\cdot\|^2$. Com efeito, veja que

$$\|\cdot\|_1^2 \leq c_e \left(\|\cdot\|^2 + e\|\cdot\|^2 \right) = c_e [\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})]^2, \quad (5.74)$$

onde $c_e = \frac{1}{\min\{1, e\}}$ é uma constante real. Daí, segue que

$$\begin{aligned} [\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 &\leq \max\{1, \omega\} \left(c_e [\rho_e(u(t), \mathcal{O}_{\phi_e})]^2 + \|\phi_e - \phi_\omega\|_1^2 \right) \\ &< \max\{1, \omega\} \left(c_e \frac{\varepsilon_1^2}{4} + \frac{\varepsilon_1^2}{4} \right) \\ &< \max\{1, \omega\} \frac{\varepsilon_1^2(1 + c_e)}{4} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega}) < \varepsilon, \quad (5.75)$$

que é a desigualdade desejada. Consequentemente, segue que as órbitas obtidas por translações e rotações das soluções $u(t)$ com dados iniciais ϕ_ω quaisquer são estáveis em $H_{per}^1([0, L])$. ■

5.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FÍSICAS SOBRE A ESTABILIDADE

Agora, vamos fazer algumas considerações sobre o resultado de estabilidade e das órbitas geradas pelas solução da NLSE.

Primeiramente, vamos comentar sobre o método clássico de Lyapunov para a estabilidade. De fato, nosso resultado de estabilidade é obtido, essencialmente, frente a minimização do funcional \mathcal{G} dado por

$$\mathcal{G}(u) = E(u) + \omega F(u).$$

De fato, o funcional $\mathcal{G}(u)$ é definido de modo a conter duas quantidades conservadas. Além disso, essas quantidades conservadas contêm termos associados diretamente a função $u(t)$ e também a $u_x(t)$. Nesse sentido, \mathcal{G} carrega a física do comportamento das soluções e suas variações em relação a componente x .

Além disso, é possível escrever a solução $u(x, t)$ da NLSE como um campo clássico, cujo densidade de Lagrangiana é dada por

$$L_g(u, \bar{u}, u_t, \bar{u}_t, u_x, \bar{u}_x) = \frac{i}{2}(\bar{u}u_t - u\bar{u}_t) - (|u_x|^2 - g|u|^2). \quad (5.76)$$

Com isso, pode-se mostrar que as quantidades conservadas $E(u)$ e $F(u)$ são obtidas em decorrência da simetria de translação temporal e rotação da NLSE. Onde, $E(u)$ denota a energia do sistema e a quantidade $F(u)$ não possui um sentido universal, assim dependendo do sistema físico em que está modelado pela NLSE, por exemplo, essa quantidade pode denotar: massa e número de constituintes dentre outras quantidades (Angulo Pava, 2007), (ALVES, 2017), (OZAWA, 2005).

Tendo isso em vista, o método de Lyapunov nos guia a minimização tanto da energia quanto da quantidade $F(u)$. Consequentemente, o resultado de estabilidade para as ondas dnoidais fica associado a um estado físico de menor energia.

Ademais, podemos ainda estudar as órbitas das soluções da NLSE através do espaço de fase associado a EDO

$$\phi_\omega'' - \omega\phi_\omega + |g|\phi_\omega^3 = 0.$$

Para isso, inserimos a variável auxiliar $v = \phi_\omega'$ que nos permite obter o seguinte sistema

$$\begin{cases} \phi_\omega' = v \\ v' = \omega\phi_\omega - |g|\phi_\omega^3 \end{cases} \quad (5.77)$$

De posse disso, podemos obter o retrato de fase que é o sistema pontos formado por $\phi_\omega \times \phi_\omega'$. Em verdade, a partir do retrato de fase é possível identificar três regiões de soluções da NSLSE, as quais são

- Soluções periódicas correspondentes as regiões internas com órbitas fechadas,
- Soluções do tipo onda solitária correspondentes as separatrizes entre as órbitas fechadas e as órbitas externas,

- Soluções que mudam de sinal e correspondentes aos fluxos mais externos.

De forma mais detalhada, podemos visualizar essas trajetórias na Figura 5.1

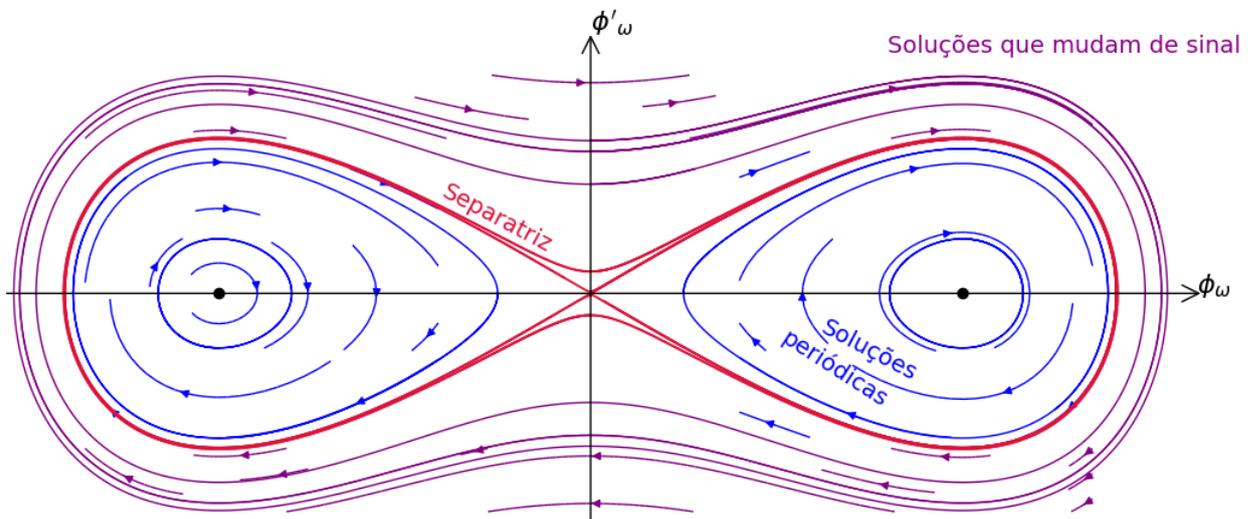


Figura 5.1 – Retrato de fase para diferentes soluções ϕ_ω da NLSE. Fonte: Do Autor.

Em particular, note que na Figura 5.1 as órbitas periódicas mostradas em azul tendem a aproximar-se das soluções solitárias em vermelho. De fato, esse resultado é consequência do limite mostrado no Capítulo 3 em (3.81), ou seja, as ondas periódicas tendem as ondas solitárias. Além disso, as linha retas em vermelho correspondem as soluções constantes obtidas no limite (3.82). Nesse trabalho, nos ativemos a estudar apenas as soluções periódicas, todavia, é possível obter, analogamente, a estabilidade orbital para as soluções do tipo onda solitária (CRISTÓFANI, 2014).

Em relação as soluções que mudam de sinal, temos que essas podem ser obtidas analiticamente para um caso particular da quadratura (4.35). Em verdade, essas soluções são dadas em termos da função elíptica de Jacobi cnoidal $cn(x)$, no entanto, essas soluções não são orbitalmente estáveis. De fato, esse resultado foi provado em (Angulo Pava, 2007).

Além disso, as órbitas no espaço de fase são uma ferramenta poderosa para entendermos e visualizarmos os aspectos das soluções de interesse. Nesse sentido, vamos analisar as órbitas com respeito a algumas considerações sobre as constantes $|g|$ e ω . Com efeito, inicialmente consideremos $\omega = 1$ fixado, então avaliamos o comportamento para alguns valores de $|g|$ para isso, consideremos a Figura 5.2.

Com base no sistema (5.77) e na Figura 5.2, vemos que para $|g|$ pequeno, o sistema (5.77) é dominado pelo termo linear. Logo, a amplitude de valores assumidos por ϕ_ω e ϕ'_ω torna-se maior. Por outro lado, a medida que aumentamos o valor de $|g|$ frente a ω o termo $-|g|\phi_\omega$ torna-se dominante no sistema (5.77), consequentemente, isso acarreta numa menor amplitude de valores para ϕ_ω e ϕ'_ω .

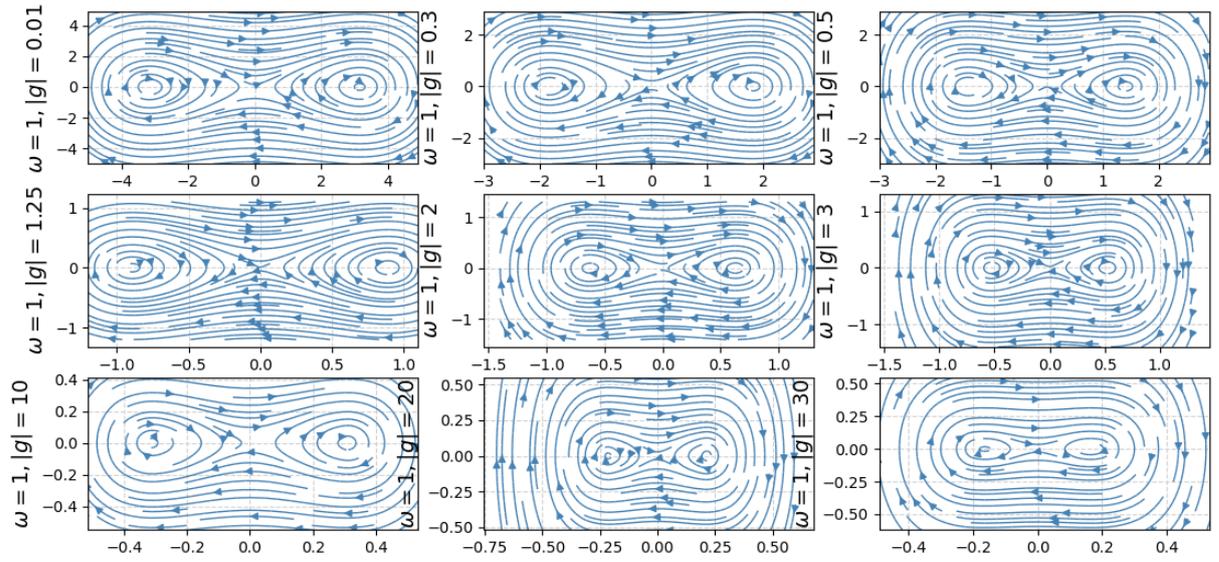


Figura 5.2 – Retratos de fases para diferentes soluções ϕ_ω da NLSE para diferentes valores de $|g|$ e $\omega = 1$. Fonte: Do Autor.

Essa análise é fisicamente interessante, pois corrobora com o discutido no Capítulo 3, frente ao fato que $|g|$ pode ser associado tanto ao amortecimento de sistemas oscilatórios quanto a modulação de intensidades de radiação. Além disso, tendo em vista que o resultado de estabilidade é obtido para todo $|g|$ real, obtemos a possibilidade de controlarmos os sistemas periódicos descritos pela NLSE, de forma estável, para quaisquer valores de $|g|$.

Por outro lado, podemos ainda estudar a influência de ω , nesse sentido obtemos os planos de fase da Figura 5.3. Com base na Figura 5.3, vemos que a medida que temos

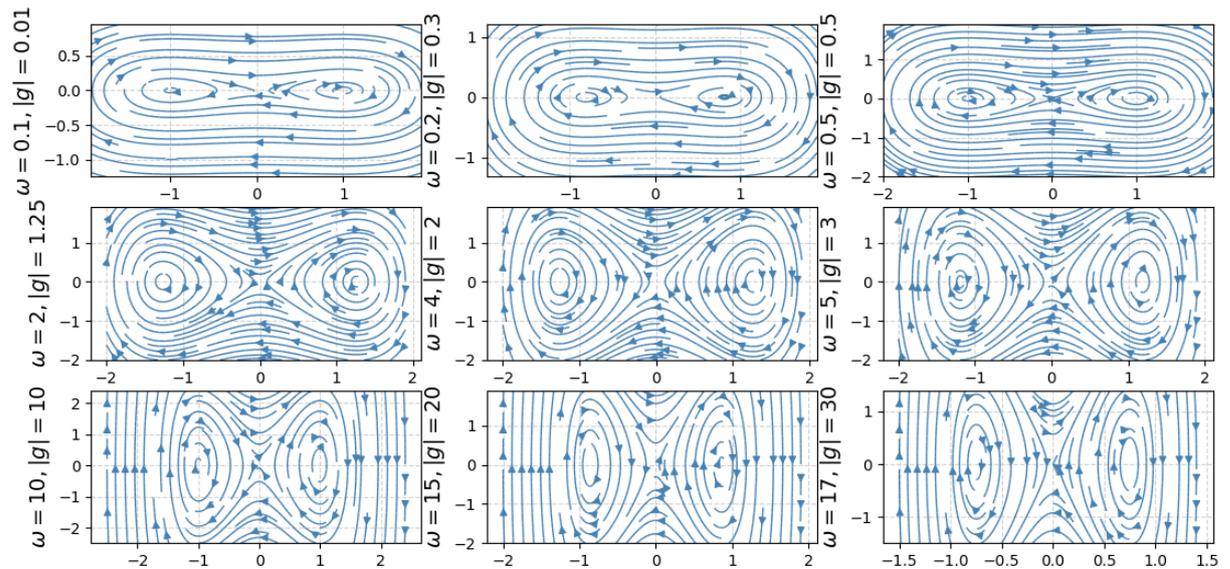


Figura 5.3 – Retratos de fases para diferentes soluções ϕ_ω da NLSE para diferentes valores de $|g|$ e ω . Fonte: Do Autor.

maiores valores para ω conseguimos aumentar a amplitude de valores assumidos por ϕ_ω e ϕ'_ω . Isso decorre de não termos discrepâncias significativas dos termos em v' em (5.77),

além disso, é possível notar ainda que a medida que temos maiores valores de ω obtemos uma menor densidade de trajetórias no espaço de fase.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho estudamos a estabilidade de soluções periódicas para a Equação de Schrödinger com não linearidade do tipo cúbica. Em suma, estudamos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = -u|u|^2 \\ u(0) = u_0 = \phi \in H_{per}^1([0, L]) \end{cases}$$

para isso, estabelecemos a boa colocação global das soluções u em $H_{per}^1([0, L])$. Mostramos a existência de soluções periódicas do tipo dnoidal dadas por

$$\phi_\omega(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{|g|(2-k^2)}} \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}} x, k \right)$$

Ademais, obtivemos o operador linearizado associado a NLSE

$$\mathcal{L}_\omega(y) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2 y}{dx^2} + (\omega - 3|g|\phi_\omega^2)y & 0 \\ 0 & -\frac{d^2 y}{dx^2} + (\omega - |g|\phi_\omega^2)y \end{pmatrix},$$

e definimos os seguintes operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dn} &= -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3|g|\phi_\omega^2 \\ \mathcal{L}_{dn}^+ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - |g|\phi_\omega^2, \end{aligned}$$

para os quais, estudamos seu espectro e garantimos alguns resultados de positividade. Por fim, de posse das quantidades conservadas

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_0^L |u'|^2 - \frac{|g|}{4} |u|^4 dx \\ F(u) &= \frac{1}{2} \int_0^L |u|^2 dx \end{aligned}$$

estabelecemos a estabilidade das órbitas $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ geradas pelas ondas dnoidais com respeito ao fluxo da NLSE. Ademais, com base nos resultados obtidos, estabelecemos o sentido físico tanto das soluções como do resultado de estabilidade

Com isso, conseguimos estudar diversas teorias matemáticas robustas que vão além dos conhecimentos de um curso de graduação, seja em matemática ou física. Além de que, dada a generalidade de aplicações físicas da NLSE, tivemos contato com diversos trabalhos em diferentes áreas da Física, a citar Matéria Condensada e Óptica Quântica. Tendo isso em vista, o desenvolvimento desse trabalho propiciou um forte enriquecimento teórico ao autor, assim, melhorando suas bases em física-matemática.

Nesse sentido, fica claro que os assuntos aqui estudados permitirão avançar em outros assuntos que tangem esse texto, em particular na elegantíssima Análise-Matemática. Ademais, citamos em especial as seguintes perspectivas futuras:

- Estudar o resultado de instabilidade para as soluções que mudam de sinal da NLSE como feito em (Angulo Pava, 2007).
- Verificar resultados de estabilidade de soluções periódicas para outras equações de Schrödinger não lineares.
- Estudar outras EDPs relevantes no contexto da Física-Matemática como a KDV, MKDV e Klein-Gordon.

REFERÊNCIAS

ALVES, G. *Funcionais de Lyapunov e a Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Equações de Evolução Não Lineares*. Tese (Doutorado) — Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2017. Citado na página [111](#).

Angulo Pava, J. Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations. *Journal of Differential Equations*, v. 235, n. 1, p. 1–30, jan. 2007. Citado 7 vezes nas páginas [15](#), [17](#), [61](#), [68](#), [111](#), [112](#) e [116](#).

BEKENSTEIN, R. et al. Optical simulations of gravitational effects in the newton–schrodinger system. *Nature Phys* 11, 872–878, 2015. Citado na página [14](#).

BOWMAN, F. *Introduction to Elliptic Functions: With Applications*. Dover Publications, 1961. (Dover Books, S). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=toQ\AQAAIAAJ>. Citado na página [23](#).

BOWMAN, F. *Introduction to Elliptic Functions: With Applications*. Dover Publications, 1961. (Dover Books, S). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=toQ\AQAAIAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas [24](#) e [25](#).

BRONSKI, J. C. et al. Stability of attractive bose-einstein condensates in a periodic potential. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 64, p. 056615, Oct 2001. Citado 4 vezes nas páginas [15](#), [41](#), [67](#) e [68](#).

BURGER, S. et al. Dark solitons in bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 83, n. 25, p. 5198–5201, dec 1999. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [68](#).

BURGER, S. et al. Generation and interaction of solitons in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 65, p. 043611, Apr 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.043611>. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [66](#) e [68](#).

BYRD, P.; FRIEDMAN, M. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). ISBN 9783642651380. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Cr\3CAAQBAJ>. Citado na página [23](#).

CAVALCANTI, M.; CAVALCANTI, V. D.; KOMORNIK, V. *Cavalcanti, Marcelo M.; Domingos Cavalcanti, Valéria N.; Komornik, Vilmos Introdução à análise funcional. (Portuguese) [Introduction to functional analysis] Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá, 2011. 481 pp. ISBN: 978-85-7628-407-9. [S.l.: s.n.], 2019. ISBN 978-85-7628-407-9. Citado 4 vezes nas páginas [20](#), [26](#), [29](#) e [40](#).*

CAZENAVE, T. *Semilinear Schrödinger equations Courant Lecture Notes Math.* [S.l.]: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, AMS, New York, Providence, RI, 2003. v. 10. Citado na página [23](#).

CRISTÓFANI, F. *Estabilidade Orbital de Ondas Solitárias para a Equação de Schrödinger Não-Linear*. Tese (Doutorado) — Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2014. Citado na página [112](#).

FIGUEIREDO D.; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3°. ed. Rio de Janeiro: Editora IMPA, 2015. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [19](#).

GERDJIKOV, V. S.; SAXENA, A. *Complete integrability of Nonlocal Nonlinear Schrödinger equation*. arXiv, 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1510.00480>. Citado na página [14](#).

GRIFFIN, A. *A Brief History of Our Understanding of BEC: From Bose to Beliaev*. arXiv, 1999. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/9901123>. Citado na página [121](#).

HAFEZ, M. New travelling wave solutions of the (1+1)-dimensional cubic nonlinear schrodinger equation using novel (g'/g)-expansion method. *Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 5, n. 2, p. 109–118, 2016. ISSN 2314-8535. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2314853516300257>. Citado na página [15](#).

HÖNIG, C. *Aplicações da topologia à análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976. (Projeto Euclides). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Xt9UAAAAYAAJ>. Citado na página [20](#).

IORIO, I. et al. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). ISBN 9780521621168. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=luiSzIgzQPQC>. Citado 7 vezes nas páginas [17](#), [20](#), [22](#), [31](#), [42](#), [44](#) e [53](#).

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989. (Wiley Classics Library). ISBN 9780471504597. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nZmpQgAACAAJ>. Citado 4 vezes nas páginas [18](#), [19](#), [20](#) e [27](#).

MAGNUS, W.; WINKLER, S. *Hill's equation*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1966. Citado 4 vezes nas páginas [31](#), [32](#), [33](#) e [34](#).

MEDEIROS, L. de J.; MELLO, E. de. *A integral de Lebesgue*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Instituto de Matemática, 1989. (Textos de métodos matemáticos). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=3PxUAAAAYAAJ>. Citado na página [20](#).

MEZA, L. E. A. *Equação de Schrödinger não linear com coeficientes modulados*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015. Citado na página [15](#).

MORI, T. *Floquet States in Open Quantum Systems*. arXiv, 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2203.16358>. Citado na página [16](#).

NATALI, F.; NEVES, A. Orbital stability of solitary waves. *IMPA Journal of Applied Mathematics*, 2013. Citado na página [31](#).

- NATALI, F.; NEVES, A. Orbital stability of solitary waves. *Journal of Applied Mathematics*, IMPA, sep 2013. Citado 3 vezes nas páginas [35](#), [38](#) e [74](#).
- NATALI, F.; PASTOR, A. Orbital stability of periodic waves for the log-kdv equation. 08 2014. Citado 8 vezes nas páginas [16](#), [17](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#), [39](#) e [70](#).
- NEVES, A. Isoinertial family of operators and convergence of kdv cnoidal waves to solitons. *Journal of Differential Equations*, v. 244, n. 4, p. 875–886, 2008. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039607003099>. Citado na página [31](#).
- NEVES, A. Floquet’s theorem and stability of periodic solitary waves. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, v. 21, p. 555–565, 09 2009. Citado na página [31](#).
- OZAWA, T. Remarks on proofs of conservation laws for nonlinear schrödinger equations. *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics*, v. 706, p. 1–6, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/2115/69511>. Citado 2 vezes nas páginas [49](#) e [111](#).
- PAVA, J. Nonlinear dispersive equations: Existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions. 01 2009. Citado na página [40](#).
- RODRIGUEZ-VEGA, M.; LENTZ, M.; SERADJEH, B. Floquet perturbation theory: formalism and application to low-frequency limit. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 9, p. 093022, sep 2018. Citado na página [16](#).
- ROGEL-SALAZAR, J. The gross–pitaevskii equation and bose–einstein condensates. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 34, n. 2, p. 247–257, jan 2013. Citado 3 vezes nas páginas [68](#), [120](#) e [125](#).
- SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. Bookman, 2013. ISBN 9788565837095. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=vcI4kgEACAAJ>. Citado 3 vezes nas páginas [14](#), [121](#) e [122](#).
- SALAS, A.; HERNÁNDEZ, J. Exact solution to duffing equation and the pendulum equation. *Applied Mathematical Sciences*, v. 8, p. 8781–8789, 12 2014. Citado na página [69](#).
- SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 28, p. 1049–1070, Dec 1926. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.28.1049>. Citado na página [14](#).
- WEINBERGER, P. Revisiting louis de broglie’s famous 1924 paper in the philosophical magazine. *Philosophical Magazine Letters - PHIL MAG LETT*, v. 86, p. 405–410, 07 2006. Citado na página [14](#).
- WEINSTEIN, M. Modulation stability of ground states of nonlinear schrödinger equations. *SIAM J. Math.*, v. 16, p. 472–490, 1985. Citado na página [30](#).

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR

Vamos deduzir a Equação de Schrödinger não linear como um caso particular da Equação de Gross-Pitaevskii. Para isso, seguiremos as linhas gerais apresentadas em (ROGEL-SALAZAR, 2013). Partiremos da equação de Schrödinger linear, buscaremos uma motivação para a inserção de um termo não linear no hamiltoniano associado a equação. Por conseguinte, usando o princípio variacional, obteremos a equação de Gross-Pitaevskii e, após aplicarmos algumas condições, obteremos a NLSE.

A dinâmica de uma partícula de um sistema quântico é regida pela equação de Schrödinger a qual é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)u(\vec{x}, t) = i\hbar u_t(\vec{x}, t), \quad (\text{A.1})$$

onde Δ é o operador laplaciano, \hbar é a constante de Planck reduzida, m a massa reduzida do sistema, $V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é o potencial, o qual pode ser uma função, ou mesmo uma distribuição. Esse termo carrega a física sobre o campo escalar em que a partícula a ser descrita está sujeita. Para os devidos fins desse trabalho, consideraremos que a função de onda $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função suave de L^2 .

A equação (A.1) pode, ainda, ser posta explicitamente como um problema de autovalores, para tanto, basta introduzirmos o operador hamiltoniano H , definido por

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}, t).$$

A definição do operador hamiltoniano, H , é feita baseada nos operadores associados as energias do sistema. Em que, o primeiro termo refere-se a parte cinética e o segunda a parte potencial. Com isso, conseguimos expressar a equação de Schrödinger por

$$Hu(\vec{x}, t) = i\hbar u_t(\vec{x}, t).$$

Em particular, na ecânica quântica de Schrödinger um dos maiores interesses é a determinação de soluções para estados estacionários, isto é, soluções para a equação (A.1) expressas por $u(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})\theta(t)$. Levando essa solução na equação de Schrödinger, obtemos as seguintes equações

$$H\phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x}), \quad (\text{A.2})$$

$$i\hbar\varphi_t(t) = -E, \quad (\text{A.3})$$

onde E é a constante de separação e denota a energia do sistema e H é o operador hamiltoniano. A equação (A.2), é chamada de equação de Schrödinger independente do

tempo e a equação (A.3) é a parte temporal, a qual é facilmente resolvida e sua solução é $\varphi(t) = \exp\left(\frac{-iE}{\hbar}t\right)$. Dessa forma, o problema de estudar estados estacionários da equação de Schrödinger se reduz a resolução da equação (A.2).

No entanto, as equações (A.1) e (A.2) são, essencialmente, lineares. Assim, por vezes, suas descrições podem limitar-se a certos regimes de condições físicas (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013). Logo, a medida que consideramos outros aspectos físicos no sistema, como a temperatura, efeitos não lineares começam emergir.

De fato, a inserção da temperatura em sistemas quânticos abre margem para uma nova classe de sistemas físicos. Esses, denominados por condensados de Bose-Einstein (BECs), foram preditos teoricamente pelos físicos Satyendra Nath Bose (1894 – 1974) e por Albert Einstein (1879 – 1955), em 1924, no entanto, sua confirmação experimental se deu apenas em 1997 (GRIFFIN, 1999). Em suma, um condensado de Bose-Einstein constitui-se de um fluido composto por um número suficientemente grande de partículas N a uma temperatura suficientemente baixa.

Sob essas condições, a energia livre para o movimento das partículas é inexistente e os Bósons, passam a compartilhar os mesmos estados quânticos e assim tornando-se indistinguíveis. Dessa forma, os BECs passam a se comportar como uma única partícula. Ademais, diversos fenômenos quânticos começam a se manifestar em escala macroscópica, a citar: formação de vórtices supercondutores, os fluidos conseguem superar a força gravitacional graças as propriedades adesivas, efeito Hall quântico e superfluidez.

Dada a presença de efeitos não lineares, a equação (A.1) não realiza uma completa descrição dos BECs. No entanto, os físicos Eugene P. Gross and Lev Petrovich Pitaevskii obtiveram uma descrição para estados em um condensado composto por Bósons, empregando a aproximação de Hartree-Fock. Para tanto, os mesmos consideraram um hamiltoniano usual em mecânica quântica, somado a um termo de interação entre os Bósons. Então, por meio de métodos variacionais, obtiveram a equação fundamental para a descrição de condensados de Bose-Einstein, a qual é usualmente conhecida por: equação de Gross–Pitaevskii.

Tendo isso em vista, vamos, agora, deduzir a equação de Gross–Pitaevskii. Consideraremos um sistema de N partículas, num condensado de Bósons, onde cada partícula do sistema está no estado $\phi(\vec{r})$, de tal modo que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = 1, \quad (\text{A.4})$$

onde \vec{r} é denota uma componente vetorial de três coordenadas. Assim, assegura-se que a densidade de probabilidade de partículas é constante.

Além disso, vamos impor a hipótese de que os estados $\phi(r_i)$ de todas as i –ésimas partículas são independentes uma das outras. Assim, podemos escrever a função de onda

$u(\vec{r}, t)$ através do produto tensorial, o qual denotaremos por \otimes , de todas as funções de estado, isto é

$$u(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}_1) \otimes \phi(\vec{r}_2) \otimes \phi(\vec{r}_3) \otimes \dots \otimes \phi(\vec{r}_N). \quad (\text{A.5})$$

O Hamiltoniano para o sistema é escrito da seguinte forma

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{P}_i^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}_i) \right) + \frac{g}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (\text{A.6})$$

onde g é uma constante associada a interação das partículas, $\vec{P}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o operador momento linear associado a i -ésima partícula dada por $\vec{P}_i \equiv -i\hbar\nabla$, $V_{ext} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é o potencial das forças externas que agem no BEC, que descreve a ação de forças sobre o sistema e $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é potencial usual da equação de Schrödinger.

De posse disso, vamos obter a equação de Gross-Pitaevskii através do princípio variacional. Por simplicidade, nessa seção apenas, nós usaremos a notação de Dirac. Para mais familiaridades aos leitores, introduzimos, brevemente, os conceitos essenciais para nosso desenvolvimento a seguir

- $|u\rangle$ denota o vetor associado a função u que é chamado de ket.
- $\langle u|$ denota o funcional linear associado a função u que é chamado de bra.
- $\langle u|u\rangle$ denota o produto interno da função u com u , ou seja, $\langle u|u\rangle = \|u\|^2$.
- Seja A um operador linear bem definido em L^2 . Então, a notação $A|u\rangle$ denota o vetor gerado pela aplicação linear A .
- Seja A um operador linear bem definido em L^2 . Então, a notação $\langle u|A|u\rangle$ é a aplicação do funcional linear $\langle u|$ no vetor $A|u\rangle$.

Para mais detalhes, basta consultar qualquer literatura elementar de mecânica quântica, a citar (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013).

Com efeito, tomemos o ket $|u\rangle$ associado a função de onda $u(\vec{r}, t)$, então o funcional de energia E pode ser obtido por:

$$E = \frac{\langle u|H|u\rangle}{\langle u|u\rangle}. \quad (\text{A.7})$$

Daí, combinando o fato de que a função é normalizada u e que o número de partículas N é tal grande de modo que $N - 1 \approx N$, temos ao levar (A.6) em (A.7) o

seguinte

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\langle u|H|u \rangle}{\langle u|u \rangle} \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} \langle u|\vec{P}_i|u \rangle + \langle u|V_{ext}(\vec{r}_i)|u \rangle \right) + \frac{g}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \langle u|V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)|u \rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u^* \nabla u d^3 r_i + N \int_{\mathbb{R}^3} u^*(\vec{r}) V_{ext} u(\vec{r}) d^3 \vec{r} \\
&+ \frac{g}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}_i \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}_s u(\vec{r}_i)^* u(\vec{r}_s)^* V u(\vec{r}_i) u(\vec{r}_s) d^3 \vec{r}_s \\
&= N \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d^3 \vec{r} + N \int_{\mathbb{R}^3} V_{ext} |u|^2 d^3 \vec{r} + \frac{gN(N-1)}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\vec{r}) |u|^4 d^3 \vec{r} \\
&= N \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d^3 \vec{r} + N \int_{\mathbb{R}^3} V_{ext} |u|^2 d^3 \vec{r} + \frac{gN^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\vec{r}) |u|^4 d^3 \vec{r} \\
&= N \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla u|^2 + V_{ext} |u|^2 + \frac{Ng}{2} V |u|^4 \right) d^3 \vec{r},
\end{aligned}$$

Com isso, conseguimos definir o funcional de energia E por:

$$E = N \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla u|^2 + V_{ext} |u|^2 + \frac{Ng}{2} V |u|^4 \right) d^3 \vec{r}. \quad (\text{A.8})$$

A partir disso, podemos escrever a energia para uma única partícula num estado $\phi \equiv \phi(\vec{r})$ como

$$E = N \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{ext} |\phi|^2 + \frac{Ng}{2} V |\phi|^4 \right) d^3 \vec{r}. \quad (\text{A.9})$$

Agora, minimizaremos o funcional E dado em (A.9), para isso, empregaremos a técnica dos multiplicadores de Lagrange. O funcional (A.9) fica sujeito ao vínculo $\int_{\mathbb{R}^3} |\phi|^2 d^3 \vec{r} = 1$ e assim, temos que a função auxiliar X que carrega o multiplicador de Lagrange μ é dada por

$$X = N \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{ext} |\phi|^2 + \frac{Ng}{2} V |\phi|^4 \right) d^3 \vec{r} - \mu N \int_{\mathbb{R}^3} |\phi|^2 d^3 \vec{r}. \quad (\text{A.10})$$

Aqui, exigiremos que a derivada variacional de X seja nula, isto é $\delta X = 0$ para pequenos desvios da função ϕ , ou seja $\phi \rightarrow \phi + d\phi$. De fato, sob essas condições temos

$$\begin{aligned}
|\phi + \delta\phi|^2 &= |\phi|^2 + \phi\delta\bar{\phi} + \delta\phi\bar{\phi} + \delta\phi\delta\bar{\phi} \\
|\nabla(\phi + \delta\phi)|^2 &= \nabla\phi\nabla\bar{\phi} + \nabla\phi\nabla\delta\bar{\phi} + \nabla\delta\phi\nabla\bar{\phi} + \nabla\delta\phi\nabla\delta\bar{\phi},
\end{aligned}$$

desconsiderando os termos não lineares tem-se

$$\begin{cases} |\phi + \delta\phi|^2 = \phi\delta\bar{\phi} + (\delta\phi)\bar{\phi}, \\ |\nabla(\phi + \delta\phi)|^2 = \nabla\phi\nabla\delta\bar{\phi} + \nabla\delta\phi\nabla\bar{\phi}, \\ |\phi + \delta\phi|^4 = |\phi|^2(\phi\delta\bar{\phi} + (\delta\phi)\bar{\phi}). \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Então, pondo a condição $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ na equação (A.10) temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\delta X &= N \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \delta |\nabla\phi + \delta\phi|^2 + V_{ext}(\delta|\phi + \delta\phi|^2) + \frac{Ng}{2} V \delta|\phi + \delta\phi|^4 - \mu \delta|\phi + \delta\phi|^2 \right) d^3\vec{r} \\
&= N \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\phi \nabla\delta\bar{\phi} + \nabla\delta\phi \nabla\bar{\phi}) + V_{ext}(\phi\delta\bar{\phi} + (\delta\phi)\bar{\phi}) + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 (\phi\delta\bar{\phi} + (\delta\phi)\bar{\phi}) \right. \\
&\quad \left. - \mu(\phi\delta\bar{\phi} + (\delta\phi)\bar{\phi}) \right] d^3\vec{r} \\
&= N \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi \nabla(\delta\bar{\phi}) + V_{ext}\phi(\delta\bar{\phi}) + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 \phi(\delta\bar{\phi}) - \mu\phi(\delta\bar{\phi}) \right] d^3\vec{r} + \\
&\quad + N \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla(\delta\phi) \nabla\bar{\phi} + V_{ext}(\delta\phi)\bar{\phi} + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 (\delta\phi)\bar{\phi} - \mu(\delta\phi)\bar{\phi} \right] d^3\vec{r}.
\end{aligned}$$

Para assegurar a validade do vínculo $\int_{\mathbb{R}^3} |\phi|^2 d^3\vec{r} = 1$, as variações de ϕ e $\bar{\phi}$ devem ser iguais. Nesse sentido, podemos então trabalhar apenas com uma dessas expressões, pois a outra será análoga, assim, escolhamos as com variação em $\bar{\phi}$, isto é:

$$\delta X = N \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi \nabla\delta\bar{\phi} + V_{ext}\phi\delta\bar{\phi} + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 \phi\delta\bar{\phi} - \mu\phi\delta\bar{\phi} \right] d^3\vec{r}. \quad (\text{A.12})$$

Agora, vamos expandir o termo cinético, com efeito, temos que

$$\nabla(\nabla\phi \cdot \delta\bar{\phi}) = \nabla^2(\phi)\delta\bar{\phi} + \nabla\phi \nabla\delta\bar{\phi}$$

ou seja:

$$\nabla\phi \nabla\delta\bar{\phi} = \nabla(\nabla\phi \cdot \delta\bar{\phi}) - \nabla^2(\phi)\delta\bar{\phi}.$$

De posse disso, levando a última igualdade em (A.12) temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\delta X &= N \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla(\nabla\phi \cdot \delta\bar{\phi}) - \nabla^2(\phi)\delta\bar{\phi}) + V_{ext}\phi\delta\bar{\phi} + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 \phi\delta\bar{\phi} - \mu\phi\delta\bar{\phi} \right] d^3\vec{r} \\
&= N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla(\nabla\phi \cdot \delta\bar{\phi}) d^3\vec{r} - N \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2(\phi)\delta\bar{\phi} + V_{ext}\phi\delta\bar{\phi} + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 \phi\delta\bar{\phi} - \mu\phi\delta\bar{\phi} \right] d^3\vec{r} \\
&= N \int_{\mathbb{R}^3} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2(\phi)\delta\bar{\phi} + V_{ext}\phi\delta\bar{\phi} + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 \phi\delta\bar{\phi} - \mu\phi\delta\bar{\phi} \right] d^3\vec{r},
\end{aligned}$$

onde usamos que, por construção da função de onda, temos que suas derivadas devem-se anular-se, assintoticamente, no infinito. Portanto, resta impor que $\delta X = 0$ o qual nos leva a seguinte expressão

$$0 = N \int_{\mathbb{R}^3} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2(\phi)\delta\bar{\phi} + V_{ext}\phi\delta\bar{\phi} + \frac{Ng}{2} V|\phi|^2 \phi\delta\bar{\phi} - \mu\phi\delta\bar{\phi} \right] d^3\vec{r},$$

agora, note que tanto a diferencial infinitesimal $\delta\bar{\phi}$ quanto N são não nulos, então, para obtermos a validade da igualdade acima basta exigirmos que o termo dos colchetes seja

identicamente nulo, isto é:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V_{ext} \phi + \frac{Ng}{2} V |\phi|^2 \phi - \mu \phi \right) = 0$$

então, tomando a consideração de que $u(\vec{r}, t) = \sqrt{N} \phi(\vec{r}, t)$ temos ao multiplicar a equação acima por \sqrt{N} , pondo o operador laplaciano como $\Delta \equiv \nabla^2$ e acoplando o termo $\frac{N}{2}$ em g a seguinte expressão:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}) + gV(\vec{r})|u(\vec{r}, t)|^2 \right) u(\vec{r}, t) = \mu u(\vec{r}, t). \quad (\text{A.13})$$

A equação obtida em (A.13) minimiza o problema da dinâmica das partículas num condensado de Bose-Einstein. É a chamada equação de Gross-Pitaevskii independente do tempo.

O termo $V(\vec{r})$ é chamado de potencial de interação e pode ser determinado experimentalmente, sendo dado por: $V = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ para o caso de BECs (ROGEL-SALAZAR, 2013). Assim, podemos simplesmente acoplá-lo na constante g . Por outro lado, veja que, essa é uma equação auto-adjunta, onde μ corresponde aos autovalores da função de onda $u(\vec{r}, t)$. Fisicamente, os autovalores μ correspondem ao potencial químico das espécies envolvidas no condensado e note, ainda que se $V(\vec{r}) = 0$ obtemos essencialmente uma equação do tipo de Schrödinger.

Não obstante, da equação (A.13) podemos inferir que μ é a constante de separação associada a EDP de Gross-Pitaevskii. Essa, por sua vez, deve ser associada a seguinte EDP:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u(\vec{x}, t) + V_{ext}(\vec{x}, t)u(\vec{x}, t) + g|u(\vec{x}, t)|^2 u(\vec{x}, t) = i\hbar u_t(\vec{x}, t). \quad (\text{A.14})$$

Com efeito, a equação de Gross-Pitaevskii (A.14), diferentemente da equação de Schrödinger, apresenta uma não linearidade do tipo cúbica. Ademais, a constante g para sistemas condensados, é determinada de forma experimental tendo forma explícita dada por: $g = \frac{4\pi\hbar^2 a_0 N}{m}$, em que, se $a_0 < 0$ a interação é atrativa e se $a_0 > 0$ a interação é repulsiva.

De certo, um dos casos de interesse para a equação de (A.14) é quando tomamos uma função de onda $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, ou seja, um sistema em $(1 + 1)$ dimensões. Nesse caso, a equação de Gross-Pitaevskii se reduz a seguinte

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx}(x, t) + V_{ext}(x, t)u(x, t) + g|u(x, t)|^2 u(x, t) = i\hbar u_t(x, t), \quad (\text{A.15})$$

em que x é a coordenada espacial. Em especial, a equação (A.15) corresponde essencialmente a uma equação de Schrödinger não linear.

Não obstante, podemos particularizar, ainda mais, a equação (A.15), fazendo $V_{ext}(x, t) = 0$ e escolhendo um sistema de coordenadas em que as constantes sejam unitárias, isto é $|2m| = |\hbar| = 1$, obtemos

$$-u_{xx}(x, t) + g|u(x, t)|^2u(x, t) = iu_t(x, t), \quad (\text{A.16})$$

que corresponde a NLSE estudada nesse trabalho.

APÊNDICE B – ALGORÍTIMO PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PVI AUXILIAR DA NLSE NA NOVA TEORIA FLOQUET

O PVI apresentado em (4.20) pode ser resolvido de diferentes formas e por diversos softwares como Mathematica, Maple ou Matlab. Entretanto, tendo em vista que esses softwares são pagos optamos, nesse trabalho, pela implementação de um algoritmo na linguagem Python versão 3.6.9.

Ademais, foram utilizada ainda as bibliotecas:

- Numpy, para computação científica de algumas funções elementares,
- Scipy.special, para computação das funções elípticas de Jacobi,
- Scipy.misc, para computação das derivadas numéricas necessárias,
- Matplotlib.pyplot, para visualização gráfica das soluções do PVI.

Tendo isso em vista, segue o código abaixo e os resultados por ele gerado nas mesmas condições do empregado no Teorema 4.3.

```
1  ### Chamada das Bibliotecas
import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.special as sf
5  from sympy import *
import scipy.misc as sm
7
### Parametros omega e k da onda dnoidal.
9  w = 1
k = 0.5
11 g = 1

13 ### Calculo do eta2 (e2) e do periodo L (l) da onda dnoidal
e2 = ( 2*w*(1-k**2) / (g*(2-k**2)))**(1/2)
15 l = 2 * sf.ellipk(k**2)*( 2/(2*w-g*(e2)**2) )**(1/2)
print("Valor de eta2 = {} \n Valor de L = {}".format(e2,l))
17 ### Onda dnoidal da NLSE
def f(x): return (2*w/(g*(2-k**2)))**(1/2) * sf.ellipj((w/(2-k**2))**(1/2)
* x, k**2 ) [2]
```

```

#### Calculo das derivadas primeira e segunda da onda dnoidal em 0, l
2 f10 = sm.derivative(f, 0,dx=1e-4)
  f11 = sm.derivative(f, l,dx=1e-4)
4 f20 = sm.derivative(f, 0,dx=1e-4, n=2)
  f21 = sm.derivative(f, l,dx=1e-4, n=2)
6 print("As derivadas primeiras \n  $\phi'(0) = {}$  $ \n  $\phi'(L) = {}$  $".
      format(f10, f11))
  print("As derivadas segundas \n  $\phi''(0) = {}$  $ \n  $\phi''(L) = {}$  $".
      format(f20, f21))
8 #### Definindo o problema de valor inicial auxiliar a ser resolvido.
def ode(x,y,u):
10     ode_1 = u
    ode_2 = (w-3*g*(f(x))**2)*y
12     return np.array([ode_1,ode_2])

14 y0 = -1/(f20)
  u0 = f10
16 N = 10000
  h = 0.01
18 x = []
  x_initial = 0
20 y = []
  u = []
22 x.append(x_initial)
  y.append(y0)
24 u.append(u0)
#### Metodo de Ruggen-Kutta de quarta ordem
26 for i in range(0,N-1,1):
    k11 = h*ode(x[i],y[i],u[i])[0]
28    k12 = h*ode(x[i],y[i],u[i])[1]

30    k21 = h*ode(x[i]+(h/2),y[i]+(k11/2),u[i]+(k12/2))[0]
    k22 = h*ode(x[i]+(h/2),y[i]+(k11/2),u[i]+(k12/2))[1]
32

34    k31 = h*ode(x[i]+(h/2),y[i]+(k21/2),u[i]+(k22/2))[0]
    k32 = h*ode(x[i]+(h/2),y[i]+(k21/2),u[i]+(k22/2))[1]

36    k41 = h*ode(x[i]+h,y[i]+k31,u[i]+k32)[0]
    k42 = h*ode(x[i]+h,y[i]+k31,u[i]+k32)[1]
38

40    y.append( y[i] + ((k11+2*k21+2*k31+k41)/6))
    u.append(u[i] + ((k12+2*k22+2*k32+k42)/6))
    x.append( x[i] + h)

```

```

### Calculo dos valores do periodo L e do valor de theta
2 for i in range(0,len(y)):
    if np.abs(x[i]-1) < 0.0001:
4         theta = u[i]/f20
    print("O valor de theta: {}".format(theta))
6
### Graficos das solucoes do PVI e sua derivada.
8
plt.plot(x,y, 'b', label = "$y_{1}(x)$")
10 plt.plot(x,u, 'orange', label = "$y'_{1}(x)$")
    plt.xlim(0,2*pi)
12 plt.xlabel('Eixo $x$', fontsize=16)
    plt.ylabel('$y(x)$ ', fontsize=16)
14 plt.legend(loc='upper left', borderaxespad=0.)

16 plt.grid(True, linestyle = "-", color = "lightgray")

18 plt.show()

```

Para essas condições, a solução $y_1(x)$ e sua derivada $y'_1(x)$ pode ser vista graficamente na Figura a seguir.

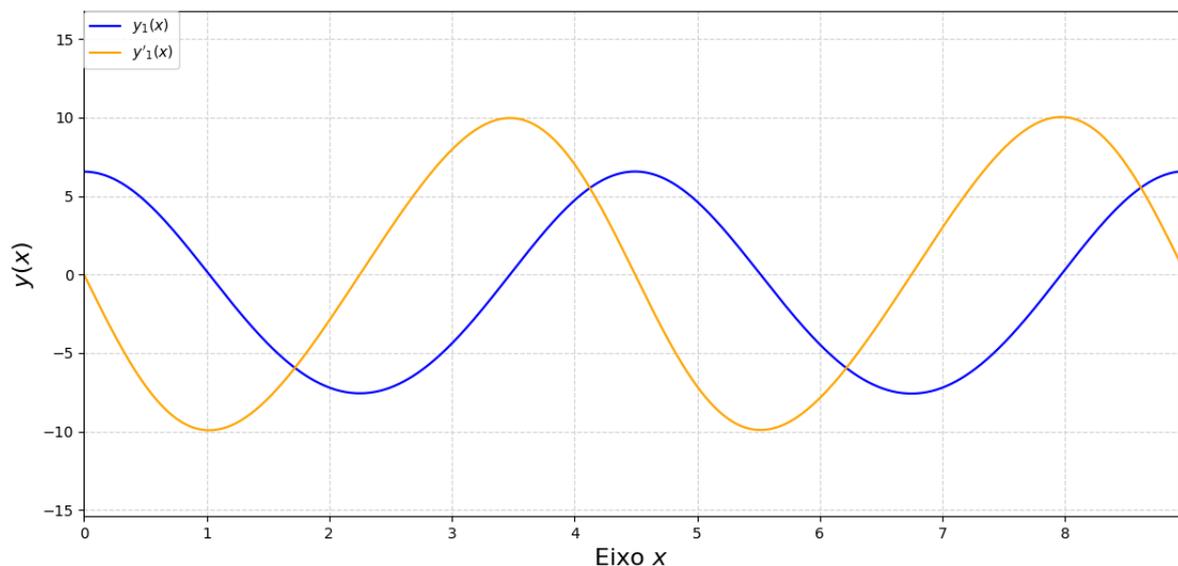


Figura B.1 – Solução numérica para o PVI (4.20) $y_1(x)$ e sua derivada $y'_1(x)$. Fonte: Do Autor.