Universidade Estadual
da Região Tocantina
do Maranhão

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, NATURAIS E TECNOLÓGICAS - CCENT
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Teorema de Baire e Aplicações

GLEIDSON FILADELFO DIMARANES

Imperatriz - MA, 2024

GLEIDSON FILADELFO DIMARANES

Teorema de Baire e Aplicações

Monografia apresentada ao curso Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Profa. Dra. Giovana Alves
(Orientadora)

Maio de 2024

Gleidson Filadelfo Dimaranes

Teorema de Baire e Aplicações/ Gleidson Filadelfo Dimaranes. – Imperatriz, Maranhão-

93p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Profa. Dra. Giovana Alves (Orientadora)

Trabalho de Conclusão de Curso – UEMASUL, Maio de 2024.

1. Topologia. 2. Espaços Métricos. 2. Teorema de Baire. Prof. Dra. Giovana Alves. Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão. Licenciatura em Matemática. Teorema de Baire e Aplicações.

CCENT - Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática intitulado **Teorema de Baire e Aplicações** de autoria de Gleidson Filadelfo Dimaranes, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Profa. Dra. Giovana Alves (Orientadora)
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Prof. Dr. Yuri Rafael Leite Pereira
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Prof. Me. Dieme Pereira da Silva
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Imperatriz, 13 de maio de 2024

Dedico esta monografia aos meus avós maternos, Francisco e Rita Mariana. Que este período de aprendizado não apenas enriqueça minha mente, mas também honre o legado de vocês que tanto me inspiram.

RESUMO

Este trabalho objetivou analisar as proposições mais significativas relacionadas ao estudo de Espaços Métricos e a aplicação desta teoria na demonstração do Teorema de Baire. Teorema este que possui inúmeras aplicações não só na Topologia, mas, principalmente, na Análise Matemática, na Análise Funcional e Geometria Diferencial. Nesse sentido, a fim de demonstrá-lo, realizamos o estudo de alguns conteúdos e definições fundamentais da teoria de Espaços Métricos, analisando suas propriedades, seus aspectos geométricos e topológicos. Em seguida, apresentamos os espaços métricos completos, bem como suas relações com as sequências de Cauchy e usamos os resultados obtidos para definirmos os Espaços de Baire e demonstrarmos o Teorema de Baire. Por fim, tratamos de algumas aplicações relevantes relacionadas a esses espaços generalizados, como a demonstração que o conjunto ternário de Cantor não é enumerável, que existem funções contínuas em todo domínio e não derivável em ponto algum do domínio, dentre outras aplicações.

Palavras-chave: Topologia, Espaços Métricos, Teorema de Baire.

ABSTRACT

This work aimed to analyze the most significant propositions related to the study of Metric Spaces and the application of this theory in proving the Baire's Theorem. This theorem has numerous applications not only in Topology but, especially, in Mathematical Analysis, Functional Analysis, and Differential Geometry. In this sense, in order to demonstrate it, we conducted the study of some fundamental contents and definitions of the theory of Metric Spaces, analyzing their properties, geometric and topological aspects. Next, we presented complete metric spaces, as well as their relationships with Cauchy sequences, and used the obtained results to define Baire Spaces and prove Baire's Theorem. Finally, we addressed some relevant applications related to these generalized spaces, such as demonstrating that the Cantor ternary set is non-enumerable, that there exist continuous functions throughout the domain and non-differentiable at any point in the domain, among other applications.

Key-words: Topology, Metric Spaces, Baire's theorem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$B(a;r)$	Bola aberta de centro a e raio r;
$B_X(a;r)$	Bola aberta de centro a e raio r, relativamente à métrica induzida do subespaço $X \subset M$;
$B[a;r]$	Bola fechada de centro a e raio r;
$B_X[a;r]$	Bola fechada de centro a e raio r, relativamente à métrica induzida do subespaço $X \subset M$;
S^1	Circulo unitário no plano $\mathbb{R}^2$;
$\mathfrak{U}$	Coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico;
$\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$	Conjunto das aplicações limitadas $f : X \to \mathbb{R}$;
$\mathscr{B}_f(X;M)$	Conjunto das aplicações limitadas situadas a uma distância finita de $f : X \to M$;
$\mathscr{B}_\alpha(X;M)$	Conjunto das aplicações $f : X \to M$; $d(f,\alpha) < \infty$, munido com a métrica da convergência uniforme;
$\mathscr{C}(M;N)$	Conjunto das aplicações contínuas $f : M \to N$;
$\mathscr{C}_0(M;N)$	Conjunto das aplicações contínuas e limitadas $f : M \to N$;
$\mathscr{C}_\alpha(X;M)$	Conjunto das aplicações contínuas $f : X \to M$; $d(f,\alpha) < \infty$, munido com a métrica da convergência uniforme;
$\mathscr{F}(X;M)$	Conjunto de todas as aplicações $f : X \to M$;
$\mathscr{L}(E;F)$	Conjunto das aplicações lineares contínuas $f : E \to F$;
L	Conjunto de índices representados genericamente por λ;
$int\ A$	Conjunto de todos os pontos interiores de A;
X'	Conjunto de todos os pontos de acumulação de X;
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais;
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros;
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais;

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	Conjunto dos números irracionais;
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
(M, d)	Conjunto M munido de uma métrica d;
$diam(X)$	Diâmetro de um conjunto limitado X;
$d(x, y)$	Distância entre dois pontos;
d_x	Distância ao ponto x;
$d(a, X)$	Distância de um ponto a um conjunto;
$d(X, Y)$	Distância entre dois conjuntos;
$S(a; r)$	Esfera de centro a e raio r;
$S_X(a; r)$	Esfera de centro a e raio r, relativamente à métrica induzida do subespaço $X \subset M$;
$\mathbb{R}^n$	Espaço métrico euclidiano;
$(F_\lambda)_{\lambda \in L}$	Família de conjunto fechados;
$\overline{X}$	Fecho do conjunto X;
∂A	Fronteira do conjunto A;
d, d', d''	Métricas euclidiana, da soma e do máximo, respectivamente;
$d(f, g)$	Métrica do supremo ou métrica da convergência uniforme;
$\|\|f - g\|\|$	Métrica do supremo ou métrica da convergência uniforme;
$\|\| \cdot \|\|$	Norma;
$< x, y >$	Produto interno;
$\mathscr{T}$	Topologia de um conjunto.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Topologia é considerada como o estudo das funções contínuas de um espaço topológico para outro (LIMA, 1970). Tais espaços topológicos provêm de estruturas que generalizam diversos conceitos da Matemática Clássica, como continuidade, convergência e limite. No entanto, para que seja possível tratar da "proximidade"de pontos, é necessário que exista uma noção de distância previamente definida no conjunto. Assim, os conjuntos que permitem tratar da distância entre dois pontos caracterizam uma classe importante de espaços topológicos: os espaços métricos.

Dentre os espaços métricos estudados em Topologia, encontram-se os espaços de Baire. Esses espaços foram discutidos inicialmente por volta de 1889 pelo matemático francês René-Louis Baire, ao propor em sua dissertação intitulada *Sur les fonctions de variable réelles* o Teorema das Categorias de Baire, ou simplesmente, Teorema de Baire. Sua demonstração é fundamentada na generalização do princípio dos intervalos encaixantes, um fato básico sobre os números reais, que torna o Teorema de Baire uma caracterização elegante para os espaços métricos completos.

Os aspectos matemáticos desses espaços desempenham um papel fundamental em diversas áreas da Matemática, a saber, na Análise Funcional, devido às suas numerosas e importantes aplicações. Através do Teorema de Baire, é possível mostrar, por exemplo, que a recíproca do Teorema da Derivabilidade e Continuidade é falsa, isto é, existem funções contínuas em todo domínio e não deriváveis em nenhum ponto do domínio.

Nessa perspectiva, reconhecendo a importância matemática dos espaços de Baire, o presente projeto tem como objetivo realizar uma discussão acerca desses espaços e a aplicação desta teoria na demonstração do Teorema de Baire. Em relação à organização deste trabalho, citamos que a obra principal adotada foi (LIMA, 2020). Contudo, diversas outras literaturas foram consultadas a fim de apresentar uma descrição mais completa dos assuntos propostos. Com o propósito de detalhar esses aspectos, segue uma descrição sobre a organização dos capítulos:

- A primeira parte deste trabalho, feita no Capítulo 1, será composta pelos conteúdos e definições fundamentais de espaços métricos, bem como suas propriedades, seus aspectos geométricos e topológicos que serão substancialmente importantes para definições e demonstrações que irão compor os capítulos 2 e 3;

- Posteriormente, no Capítulo 4, serão apresentados os espaços métricos completos, onde serão expostas as propriedades que tornam um espaço métrico completo, as medidas adotadas para completar um espaço, quando este não é completo, além de empregarmos as noções de espaços métricos topologicamente completos;

- Já no Capítulo 5, definimos os espaços de Baire e aplicamos esta teoria na demonstração do Teorema de Baire. Em seguida, apresentaremos alguns resultados teóricos relevantes, explorando as propriedades topológicas e geométricas relacionadas a esses espaços generalizados.

1 ESPAÇOS MÉTRICOS

O estudo sistemático da teoria de espaços métricos iniciou-se na primeira década do século XX, principalmente com os trabalhos de M. Frechét, F. Hausdorff e P. Urysohn. Frechét, no âmbito da Análise Funcional, percebeu que a maioria dos problemas de diferentes campos da Matemática se relaciona entre si por meio de propriedades e propôs uma abordagem unificadora que consiste em consequências lógicas que, posteriormente, resultaram em axiomas. Assim, por meio dessa abordagem axiomática, obteve-se uma estrutura matemática cuja teoria é desenvolvida de forma abstrata (KREYSZIG, 1989).

Através dessa abordagem, Frechét notou que a definição abstrata de métrica introduz noções precisas de limite, continuidade, compacidade, separabilidade, etc. Portanto, em 1906, na sua tese de doutoramento, estabeleceu a generalização de distância, na qual, (DOMINGUES, 1982, p. 37) explana que:

> Tanto no Cálculo como na Geometria, para citar dois exemplos apenas, mesmo quando estudados de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de "distância entre dois pontos" ou conceitos derivados dessa noção, como o de "vizinhança de um ponto", por exemplo. Citemos entre outras, as definições de ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem da noção de distância (ou da noção de vizinhança). Assim parece lógico quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando a resolver problemas mais amplos, buscar antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de "espaço" em que intervem tal noção.

Desse modo, os espaços métricos vêm exatamente exercer essa generalização, tornando-se substancialmente importantes à Análise Funcional, porque desempenham um papel semelhante ao do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, generalizando diversos problemas importantes de vários ramos da Análise ao criar uma base para um tratamento unificado de tais problemas (KREYSZIG, 1989).

Diante dessas considerações, apresentamos neste capítulo algumas definições e resultados importantes referentes à teoria de espaços métricos e os ilustramos com exemplos típicos, dando atenção especial a espaços de importância prática, os quais discutimos com mais detalhes. Certamente, os resultados aqui apresentados serão úteis para definições e demonstrações que serão feitas nos capítulos seguintes.

1.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 1.1. *Sejam M um conjunto não vazio e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função que associa cada par de elementos $x, y \in M$ a um número real $d(x, y)$. Dizemos que d é uma métrica sobre M se as seguintes condições forem satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(*i*) $d(x, x) = 0$;

(*ii*) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;

(*iii*) $d(x, y) = d(y, x)$;

(*iv*) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2. *Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica sobre M.*

Observação 1.1. *Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária, porém, cada elemento de um espaço métrico será sempre referido como ponto desse espaço, quer seja ele mesmo um ponto, número, vetor, função, matriz, conjunto ou outras situações que se verificam comumente. Por outro lado, chamaremos M de espaço métrico omitindo a referência à métrica, sempre que não houver possibilidade de confusão. Além disso, cabe destacar que a propriedade (iv) chama-se "desigualdade triangular", e provém do fato de que na geometria elementar cada lado de um triângulo não excede a soma das medidas dos outros dois lados. Daremos agora alguns exemplos substancialmente importantes para a teoria de espaços métricos.*

Exemplo 1.1. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais munido da função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ com a métrica $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico e denominamos d como a métrica usual da reta.*

Observação 1.2. *A reta real $\mathbb{R}$ é, sem dúvidas, o exemplo mais importante de espaço métrico que temos e, a menos que seja mencionado o contrário, nos referiremos à reta como o espaço métrico $\mathbb{R}$, deixando subtendido sua métrica. As condições que fazem de d uma métrica resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Em seguida à reta, vêm os espaços euclidianos numéricos $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.2. *Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$, onde cada n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de definir a métrica deste espaço. Consideremos então $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrários. Temos:*

(1) *Métrica euclidiana*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

(2) *Métrica da soma*

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

(3) *Métrica do máximo*

$$d''(x, y) = max\Big\{ \ |x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n| \ \Big\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Observação 1.3. *Um aspecto interessante da métrica d é a sua conexão com resultados de natureza geométrica. No caso do espaço $\mathbb{R}^2$, a métrica euclidiana naturalmente se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no plano, em coordenadas cartesianas, a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. As métricas d' e d'', apesar de não parecerem tão naturais num primeiro momento, do ponto de vista prático são substancialmente vantajosas. Mostremos agora que d, d', d'', de fato, definem métricas em $\mathbb{R}^n$.*

(1) Métrica euclidiana

Notemos que, por definição, $d(x, y) \geq 0$, para todo $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$d(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 \geq 0$$

O que garante

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \geq 0,$$

$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Para todo $1 \leq i \leq n$, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0 \quad &\iff \quad (x_i - y_i)^2 = 0 \\ &\iff \quad x_i - y_i = 0 \\ &\iff \quad x_i = y_i \\ &\iff \quad x = y \end{aligned}$$

Portanto, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(ii) Temos que $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} > 0$ se, e somente se, existir algum $1 \leq i \leq n$, tal que $x_i \neq y_i$, ou seja,

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} > 0 \iff & (x_i - y_i)^2 > 0 \\ \iff & x_i - y_i > 0 \\ \iff & x_i \neq y_i, \text{ para algum } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Portanto, $d(x,y) > 0$ se, e somente se, $x \neq y$.

(iii)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{[(-1)(y_1 - x_1)]^2 + ... + [(-1)(y_n - x_n)]^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2(y_1 - x_1)^2 + ... + (-1)^2(y_n -_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} \\ &= d(y,x), \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(iv) Esta propriedade decorre da Desigualdade de Cauchy-Schwartz cujo enunciado é o seguinte:

Lema 1.1. *Dado arbitrariamente* $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

ou seja, $2ab \leq a^2 + b^2$. Assim, tomando $a = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ e $b = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$, vale

$$2\frac{x_i}{a}\frac{y_i}{b} \leq \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}, \forall i = 1, ..., n. \iff \frac{2}{a \cdot b}\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1 + 1.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq a \cdot b = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

■

Consideremos agora um terceiro ponto, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$. Retomando à condição (iv), segue que

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i + y_i - z_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Portanto, d é uma métrica em $\mathbb{R}^n$

(2) Métrica da soma

É fácil verificar que $d'(x,y) \geq 0$, uma vez que $|x-y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. O que satisfaz

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \geq 0, \forall i = 1, ...n$$

Disso, segue que

(i)

$$\begin{aligned} d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = 0 &\iff |x_i - y_i| = 0, \forall i = 1, ..., n \\ &\iff x_i - y_i = 0, \forall i = 1, ..., n \\ &\iff x_i = y_i, \forall i = 1, ..., n \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Portanto, $d'(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(ii) Seja, $d(x,y) > 0$, então $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| > 0$ se, e somente se, existir algum $i = 1, \ldots, n$, tal que $|x_i - y_i| > 0$, isto é

$$\begin{aligned} d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| > 0 &\iff |x_i - y_i| > 0 \\ &\iff x_i - y_i > 0 \\ &\iff x_i \neq y_i, \text{ para algum } 1 \leq i \leq n \\ &\iff x \neq y \end{aligned}$$

Portanto, $d'(x,y) > 0$ se, e somente se, $x \neq y$.

(iii)

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &= |(-1)(y_1 - x_1)| + ... + |(-1)(y_i - x_i)| \\ &= |-1||y_1 - x_1| + ... + |-1||y_i - x_i| \\ &= |y_1 - x_1| + ... + |y_i - x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \\ &= d'(y,x), \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} d'(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \\ &= |(x_1 - z_1)| + ... + |(x_n - z_n)| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + ... + |x_n - y_n + y_n - z_n| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + ... + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \\ &= d'(x,y) + d'(y,z), \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$.

Conclui-se que d' é, de fato, uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

(3) Métrica do máximo

Como $|x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, então $d''(x,y) \geq 0$, isto é,

$$d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = |x_i - y_i| \geq 0, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Assim, temos

(i)

$$\begin{aligned} d''(x,y)=0 &\iff \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|=0\\ &\iff |x_i-y_i|=0\\ &\iff x_i-y_i=0\\ &\iff x_i=y_i, \forall i=1,...,n\\ &\iff x=y \end{aligned}$$

Portanto, $d''(x,y)=0$ se, e somente se, $x=y$.

(ii)

$$\begin{aligned} d''(x,y)>0 &\iff \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|>0\\ &\iff |x_i-y_i|>0\\ &\iff x_i-y_i>0\\ &\iff x_i\neq y_i,\ \text{para algum } 1\le i\le n\\ &\iff x\neq y \end{aligned}$$

Portanto, $d''(x,y)>0$ se, e somente se, $x\neq y$.

(iii)

$$\begin{aligned} d''(x,y) &= \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|\\ &= |x_i-y_i|, \forall i=1,...,n\\ &= |y_i-x_i|, \forall i=1,...,n\\ &= \max_{1\le i\le n}|y_i-x_i|\\ &= d''(y,x) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} d''(x,z) &= \max_{1\le i\le n}|x_i-z_i|\\ &= |x_i-z_i|, \forall i=1,...,n\\ &= |x_i-y_i+y_i-z_i|, \forall i=1,...,n\\ &\le |x_i-y_i|+|y_i-z_i|, \forall i=1,...,n\\ &\le \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|+\max_{1\le i\le n}|y_i-z_i|\\ &= d''(x,y)+d''(y,z) \end{aligned}$$

Segue que d'' é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.4. *Com a finalidade de garantirmos maior generalidade aos nossos desenvolvimentos ao longo do texto, quando não mencionarmos explicitamente que métrica* *estamos utilizando no espaço $\mathbb{R}^n$, consideraremos que $\mathbb{R}^n$ esteja definido sobre a métrica euclidiana d, salvo os casos em que será necessário especificarmos a métrica em que trabalhamos. As notações d, d' e d'' não serão usadas frequentemente para indicar as métricas em $\mathbb{R}^n$ acima definidas. Assim, por abuso de linguagem, se estivermos usando apenas a métrica d' numa determinada ocasião, poderemos chamá-la de d, por simplicidade. O resultado a seguir fornece uma comparação entre as métricas d, d' e d'' introduzidas no espaço $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 1.1. *Sejam d, d' e d'' as métricas definidas no Exemplo 1.2. Quaisquer que sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

Demonstração. Ver (DOMINGUES, 1982, p. 41). ∎

Observação 1.5. *Embora as métricas d, d' e d'' possam dar resultados diferentes para um mesmo par de pontos, elas são consideradas equivalentes em um sentido mais amplo, porque, em certos contextos, tais métricas podem produzir resultados semelhantes ou até idênticos. No entanto, é importante notar que essas métricas não são equivalentes em termos de suas aplicações práticas. Cada uma delas pode ser mais adequada dependendo do problema específico a ser trabalhado. Por exemplo, devido a sua natureza geométrica, a métrica d é frequentemente usada quando todas as direções são permitidas, enquanto a métrica d' é mais adequada para situações em que apenas movimentos ortogonais são permitidos, e a métrica d'' é útil quando o maior valor individual é de principal interesse.*

Definição 1.3. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que Y é um subespaço de X se $Y \subset X$.*

Observação 1.6. *Nesse caso, a métrica sobre Y é uma restrição de $d : X \times X \to \mathbb{R}$ a $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$, isto é, a distância entre os elementos de Y é a mesma quando estes são considerados elementos de X. Nessas condições, dizemos que $(Y; d_Y)$ é um subespaço do espaço métrico (X, d), onde d_Y chama-se a métrica induzida em Y pela métrica de X.*

Observação 1.7. *A Definição 1.3 é consideravelmente importante. De fato, se garantirmos a existência de um subespaço Y num espaço métrico X, consequentemente, Y é um espaço métrico em relação a métrica induzida d_Y pelo espaço métrico X. Assim, é possível obter uma gama de exemplos de espaços métricos se considerarmos os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.*

Exemplo 1.3. *Seja M um conjunto não vazio, a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é definida do seguinte modo:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & se \quad x \neq y \\ 0 & se \quad x = y \end{cases}$$

onde d é usualmente denotada por métrica discreta ou métrica zero-um.

É fácil verificar que d, assim definida, é uma métrica pelas condições da Definição 1.1. De fato, sejam $x, y, z \in M$. Temos:

(i) Se $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$

(ii) Se $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1 > 0$

(iii) Para $x = y$, temos que $d(x, y) = d(y, x) = 0$. No entanto, se $x \neq y$, temos $d(x, y) = d(y, x) = 1$

(iv) Inicialmente, tomemos $x = y = z$. Logo

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow 0 \leq 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Em seguida, se $x = y \neq z$, ou $x \neq y = z$ fica evidente a igualdade

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow 1 = 1$$

Por outro lado, para $x = z \neq y$, temos

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow 0 \leq 1 + 1 \Rightarrow 0 < 2$$

Por fim, para $x \neq y \neq z$, tem-se

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow 1 < 2$$

Portanto, d é uma métrica em M.

Observação 1.8. *Percebe-se então que, através da métrica zero-um, é possível transformar qualquer conjunto num espaço métrico o que mostra a grande versatilidade de tal métrica. Contudo, os espaços métricos obtidos por meio da métrica zero-um são bastantes triviais, mas por compensação, a sua utilização é muito útil para contraexemplos.*

Definição 1.4. *Uma norma $|| \cdot ||$ é uma função de valores reais definida num espaço vetorial X que associa cada vetor $x \in X$ a um número real $|x|$, de modo a serem satisfeitas as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

(i) $||x|| = 0 \iff x = 0$;

(ii) $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Se X é munido da norma $|| \cdot ||$ conforme definida anteriormente, então X é um espaço vetorial normado.

Observação 1.9. *Todo espaço vetorial normado torna-se um espaço métrico através da métrica* $d(x, y) = ||x - y||$.

Exemplo 1.4. *Seja* X *um conjunto arbitrário. O conjunto das funções limitadas* $f : X \to \mathbb{R}$ *denotado por* $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ *com a métrica*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathscr{B}(X; \mathbb{R})$$

é um espaço métrico.

A métrica introduzida em $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ é usualmente denotada por métrica da convergência uniforme ou métrica do supremo. Além disso, ela é proveniente da norma posta na Definição 1.4. Podemos então escrever $||f - g||$ ao invés de $d(f, g)$. Desse modo, o conjunto $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial normado. De fato, se para quaisquer $f, g \in \mathscr{B}(X; \mathbb{R})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ definirmos $f + g$, αf e $||f||$, de modo que

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \forall x \in X; \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \forall x \in X; \\ ||f|| &= sup \{|f(x)|; x \in X\}, \end{aligned}$$

garantimos tal afirmação. Das condições acima, só verificaremos aquelas que dizem respeito à norma. Com efeito, notemos que $||f||$ está bem definida, pois $sup \{|f(x)|; x \in X\}$ existe pelo fato de f ser limitada. Além disso, $||f|| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \mathscr{B}(X; \mathbb{R})$. Das condições que fazem de $||f||$ uma norma, segue que:

(i)

$$\begin{aligned} ||f|| = 0 &\iff |f(x)| = 0, \forall x \in X \\ &\iff f(x) = 0, \forall x \in X \\ &\iff f = 0; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} ||\alpha f|| &= sup \{|\alpha f(x)|; x \in X, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= sup \{|\alpha||f(x)|; x \in X, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= |\alpha| \cdot sup \{|\alpha f(x)|; x \in X, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= |\alpha| \cdot ||f||; \end{aligned}$$

(iii) Sejam $f, g \in \mathscr{B}(X; \mathbb{R})$, para qualquer $x \in X$, tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq sup \{|f(x)|; x \in X\} + sup \{|g(x)|; x \in X\} \\ &\leq ||f|| + ||g|| \end{aligned}$$

Disso, temos que $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$ é um espaço munido da métrica induzida pela norma.

1.2 BOLAS E ESFERAS

Introduziremos agora os conceitos de bolas e esferas, os quais são fundamentais para prosseguirmos com os próximos resultados. Sejam M um espaço métrico, $r > 0$ um número real e a um ponto de M, as seguintes definições são válidas:

Definição 1.5. *A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior a r:*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

Definição 1.6. *A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior ou igual a r:*

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Observação 1.10. *Notemos que a bola fechada $B[a,r]$ é formada pela bola aberta $B(a;r)$ somada aos pontos $x \in M$ cuja distância ao ponto a é igual a r. Estes últimos pontos compõem o conjunto $S(a;r)$ denotado de esfera de centro a e raio r:*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

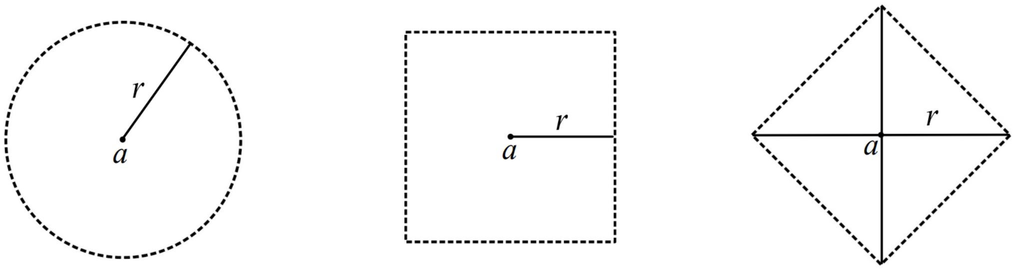
Assim, $B[a,r] = B(a;r) \cup S(a;r)$ é uma reunião disjunta.

Exemplo 1.5. *Seja X um subespaço do espaço métrico M, a bola aberta de centro $a \in X$ e raio $r > 0$ em relação a métrica induzida em X é o conjunto $B_X(a;r) = \{x \in X | d(x,a) < r\}$. Portanto, $B_X(a;r) = B(a;r) \cap X$, onde $B(a;r)$ é a bola aberta centrada em a de raio r no espaço métrico M. De modo análogo, tem-se $B_X[a;r] = B[a;r] \cap X$ e $S_X(a;r) = S(a;r) \cap X$.*

Exemplo 1.6. *Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, a bola aberta $B(a;r)$ é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, a bola fechada $B[a;r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a esfera é reduzida ao par de pontos $S(a;r) = \{a-r, a+r\}$.*

Exemplo 1.7. *No plano $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B(a;r)$ é o interior de um circulo de centro a e raio r, ou o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$. Estes casos, correspondem a usarmos em $\mathbb{R}^2$ as métricas d, d'' ou d' respectivamente.*

Figura 1.1 – Bolas no $\mathbb{R}^2$ relativas as métricas d, d'' e d', respectivamente.



$(x - a_1)^2 + (y - a)^2 < r.$ $\quad$ $|x - a_1| < r$ e $|y - a_2| < r.$ $\quad$ $|x - a_1| + |y - a_2| < r.$

Fonte: Autoral

Exemplo 1.8. *Se M está munido da métrica zero-um, então para todo $a \in M$, qualquer bola aberta de raio $r \leq 1$ consiste de apenas um ponto: seu centro. Este fenômeno decorre das próximas definições.*

Definição 1.7. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que $a \in M$ é um ponto isolado se existe uma bola aberta $B(a;r)$ que consiste unicamente do ponto a, isto é, $B(a;r) = \{a\}$.*

Definição 1.8. *Um espaço métrico M chama-se discreto quando todos os seus pontos são isolados.*

Exemplo 1.9. *Todo conjunto munido com a métrica zero-um é um espaço discreto.*

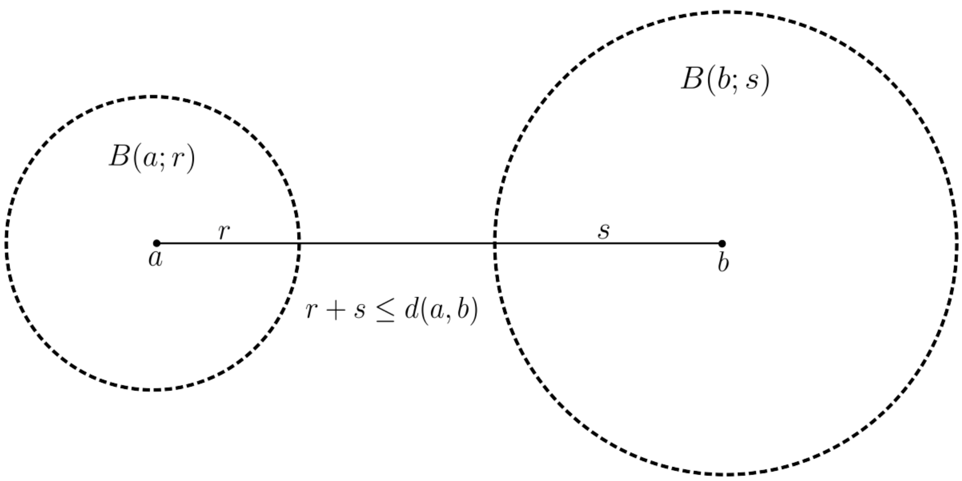
Proposição 1.2. *Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ números reais tais que $r + s \leq d(a,b)$. Então as bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ são disjuntas.*

Demonstração. Tomemos, por contradição, que exista $x \in B(a;r) \cap B(b;s)$. Logo

$$r + s \leq d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r + s,$$

um absurdo. Portanto, $B(a;r) \cap B(b;s) = \emptyset$.

Figura 1.2 – Bolas abertas disjuntas no espaço métrico M



Fonte: Autoral

■

Corolário 1.1. *Se $r + s < d(a, b)$, então as bolas fechadas $B[a; r]$ e $B[b; s]$ são disjuntas.*

Demonstração. Consideremos $r' > 0$ e $s' > 0$ números reais tais que $r' + s' < d(a, b)$. Sejam $B(a; r')$ e $B(b; s')$ bolas abertas, donde $B[a; r] \subset B(a; r')$ e $B[b; s] \subset B(b; s')$. Pela Proposição 1.2, $B(a; r')$ e $B(b; s')$ são disjuntas, logo $B[a; r]$ e $B[b; s]$ também os são. ■

1.3 CONJUNTOS LIMITADOS

Definição 1.9. *Um subconjunto X de um espaço métrico diz-se limitado quando existe uma constante real $c > 0$, tal que $d(x, y) \leq c$, para quaisquer $x, y \in X$. O menor desses números c é denotado por diâmetro de X. Assim, o diâmetro é uma cota superior, em particular, o supremo, para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre os pontos de X. Logo, definimos o diâmetro de um conjunto limitado X do seguinte modo:*

$$diam(X) = sup\,\{d(x, y); x, y \in X\}$$

Evidentemente, se X é limitado, então $Y \subset X$ também o é, valendo a relação $diam(Y) \leq diam(X)$.

Exemplo 1.10. *O diâmetro de um espaço discreto é zero, uma vez que o conjunto é reduzido a um ponto.*

Exemplo 1.11. *Toda bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$. O mesmo se aplica à bola fechada $B[a; r]$ e à esfera $S(a; r)$. Por exemplo, considerando como subespaço da reta o intervalo $[0, 1]$, a bola fechada $B[0, 1]$ coincide com o espaço todo e, portanto, seu diâmetro é $diam(B[0, 1]) = 1 \neq 2$.*

O Exemplo 1.11 nos fornece uma caracterização importante para os conjuntos limitados. De fato, um conjunto X é dito limitado se, e somente se, estiver contido numa bola. Com efeito, assumindo que X é limitado, é fácil verificar que se X for vazio, então qualquer bola aberta o contém. Por outro lado, considerando o caso em que $X \neq \emptyset$, ao fixarmos um ponto $x_0 \in X$ arbitrariamente, segue que $d(x, x_0) \leq c = diam(X)$ para todo $x \in X$. Logo $X \subset B[x; c] \subset B(x; 2c)$. Reciprocamente, se X está contido numa bola, então X é limitado porque a bola também é.

Exemplo 1.12. *Num espaço métrico M, um subconjunto $X \subset M$ é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola de M. Com efeito, se $X \subset B(a; r)$, então X é limitado e seu diâmetro não excede $\leq 2r$. Reciprocamente, se X é limitado, há dois casos a se considerar: no primeiro, se $X = \emptyset$, então X está contido em qualquer bola $B(a; r) \subset M$;*

no segundo caso, se $X \neq \emptyset$, consideramos arbitrariamente $a \in X$, existe $c > 0$ tal que $d(a,x) \leq c$, para todo $x \in X$. Portanto, $X \subset B[a;c] \subset B(a;2c)$.

Exemplo 1.13. *Se X e Y são limitados, então $X \cup Y$ é limitado. De fato, é fácil verificar quando $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$. Por outro lado, consideremos o caso arbitrário em que X e Y são ambos diferentes do conjunto vazio. Daí, fixando $a \in X$ e $b \in Y$, existe $c > 0$ tal que $d(x,a) \leq c$ e $d(y,b) \leq c$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Logo*

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq c + d(a,b) + c.$$

Tomando $k = 2c + d(a,b)$, a desigualdade é válida tanto para $x, y \in X$ quanto para $x, y \in Y$. Logo vale $d(x,y) \leq k$ para quaisquer $x, y \in X \cup Y$ e, portanto, $X \cup Y$ é um conjunto limitado.

Observação 1.11. *Generalizando o resultado do Exemplo 1.13 $n-1$ vezes, concluímos que a reunião $X_1 \cup ... \cup X_n$ de n conjuntos limitados é um conjunto limitado, em particular, todo conjunto finito sendo reunião de seus pontos é limitado.*

Definição 1.10. *Uma aplicação $f : X \to M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M, chama-se limitada quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M.*

Observação 1.12. *Em particular, se M possui uma métrica limitada, diam$(M) < +\infty$, então toda aplicação $f : X \to M$ é limitada.*

Exemplo 1.14. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/(1+x^2)$ é limitada porque a imagem $f(\mathbb{R})$ está definida no intervalo $(0,1]$. Em compensação, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = x^2$ é ilimitada, pois $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.*

Exemplo 1.15. *Generalizando o Exemplo 1.4, seja $\mathscr{B}(X;M)$ o conjunto das aplicações limitadas $f : X \to M$, onde X é um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Definimos a distância entre duas aplicações limitadas $f, g : X \to M$, pondo:*

$$d(f,g) = sup\,\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$$

A principio, notemos que $d(f,g) < +\infty$. Com efeito, fixemos arbitrariamente um ponto $x_0 \in X$. Por $f(X)$ e $g(X)$ serem subconjuntos limitados de M, existem números reais $k > 0, i > 0$ tais que $d(f(x), f(x_0)) \leq k$ e $d(g(x), g(x_0)) \leq i$ para qualquer que seja $x \in X$. Pondo $d(f(x_0), g(x_0)) = j$, então para todo $x \in X$, temos pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x), g(x_0)) \\ d(f(x), g(x)) &\leq k + i + j;\ \forall x \in X. \end{aligned}$$

Segue daí que $d(f,g) = sup\,\{d(f(x),g(x)); x \in X\} \leq k+i+j$ *é um número real bem definido. Além disso,* $d(f,g)$ *cumpre os axiomas exigidos para uma métrica. De fato, se para todo* $x \in X$*, tal que* $f(x) = g(x)$*, obtermos* $d(f(x),g(x)) = 0$ *então* $f = g$*. Por outro lado, se* $f \neq g$*, então existe algum* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) \neq g(x_0)$ *e, portanto,* $d(f(x_0),g(x_0)) > 0$*. Logo,* $d(f,g) > 0$*. Evidentemente,* $d(f(x),g(x)) = d(g(x),f(x))$ *para todo* $x \in X$*. Por fim, para todas as funções* $f,g,h \in \mathscr{B}(X;M)$*, temos* $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$*. Por definição* $d(f,h) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x),h(x))$*. Aplicando a desigualdade triangular no espaço métrico* M*, para todo* $x \in X$*, temos que*

$$d(f(x),h(x)) \leq d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x)),$$

isto é,

$$\sup_{x\in X} d(f(x),h(x)) \leq \sup_{x\in X} \{d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x))\}\,.$$

Pela definição do supremo, podemos dividi-lo, na soma, em duas partes:

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{x\in X} d(f(x),h(x)) & \leq & \sup\limits_{x\in X} d(f(x),g(x)) + \sup\limits_{x\in X} d(g(x),h(x)) \\ d(f,h) & \leq & d(f,g) + d(g,h). \end{array}$$

Portanto, a métrica do espaço das funções limitadas $\mathscr{B}(X;M)$ *está bem definida.*

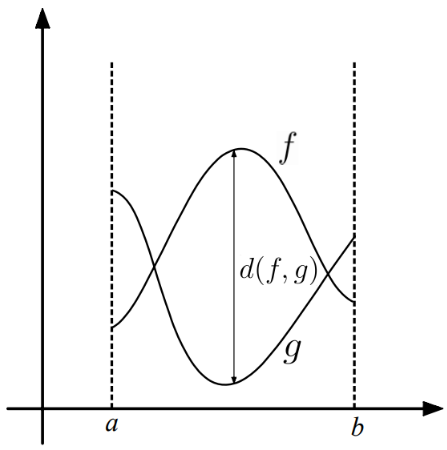
Exemplo 1.16. *Se* E *é um espaço vetorial normado, o conjunto* $\mathscr{B}(X;E)$ *possui uma estrutura natural de um espaço métrico:* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *e* $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$*. Quando* f,g *forem limitadas,* $f+g$ *e* αf *também serão. A métrica acima definida em* $\mathscr{B}(X;E)$ *provém da norma*

$$|f| = sup\,\{|f(x)|; x \in X\}\,,$$

que faz de $\mathscr{B}(X;E)$ *um espaço vetorial normado. Denotamos então* $|f-g|$ *em vez de* $d(f,g)$*.*

Exemplo 1.17. *O espaço das funções reais limitadas definidas em* $X, \mathscr{B}(X;\mathbb{R})$*, e* $\mathscr{B}(I;\mathbb{R})$ *o espaço das funções limitadas definidas num intervalo* $I = [a,b]$ *da reta são exemplos de espaços importantes a considerar. No último espaço,* $d(f,g)$ *pode ser visualizada como sup. das cordas verticais que ligam o gráfico de* f *ao gráfico* g*.*

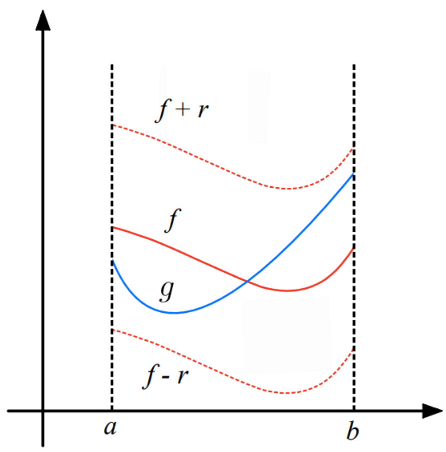
Figura 1.3 – Sup. das cordas verticais que ligam o gráfico de f ao gráfico de g



Fonte: Autoral

Dada uma função $f \in \mathscr{B}(X; M)$, a bola aberta $B(f; \varepsilon)$ de centro f e raio $\varepsilon > 0$ consiste de todas as aplicações $g : X \to M$ tais que $d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$, para todo $x \in X$. Se tratando de funções reais, $\mathscr{B}(X; \mathbb{R})$, essa bola é composta das aplicações $g : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$ para qualquer $x \in X$. No caso que $X = (a, b)$ é um intervalo da reta, a bola aberta é o conjunto de todas as aplicações $g : X \to \mathbb{R}$ cujos gráficos estão contidos na "faixa" que dista $r > 0$ da linha central representada pelo gráfico da função f.

Figura 1.4 – Bola aberta no espaço de funções



Fonte: Autoral

Exemplo 1.18. *Se $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é o conjunto dos números inteiros até n, então toda aplicação $f : X \to M$ é limitada e, escrevendo $f(1) = x_1, \ldots, f(n) = x_n$, f associa cada elemento de X à n-upla $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de elementos de M. Nessas condições, $\mathscr{B}(X; E) = M \times \cdots \times M$. A métrica de $\mathscr{B}(X; M)$ permite então considerar o produto cartesiano $M^n = M \times \cdots \times M$ como um espaço métrico, onde a distância entre duas n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ é dada por $d(x, y) = max\,\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}$.*

Observação 1.13. *Notemos que tal métrica generaliza a métrica do máximo (Exemplo* 1.2*) introduzida no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. *Normalmente, o produto cartesiano* $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ *de* n *espaços métricos* $M_1, \ldots, M_n$ *pode ser munido de métrica análoga:*

$$d(x, y) = max \{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ *e* $d(x_1, y_1) \in M_1, \ldots, d(x_n, y_n) \in M_n$.

Observação 1.14. *Ainda podemos considerar métricas semelhantes que generalizam a métrica euclidiana* $d(x, y)$ *e a métrica da soma* $d'(x, y)$ *(Exemplo* 1.2*) quando trata-se do produto cartesiano* $M_1 \times \cdots \times M_n$. *No entanto, tais métricas não possuem relação com o espaço* $\mathscr{B}(X; M)$, *com* X *e* M *arbitrários.*

1.4 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM CONJUNTO E DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

Definição 1.11. *Seja* M *um espaço métrico. Dados um ponto* $a \in M$ *e* $X \subset M$ *um subconjunto não vazio. Chamamos de distância de* $a \in M$ *ao conjunto* X *e indicamos por* $d(a, X)$, *o seguinte número real não negativo:*

$$d(a, X) = inf \{d(a, x); x \in X\}$$

Observação 1.15. *Observamos que a existência de* $d(a, X)$ *está assegurada pelo fato do conjunto* $\{d(a, x); x \in X\}$ *formado pela distância de* $a \in M$ *aos diversos pontos de* X *ser não vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância* $d(a, X)$, *salvo os casos em que pode não haver um elemento mínimo mais próximo de* $a \in M$ *do que os outros pontos de* X. *A noção de ínfimo de um conjunto de números reais existe necessariamente para generalizar a ideia de elemento mínimo. Segue da definição de ínfimo:*

1) $d(a, X) \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$;

2) Se $d(a, X) < c$ então existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < c$.

Observação 1.16. *A propriedade* 1) *afirma que o número* $d(a, x)$ *é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de* $a \in M$ *aos pontos de* X. *Por outro lado, a propriedade* 2) *diz que* $d(a, X)$ *é a maior das cotas inferiores do conjunto* $\{d(a, x); x \in X\}$. *Logo, podemos reformular a propriedade* 2) *do seguinte modo: se* $c \leq d(a, x)$ *para todo* $x \in X$, *então* $c \leq d(a, X)$.

Observação 1.17. *Evidentemente,* $a \in X \Rightarrow d(a, X) = 0$ *e* $X \subset Y \Rightarrow d(a, Y) \leq d(a, X)$. *Notemos ainda que* $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $x \in X$ *tal que* $d(a, x) < \varepsilon$.

Exemplo 1.19. *Se* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *é um subconjunto finito, então* $d(a, X)$ *é o menor dos números* $d(a, x_1), d(a, x_2), \ldots, d(a, x_n)$.

Exemplo 1.20. *Seja* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ *o circulo unitário do plano e* $0 \in \mathbb{R}^2$ *a origem. Segue que* $d(0, z) = 1$ *para todo* $z \in S^1$*,logo* $d(0, S^1) = 1$.

Exemplo 1.21. *Consideremos sobre* $\mathbb{R}$ *a métrica usual. Se* $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ *e* $a = 0$*, então* $d(a, X) = 0$

De fato, dado $\varepsilon > 0$*, sempre existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *de maneira que*

$$d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Segue então que $d(0, X) = inf \left\{d(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Observação 1.18. *Notemos que é possível se ter* $d(a, X) = 0$ *mesmo quando* $a \notin X$*. Por outro lado, é evidente que* $a \in X \Rightarrow d(a, X) = 0$*, pois neste caso, o número* 0 *pertence ao conjunto* $\{d(a, x); x \in X\}$.

Exemplo 1.22. *Dado um disco aberto* $X = B(a; \varepsilon)$ *no plano* $\mathbb{R}^2$*, tem-se* $d(b, X) = 0$ *para todo ponto* b *da circunferência* $S(a; \varepsilon)$*. Num espaço vetorial normado* E*, seja* $B = B(a; r)$ *a bola de centro* $a \in E$ *e raio* $r > 0$*. dado* $b \in E$*, tem-se* $d(b, B) = 0$ *se, e somente se,* $b \in B[a; r]$*. De fato, consideremos* $b \in B[a; r]$*, ou seja,* $|b - a| \leq r$*. Há dois casos a considerar: se for* $|b - a| < r$*, então* $b \in B$*, donde* $d(b, B) = 0$*; se for* $|b - a| = r$*, então dado arbitrariamente* ε*, obtemos um ponto* $x \in B$ *tal que* $d(b; x) < \varepsilon$*. Denotemos por* $u = (b - a)/r$ *o vetor unitário de raio* ab*. Tomando um número real* k *tal que* $r - \varepsilon < k < r \Rightarrow 0 < r - k < \varepsilon$*. Definimos* $x = a + k \cdot u$*. Então, temos que* $d(x, a) = |x - a| = k < r$*, logo* $x \in B$*. Além disso,*

$$d(x, b) = |b - x| = |b - a - k \cdot u| = |r \cdot u - k \cdot u| = r - k > \varepsilon.$$

Isso conclui a prova de que $x \in B[a; r] \Rightarrow d(x, B) = 0$*, onde* $B = B(a, r)$.

Reciprocamente, consideremos um ponto $p \in E$ *tal que* $p \notin B[a; r]$*. Mostremos que* $d(p, B) > 0$*. De fato, por* $p \notin B[a; r]$ *segue que* $|p - a| = r + c$*, com* $c > 0$*. Para todo* $x \in B$*, tem-se* $|x - a| < r$*. Decorre da desigualdade triangular que*

$$|p - a| \leq |p - x| + |x - a| \Rightarrow |p - x| \geq |p - a| - |x - a| \geq c$$

Portanto, $d(p, B) \geq c > 0$.

Proposição 1.3. *Sejam M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e um subconjunto não vazio $X \subset M$, vale:*

$$|d(a,X) - d(b,X)| \leq d(a,b).$$

Demonstração. Supondo que $d(a,X) \geq d(b,X)$, temos:

$$\begin{aligned} d(a,X) - d(b,X) &\leq d(a,b) \\ d(a,X) &\leq d(a,b) + d(b,X). \end{aligned}$$

Tomando $x_0 \in X$, tem-se $d(a,X) \leq d(a,x_0)$. Disso, temos:

$$\begin{aligned} d(a,X) &\leq d(a,x_0) \leq d(a,b) + d(b,x_0) \\ d(a,X) &\leq d(a,b) + d(b,x_0) \\ d(a,X) - d(a,b) &\leq d(b,x_0); \quad \forall x_0 \in X \end{aligned}$$

Daí, tem-se que $\inf\limits_{x \in X} \{d(a,x)\} = d(a,X) - d(a,b)$, logo

$$\begin{aligned} d(b,X) &\geq d(a,X) - d(a,b) \\ d(a,X) - d(b,X) &\leq d(a,b). \end{aligned}$$

Portanto, $|d(a,X) - d(b,X)| \leq d(a,b)$, como queríamos demonstrar. Analogamente, faz-se para $d(b,X) \geq d(a,X)$. ■

Corolário 1.2. *Dados $a, b, x \in M$, tem-se $|d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b)$.*

Demonstração. Tomemos, sem perca de generalidade, $d(a,x) \geq d(b,x)$. Segue que

$$\begin{aligned} d(a,x) - d(b,x) &\leq d(a,b) \\ d(a,x) &\leq d(a,b) + d(b,x). \end{aligned}$$

Logo, $d(a,x)$ é uma cota inferior de M, ou seja

$$\begin{aligned} d(a,M) &\leq d(a,x) \\ d(a,M) &\leq d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) \\ d(b,x) &\geq d(a,M) - d(a,b). \end{aligned}$$

Daí, tem-se $\inf\limits_{y \in M} \{d(a,y)\} = d(a,M) - d(a,b)$, logo

$$\begin{aligned} d(b,M) &\geq d(a,M) - d(a,b) \\ d(a,b) &\geq d(a,M) - d(b,M) \end{aligned}$$

Como é válido $|d(a,M) - d(b,M)| \leq d(a,b)$, pela Proposição 1.3, temos que

$$|d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b); \quad \forall a, b, x \in M.$$

De modo análogo, faz-se para $d(b,x) \geq d(a,x)$. ■

Definição 1.12. *Define-se a distância entre dois subconjuntos não vazios* $X, Y \subset M$*, pondo*

$$d(X,Y) = inf\,\{d(x,y); x \in X, y \in Y\}\,.$$

Observação 1.19. *Quando* $X \cap Y \neq \emptyset$*, tem-se* $d(X,Y) = 0$*, no entanto, a recíproca é falsa. De fato, tomando* $X = (-\infty, 0)$ *e* $Y = (0, +\infty)$ *na reta, temos* $X \cap Y = \emptyset$*, mas* $d(X,Y) = 0$*. Além disso,* $d(X,X) = 0$ *e* $d(X,Y) = d(Y,X)$*, evidentemente, mas estas são as únicas propriedades da distância entre pontos que permanecem válidas para conjuntos.*

1.5 ISOMETRIAS

Definição 1.13. *Sejam* M, N *espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \to N$ *chama-se uma imersão isométrica quando* $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ *para quaisquer que sejam* $x, y \in M$*.*

Observação 1.20. *Nessas condições, dizemos que* f *preserva distâncias.*

Exemplo 1.23. *Uma imersão isométrica* $f : M \to N$ *é sempre injetiva. De fato,* $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x,y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$*.*

Definição 1.14. *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.*

Exemplo 1.24. *Toda imersão isométrica* $f : M \to N$ *define uma isometria de* M *sobre o subespaço* $f(M) \subset N$*.*

Observação 1.21. *A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias.*

Definição 1.15. *Sejam* X *um conjunto,* (M,d) *um espaço métrico e* $f : X \to M$ *uma aplicação injetiva. Para cada par de pontos* $x, y \in X$*, ponhamos* $d(x,y) = d(f(x), f(y))$*. Isto define uma métrica* d *em* X*, chamada a métrica induzida por* f*.*

Observação 1.22. *A métrica da Definição* 1.15 *é única em* X *que torna* $f : X \to M$ *uma imersão isométrica. Um exemplo particular desta situação é o caso de um subconjunto* $X \subset M$*. A métrica que torna* $X \subset M$ *um subespaço é induzida pela aplicação de inclusão* $i : X \to M$*, tal que* $i(x) = x$*, para qualquer* $x \in X$*.*

Exemplo 1.25. *Vamos demonstrar que todo espaço métrico* $M = (M,d)$ *pode ser incorporado isometricamente no espaço vetorial normado* $E = \mathscr{B}(M;\mathbb{R})$*. Suponhamos que* M *seja limitado. Definiremos uma função* $\varphi : M \to \mathscr{B}(M;\mathbb{R})$ *estabelecendo, para cada* $x \in M$*,* $\varphi(x) = d_x$*, onde* $d_x : M \to \mathbb{R}$ *é a função "distância ao ponto* x*", ou seja,* $d_x(y) = d(x,x)$*, para todo* $y \in M$*. Como a métrica é limitada, cada função* d_x*,* $x \in M$

é limitada, de forma que φ realmente assume valores em $\mathscr{B}(M;\mathbb{R})$. Para mostrar que φ mantém distâncias, observamos que pela Proposição 1.3 , dados $x, x', y \in M$ quaisquer, temos $|d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x')$. Portanto

$$||d_x - d'_x|| = \sup_{y \in M} |d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x').$$

Por outro lado, escolhendo $y = x'$, obtemos $|d_x(y) - d_{x'}(y)| = d(x, x')$. Concluímos que $||d_x - d_{x'}|| = d(x, x')$, isto é, $d(\varphi(x), \varphi(x')) = d(x, x')$. Logo, φ é uma imersão isométrica de M em $\mathscr{B}(M;\mathbb{R})$. Quando M não é limitado, nenhuma das funções d_x é limitada. Nesse caso, fixamos um ponto $a \in M$ e definimos a função $\xi : M \to \mathscr{B}(M;\mathbb{R})$ estabelecendo $\xi(x) = d_x - d_a$. Para cada $x \in M$, como vimos acima, vale $||\xi(x)|| = ||d_x - d_a|| \leq d(a, x)$, logo $\xi(x)$ é uma função limitada, ou seja, ξ realmente assume valores em $\mathscr{B}(M;\mathbb{R})$. Além disso, $d(\xi(x), \xi(x')) = ||\xi(x) - \xi(x')|| = ||d_x - d_{x'}|| = ||d_x - d_{x'}|| = d(x, x')$ como foi provado acima. Portanto, ξ é uma imersão isométrica no espaço vetorial normado $\mathscr{B}(M;\mathbb{R})$.

Observação 1.23. *Mesmo quando M não é limitado, a aplicação $\varphi : M \to \mathscr{F}(M;\mathbb{R})$ pode ser definida por $\varphi(x) = d - x$ e a desigualdade $||d_x - d_{x'}|| \leq d(x, x')$ mostra que para x e x' arbitrários em M, as funções d_x e $d_{x'}$ estão sempre a uma distância finita uma da outra.*

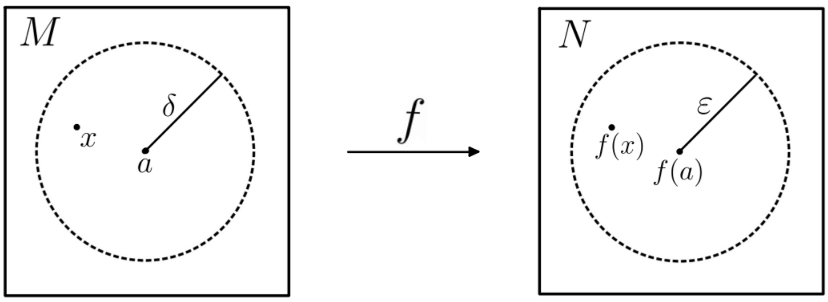
2 FUNÇÕES CONTÍNUAS

No presente capítulo, introduziremos a fundamental noção de continuidade em espaços métricos, cujo papel é equiparado à Análise da continuidade na reta. Este conceito transcende a simplicidade do domínio real, adentrando em um contexto mais amplo e abstrato de espaços métricos, onde oferece uma base sólida para a compreensão das propriedades fundamentais das funções.

Definição 2.1. *Sejam M, N espaços métricos. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(a, x) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

Definição 2.2. *Dizemos que $f : M \to N$ é continua, quando f for contínua em todos os pontos $a \in M$.*

Figura 2.1 – Aplicação contínua $f : M \to N$



Fonte: Autoral

Observação 2.1. *De forma equivalente, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$, quando para toda bola aberta $B'(f(a), \varepsilon)$ pode-se obter uma bola $B(a, \delta)$ tal que $f(B) \subset B'$.*

Observação 2.2. *No caso em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \to \mathbb{R}$. Afirmar que f é continua no ponto $a \in M$ equivale afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implicam $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Ou seja, f transforma os pontos do intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.*

Observação 2.3. *A noção de continuidade num ponto é um fenômeno local, isto é, depende apenas da continuidade de f nas proximidades do ponto.*

Exemplo 2.1. *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$, chamada de constante de Lipschitz, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana.*

Proposição 2.1. *Toda aplicação lipschitziana é contínua.*

Demonstração. Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ para todo $\varepsilon > 0$. Nesse caso, temos:

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \delta = \varepsilon$$

■

Observação 2.4. *Se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são lipschitzianas, então $f + g$ e $k \cdot f$, com $k \in \mathbb{R}$, são lipschitzianas.*

Exemplo 2.2. *Se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto a. Com efeito, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) = \{a\}$. Decorre daí que $d(a, x) < \delta$ implica $x = a$, logo $d(f(a), f(x)) = 0 < \varepsilon$.*

Observação 2.5. *Se M é um espaço discreto, toda aplicação $f : M \to N$ é contínua. Por outro lado, se N também é um espaço discreto, então $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola aberta a qual f é constante.*

Definição 2.3. *Dada $f : M \to N$, um ponto de descontinuidade da função f é um ponto $a \in M$ tal que f não é contínua no ponto a.*

Observação 2.6. *Dizer, portanto que $a \in X$ é um ponto de descontinuidade de $f : M \to N$ equivale afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ tal que $\delta > 0$, se pode encontrar $x_\delta \in M$, com $d(x_\delta, a) < \delta$, mas $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.*

Exemplo 2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para x racional e $f(x) = 1$ se x é irracional. Então todo número real é ponto de descontinuidade de f, pois não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$.*

2.1 HOMEOMORFISMOS

O interesse no estudo dos homeomorfismos é amplamente motivado pela peculiaridade observada na Topologia em comparação a outras áreas da Matemática, como Álgebra Linear e Teoria dos Grupos. Em Álgebra Linear, a inversa de uma transformação linear permanece uma transformação linear, enquanto na Teoria dos Grupos, a inversa de um homomorfismo bijetivo ainda mantém sua propriedade de homomorfismo. No entanto, em Topologia, um fenômeno intrigante se destaca: a existência de funções contínuas $f : M \to N$ bijetivas, cuja inversa é descontínua.

Esta característica única desafia as expectativas estabelecidas por outras áreas da Matemática e destaca a complexidade e riqueza intrínseca da Topologia, onde a continuidade e a inversibilidade nem sempre coexistem de maneira direta. O estudo aprofundado desses casos específicos contribui para uma compreensão mais profunda das propriedades distintivas dos espaços topológicos e a importância de se considerar cuidadosamente a natureza das funções em diferentes contextos matemáticos.

Exemplo 2.4. *Seja $M = \mathbb{R}$ a reta munida da métrica zero-um. A aplicação identidade $i : M \to \mathbb{R}$ é contínua, mas sua inversa $j : \mathbb{R} \to M$ é descontínua em cada ponto $a \in M$. De fato, tomando $\varepsilon = 1/2$, temos $B(f(a); 1/2) = \{f(a)\}$ em M. Logo não existe $\delta > 0$ tal que $f((a - \delta, a + \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.*

Observação 2.7. *O caso mencionado anteriormente é elementar, mas ao mesmo tempo, pouco realista. É improvável que uma situação semelhante surja durante a resolução de um problema em Análise ou Geometria. Vamos, então, examinar um exemplo mais natural.*

Exemplo 2.5. *Sejam $M = [-1, 0] \cup (0, +\infty)$, $N = (0, +\infty)$ e $f : M \to N$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in M$. Tem-se que f é uma bijeção de M sobre $[0, +\infty)$, sua inversa $g = f^{-1} : [0, +\infty) \to M$ é dada por $g(y) = \sqrt{y}$, se $y > 1$ e $g(y) = -\sqrt{y}$ se $0 \leq y \leq 1$. A função g é descontinua no ponto 1. Com efeito, temos $g(1) = -1$. Se for $0 < \varepsilon < 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ o ponto $1 + 1/n$ dista $1/n$ do ponto 1 mas $g(1 + 1/n) = \sqrt{1 + 1/n}$ é tal que $|g(1 + 1/n) - g(1)| > 2 > \varepsilon$.*

Definição 2.4. *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua.*

Observação 2.8. *Em tal caso, dizemos que M e N são homeomorfos.*

Definição 2.5. *Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to P$ homeomorfismos, tem-se que $f \circ g : M \to P$ e $f^{-1} : N \to M$ são homeomorfismos.*

Observação 2.9. *Dois espaços métricos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da Topologia.*

Definição 2.6. *Uma propriedade de que goza um espaço métrico M chama-se propriedade topológica quando todo espaço homeomorfo a M também goza daquela propriedade.*

Exemplo 2.6. *Seja $f : M \to N$ uma isometria, então f é um homeomorfismo.*

Observação 2.10. *As propriedades topológicas se distinguem das propriedades métricas de M que, por sua vez, são preservadas por isometrias. No entanto, veremos a seguir, que a recíproca do Exemplo 2.6 não é válida.*

Exemplo 2.7. *Seja $f : M \to N$ um homeomorfismo. Se N for um espaço métrico discreto, então M também será. De fato, consideremos um ponto $a \in M$ arbitrário, existe uma bola $B(f(a), \varepsilon) = \{f(a)\}$ que é reduzida somente a um único ponto. Por f ser um homeomorfismo, é contínua, logo existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta) \subset B(f(a), \varepsilon) = \{f(a)\}$. Como f também é injetiva, a bola $B(a, \delta)$ tem um único ponto, a saber, o ponto $a \in M$ que é, portanto, um ponto isolado.*

Observação 2.11. *Segue do Exemplo 2.7 que ser discreto e, consequentemente, não ser discreto é uma propriedade topológica. Além disso, dois espaços métricos discretos M e N*

são ditos homeomorfos se, e somente se, tem o mesmo número cardinal. Decorre daí que toda aplicação definida num espaço discreto sendo contínua, qualquer bijeção entre dois espaços métricos discretos é um homeomorfismo.

Exemplo 2.8. *Ser limitado, apesar de ser uma propriedade métrica, não é uma propriedade topológica. Basta considerarmos os conjuntos* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ *e* $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ *munidos com a métrica induzida da reta. Temos que ambos são homeomorfos por serem discretos, infinitos e enumeráveis. Mas, por outro lado,* P *é limitado, enquanto* $\mathbb{N}$ *não é.*

2.2 CONTINUIDADE UNIFORME

Definição 2.7. *Sejam* M, N *espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \to N$ *é uniformemente contínua quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que, sejam quais forem* $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exemplo 2.9. *Toda aplicação lipschitziana* $f : M \to N$ *é uniformemente contínua. Com efeito, se* $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, *sejam quais forem* $x, y \in M$. *Assim, dado* $\varepsilon > 0$, *basta tomarmos* $\delta = \varepsilon/c$. *De* $d(x, y) < \delta$, *decorre que* $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = \varepsilon$.

Observação 2.12. *A aplicação uniformemente contínua é, sem dúvida, uma forma específica de aplicação contínua, onde a escolha do* δ, *a partir de* ε, *não depende do ponto específico em que se examina a continuidade. Contudo, nem toda função contínua é uniformemente contínua. De fato, vejamos o próximo exemplo.*

Exemplo 2.10. *Consideremos a aplicação* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = -1$ *se* $x < 0$ *e* $f(x) = 1$ *se* $x > 0$. *A função assim estabelecida é contínua, mas não é uniformemente contínua, pois é possível obter pontos* $x, -x$, *tão próximos entre si quanto se queira, de tal modo que* $|f(x) - f(-x)| = 2$.

Observação 2.13. *Essa distinção entre aplicações ocorre pois, enquanto a continuidade simples é uma característica local, a continuidade uniforme é uma noção global, significando que está relacionada ao comportamento da função em todo o espaço simultaneamente.*

Observação 2.14. *É importante notar que a continuidade uniforme não é uma propriedade topológica. Mais precisamente, uma função uniformemente contínua* $f : M \to N$ *pode perder essa propriedade se mudarmos as métricas de* M *e/ou* N *para outras equivalentes. Em outras palavras, enquanto a definição de continuidade simples é dada em termos de* ε *e* δ, *a continuidade uniforme pode ser expressa apenas em termos de conjuntos abertos.*

Definição 2.8. *Uma bijeção $f : M \to N$ chama-se um homeomorfismo uniforme, quando é uniformemente contínua e sua inversa $f^{-1} : N \to M$ também o é.*

Observação 2.15. *É importante distinguir a noção de homeomorfismo uniforme da noção de homeomorfismo uniformemente contínuo, uma vez que a segunda destas noções é uma bijeção uniformemente contínua $f : M \to N$, cuja inversa é apenas contínua.*

Exemplo 2.11. *Sejam $M = (M, d_M)$ e $N = (N, d_N)$ espaços métricos e $h : M \to N$ um homeomorfismo que não é uniformemente contínuo. No espaço M, a métrica $d'_M(x, y) = d_N(h(x), h(y))$ é equivalente à métrica original d_M e agora $h : (M, d'_M) \to (N, d_N)$ é uma isometria e, consequentemente, um homeomorfismo uniformemente contínuo.*

3 LINGUAGEM BÁSICA DA TOPOLOGIA

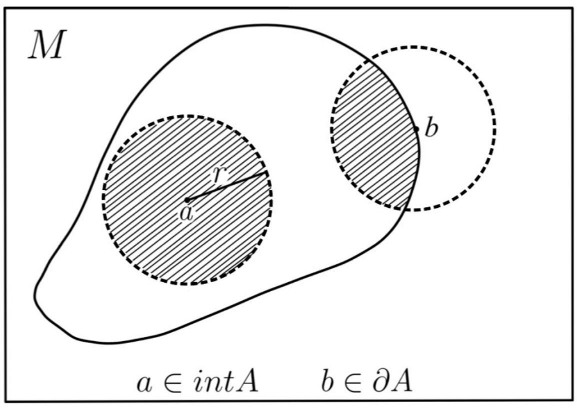
Este capítulo visa introduzir a linguagem básica da Topologia, fornecendo uma base sólida para a compreensão de conceitos mais avançados em espaços métricos. Abordaremos aspectos essenciais, incluindo a definição de abertos e fechados, espaços topológicos, vizinhanças e a relação entre a topologia e as métricas associadas. Ao compreender esses conceitos, os leitores serão equipados para explorar as propriedades topológicas que emergem naturalmente em espaços métricos, destacando a interação intrínseca entre a métrica e a topologia. Essa abordagem proporciona uma visão abrangente e sólida, essencial para o avanço no estudo de espaços métricos e suas aplicações em outros ramos da Matemática.

3.1 CONJUNTOS ABERTOS

Definição 3.1. *Dado um subconjunto A de um espaço métrico M. Um ponto $a \in A$ é dito ponto interior a A se é centro de uma bola aberta contida em A, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in A$. O conjunto formado pelos pontos interiores de A em M é denotado por $int\, A$.*

Para afirmar que um ponto $b \in A$ não é interior a A é necessário garantir que toda bola aberta centrada no ponto b contém algum ponto que não pertence a A. Em tal caso, o ponto b pertence à fronteira de A.

Figura 3.1 – Ponto interior e de fronteira.



Fonte: Autoral

Definição 3.2. *Seja $A \subset M$ um subconjunto de um espaço métrico M. Denotamos a fronteira de A pelo conjunto ∂A, formado pelos pontos $b \in M$ de modo que toda bola aberta de centro b contenha pelo menos um ponto de A e um ponto do complementar $M - A$.*

Observação 3.1. *Ao tomarmos uma bola de centro $b \in M$, pode ocorrer que $b \in A$ ou $b \in M - A$. Nesse caso, para garantirmos que $b \in \partial A$ (veremos a seguir que esta condição segue do caso $\partial A = \partial(M - A)$) é necessário provar, quando $b \in A$, que toda bola aberta centrada em b contém pontos de $M - A$. O processo é análogo quando $b \in M - A$.*

Exemplo 3.1. *Dado o intervalo $[0, 1)$ na reta, o seu interior é o intervalo aberto $(0, 1)$ e sua fronteira é composta somente pelos pontos 0 e 1. Decerto, seja $0 < a < 1$, pondo $r = min\{a, 1 - a\}$ temos $(a-r, a+r) \subset [0, 1)$ e, portanto, $a \in [0, 1)$. $0 \in \partial[0, 1)$, uma vez que todo intervalo aberto centrado em 0 contém números negativos que não pertencem ao intervalo $[0, 1)$. Além disso, apesar de $1 \notin [0, 1)$, todo intervalo aberto de centro 1 contém números positivos menores que 1 pertencentes ao intervalo $[0, 1)$, logo $1 \in \partial[0, 1)$*

Exemplo 3.2. *O interior do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio visto que nenhum intervalo aberto pode ser formado somente por números racionais. Em contrapartida, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, uma vez que todo intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.*

Observação 3.2. *Consideremos um subconjunto A de um espaço métrico M. Dado $c \in M$ arbitrariamente, existem três possibilidades que se descartam reciprocamente: ou existe uma bola aberta centrada em c contida em A, isto é, $c \in int\, A$ ou existe uma bola aberta de centro c contida em $M - A$, ou seja, $c \in int\,(M - A)$ ou toda bola aberta de centro c contém pontos de ambos conjuntos, A e $M - A$, o que é equivalente a dizer que $c \in \partial A$. A partir disso, todo conjunto A determina a decomposição do espaço como reunião de três subconjuntos dois a dois disjuntos:*

$$M = int\, A \cup \partial A \cup int\,(M - A),$$

onde um ou dois dos três subconjuntos acima podem ser vazios. Segue da definição e da decomposição que $\partial A = \partial(M - A)$.

Definição 3.3. *Um subconjunto A de um espaço métrico M é dito aberto em M se $int\, A = A$, ou seja, todos os pontos de A são interiores a A. Deste modo, para que $A \subset M$ é necessário e suficiente que $A \cap \partial A = \emptyset$.*

Exemplo 3.3. *Um conjunto que é aberto em qualquer espaço métrico é o conjunto vazio $\emptyset$. De fato, para garantirmos que um conjunto X não é aberto, é necessário exibir um ponto $x \in X$ que não seja um ponto interior a X. Quando $X = \emptyset$ é claramente impossível provarmos isso. Portanto, $\emptyset$ é aberto. Em tal caso, dizemos que $\emptyset$ é aberto por vacuidade.*

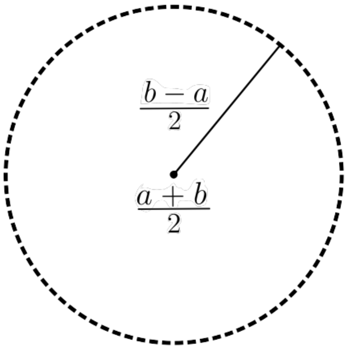
Exemplo 3.4. *Evidentemente, a reta $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.*

Exemplo 3.5. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, *seus subconjuntos e os conjuntos finitos da reta não são conjuntos abertos.*

Exemplo 3.6. *Nenhum conjunto formado apenas por números irracionais é aberto, pois não contém intervalos.*

Exemplo 3.7. *Todo intervalo* (a, b) *aberto e limitado é um subconjunto aberto da reta, uma vez que tal conjunto é a bola aberta de centro no seu ponto médio* $(a + b)/2$ *e raio* $r = (b - a)/2$.

Figura 3.2 – Representação do intervalo aberto (a, b) como subconjunto aberto.



Fonte: Autoral

Exemplo 3.8. *As semi-retas abertas* $(-\infty, b)$ *e* $(a, +\infty)$ *também são conjuntos abertos em* $\mathbb{R}$. *De fato, seja* $c \in (-\infty, b)$, *logo* $c < b$, *evidentemente. Pondo* $r = b - c$, *temos que a bola aberta* $B(c; r) \subset (-\infty, b)$. *De forma análoga, repete-se o processo para mostrar que* $(a, +\infty)$ *é aberto.*

Observação 3.3. *O resultado do Exemplo* 3.5 *segue do fato de todo conjunto aberto não vazio ser não enumerável.*

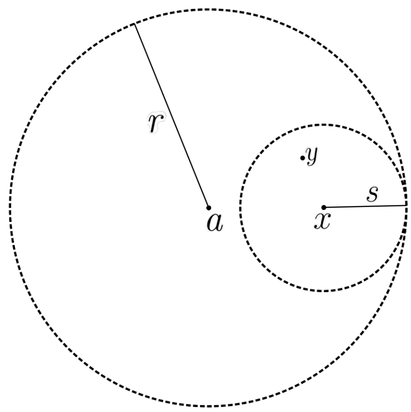
Proposição 3.1. *Em qualquer espaço métrico* M, *uma bola aberta* $B(a; r)$ *é um conjunto aberto.*

Demonstração. Dado $x \in B(a; r)$ um ponto interior, temos $d(a, x) < r$. Consideremos $B(x; s)$ tal que $s = r - d(a, x) > 0$. Seja $y \in B(x; s)$, tem-se que $d(y, x) < s = r - d(a, x)$. Logo

$$
\begin{aligned}
d(y, a) &\leq d(y, x) + d(x, a) \\
&< r - d(a, x) + d(x, a) \\
&= r
\end{aligned}
$$

Assim, $B(x; s) \subset B(a; r)$ e, por conseguinte, $y \in B(a; r)$.

Figura 3.3 – Bolas abertas $B(x; s) \subset B(a; r)$.



Fonte: Autoral

■

Corolário 3.1. *Para todo $X \subset M, int\, X$ é aberto em M.*

Demonstração. Seja $a \in int\, X$, então existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. Pela Proposição 3.1, $B(a; r)$ é um conjunto aberto, logo para todo $x \in B(a; r)$ existe $s > 0$ de modo que $B(x; s) \subset B(a; r)$ e, transitivamente, $B(x; s) \subset X$. Segue daí que todo $x \in B(a; r)$ é interior a X, isto é, $B(a; r) \subset int\, X$. Portanto, $int\, X$ é aberto. ■

Observação 3.4. *O interior de um conjunto é o maior aberto contido neste conjunto. Isto é equivalente a afirmar que se A é aberto e $A \subset X$, então $A \subset int\, X$. Analisamos isto, observando que todo ponto $a \in A$ é interior a A e, consequentemente, interior a X, uma vez que $A \subset X$.*

Observação 3.5. *Para que um ponto $a \in M$ seja um conjunto aberto em M é necessário e suficiente que a seja um ponto isolado. Com efeito, seja $\{a\} \subset M$ um conjunto aberto, então $int\, \{a\} = \{a\}$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \subset int\, \{a\} = \{a\}$. Mas por $\{a\} \subset B(a; \varepsilon)$, tem-se $B(a; \varepsilon) = int\, \{a\} = \{a\}$. Segue daí que a é um ponto isolado. Reciprocamente, assumindo que a é um ponto isolado, tem-se para todo $\varepsilon > 0$ que $B(a; \varepsilon) = \{a\}$, ou seja, $int\, \{a\} = \{a\}$ e, portanto, $\{a\}$ é um conjunto aberto. Consequentemente, um espaço métrico é discreto se, e somente se, todos os seus subconjuntos são conjuntos abertos.*

Observação 3.6. *O espaço métrico M é, naturalmente, aberto em M. Através disso, é possível perceber como a propriedade "X é aberto" é relativa, ou seja, depende do espaço M no qual se considera X imerso. A título de exemplo, consideremos $X = [0, 1)$, temos que X é um subconjunto aberto de $M = [0, 1]$: basta notar que cada intervalo do tipo $[0, \varepsilon)$ com $0 < \varepsilon \leq 1$ é uma bola aberta de centro em 0 no espaço métrico $M = [0, 1]$. Em contrapartida, $X = [0, 1)$ não é um subconjunto aberto na reta $\mathbb{R}$.*

Exemplo 3.9. *O complementar de uma bola fechada* $B[a;r]$ *em todo espaço métrico* M *é um conjunto aberto* $A = M - B[a;r]$. *Com efeito, seja* $c \in A$, *logo* $d(a,c) > r$. *Consideremos um raio* $s > 0$ *tal que* $r + s < d(a,c)$. *Pelo Corolário* 1.1, *as bolas fechadas* $B[a;r]$ *e* $B[c;s]$ *são disjuntas. Como* $B(c;s) \subset B[c;s]$, *temos que* $B[a;r] \cap B(c;s) = \emptyset$. *Isso equivale afirmar que* $B(c;s) \subset M - B[a;r]$

Proposição 3.2. *Seja* $\mathfrak{U}$ *a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico* M. *Então:*

(1) $M \in \mathfrak{U}$ *e* $\emptyset \in \mathfrak{U}$. *(O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.)*

(2) *Se* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{U}$ *então* $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{U}$. *(A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)*

(3) *Se* $A_\lambda \in \mathfrak{U}$ *para todo* $\lambda \in L$ *então* $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{U}$. *(A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)*

Demonstração. (1) Seja $a \in M$, então existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset M$, mas por definição, $B(a;r) \subset M$. Portanto, M é aberto. Além disso, $\emptyset$ também é aberto, uma vez que, se existir $B(a;r) \subset \emptyset$, estaríamos contrariando a vacuidade do $\emptyset$.

(2) Consideremos $a \in A_1, \ldots, a \in A_n$ e $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ tal que $B(a;r_1) \subset A_1, \ldots, B(a;r_n) \subset A_n$. Tomemos $r = min\{r_1, \ldots, r_n\}$ de modo que

$$B(a;r) \subset B(a;r_1), \ldots, B(a;r) \subset B(a;r_n).$$

Logo $B(a;r) \subset A_1, \ldots, B(a;r) \subset A_n$. Assim, $B(a;r) \subset \cap A_1, \ldots, \cap A_n \in \mathfrak{U}$.

(3) Sejam $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e $\lambda_0 \in L$ de modo que $a \in A_{\lambda_0}$. Por a ser ponto interior de A_{λ_0}, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Como $A_{\lambda_0} \subset \bigcup A_\lambda$, tem-se

$$B(a;\varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Portanto, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto. ∎

Observação 3.7. *O item* (2) *da proposição acima pode não ser verdadeiro caso considerarmos uma família infinita de abertos, isto é, a interseção de uma família de abertos pode não ser um conjunto aberto. Tal é, por exemplo, o caso de um ponto* $a \in M$ *não ser aberto em* M *salvo quando é isolado. Contudo, todo ponto* a *é interseção de uma família enumerável de abertos, em particular,* $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(a; \frac{1}{n}\right)$. *A valer, se* $x \neq a$ *então* $d(x,a) > 0$, *logo existe* $n \in \mathbb{N}$ *de modo que* $d(x,a) > \frac{1}{n}$. *Deste modo,* $x \notin B(a;1/n)$ *o que garante que a interseção de todas as bolas abertas* $B(a;1/n)$ *é composta somente pelo ponto* $\{a\}$.

Corolário 3.2. *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de boas abertas.*

Demonstração. Se $A = \bigcup B_\lambda$ é uma reunião de bolas abertas, pela Proposição 3.1 e do item (3) da Proposição 3.2 A é aberto em M. Reciprocamente, se A é aberto então, para cada $x \in A$, podemos obter uma bola aberta B_x donde $x \in B_x \subset A$. Isso é equivalente a $\{x\} \subset B_x \subset A$. Tomando reuniões, temos $A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in A} B_x \subset A$. Portanto, $A = \bigcup\limits_{x \in A} B_x$, o que garante que todo aberto é reunião de bolas abertas. ■

Exemplo 3.10 (Abertos num subespaço)**.** *Seja $X \subset M$. Considerando em X a métrica induzida por M, os conjuntos abertos no subespaço métrico X são as interseções $A \cap X$, no qual A é aberto em M. Isso se dá em virtude das bolas abertas em X terem a forma $B^X(a;r) = B(a;r) \cap X$, onde $B(a;r)$ é uma bola em M. Como os subconjuntos abertos em X são, pelo Corolário* 3.2, *reuniões de bolas abertas em X. Logo, $A' \subset X$ é aberto se, e somente se, $A' = \bigcup\limits_\lambda B_\lambda^X = \bigcup\limits_\lambda (B_\lambda \cap X) = \left(\bigcup\limits_\lambda B_\lambda \right) \cap X = A \cap X$, no qual $A = \bigcup B_\lambda$ é aberto em M.*

Definição 3.4. *Uma topologia num conjunto X é uma coleção $\mathscr{T}$ de partes de X, chamados os abertos da topologia que satisfazem às seguintes propriedades:*

(1) *$\emptyset$ e X pertencem a $\mathscr{T}$;*

(2) *Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{T}$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{T}$;*

(3) *Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \mathscr{T}$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathscr{T}$.*

Observação 3.8. *No item* (3)*, é suficiente afirmar que a interseção de dois abertos é um aberto.*

Definição 3.5. *Um espaço topológico é um par $(X; \mathscr{T})$ onde X é um conjunto e $\mathscr{T}$ é uma topologia em X. Todo espaço métrico M pode ser considerado, naturalmente, um espaço topológico, onde a coleção $\mathscr{T}$ é constituída por subconjuntos abertos de M.*

Definição 3.6. *Uma topologia $\mathscr{T}$ em X diz-se metrizável quando existe uma métrica em X em relação à qual os abertos são elementos de $\mathscr{T}$. Para que duas métricas, d_1 e d_2, sobre um conjunto X sejam ditas equivalentes é necessário e suficiente que ambas determinem a mesma topologia em X*

Definição 3.7. *Um espaço topológico X é dito de Hausdorff quando, para cada par de pontos distintos x,y em X, existam abertos U, V tais que $x \in U$ e $y \in Y$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Observação 3.9. *A Proposição* 1.2 *garante que todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff. A topologia discreta é um exemplo de espaço de Hausdorff, no qual todas as partes de X são conjuntos abertos. Com efeito, nenhuma topologia sobre X pode conter mais subconjuntos abertos do que esta. Outro exemplo de espaço de Hausdorff é a topologia caótica (ou trivial), onde somente $\emptyset$ e X são tomados como conjuntos abertos.*

3.2 CONJUNTOS FECHADOS

Definição 3.8. *Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é dito aderente a um subconjunto $X \subset M$ quando $d(a, X) = 0$. Isso equivale afirmar que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a, isto é, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$.*

Outras formas de indicar que $a \in M$ é um ponto aderente a $X \subset M$ são:

(1) *para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$;*

(2) *para todo aberto A contendo o ponto a, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$;*

(3) *toda vizinhança de a tem pontos em comum com X.*

Observação 3.10. *Outra maneira muito elegante de caracterizarmos ponto aderente a um subconjunto $X \subset M$ é quando $a \in M$ for limite de um sequência de pontos $x_n \in X$, porém, por não termos determinado até o momento limites de sequências em espaços métricos nos ateremos apenas aos conceitos postos na Definição* 3.8.

Exemplo 3.11. *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos da fronteira ∂X também são aderentes a X. A título de exemplo, se $X = [0, 1)$ na reta $\mathbb{R}$, então 1 é aderente a X.*

Definição 3.9. *O fecho de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X. Nesse caso, afirmar que $a \in \overline{X}$ equivale dizer que o ponto a é aderente a X em M.*

Observação 3.11. *A fim de que $a \notin \overline{X}$ é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro a que não contenha nenhum ponto de X. Pela decomposição do espaço inteiro, temos $M = (int\, X) \cup \partial X \cup int\,(M - X)$ uma reunião disjunta, decorre daí que $\overline{X} = (int\, X) \cup \partial X$ e, por consequência, $M - \overline{X} = int\,(M - X)$. Portanto, $a \notin \overline{X} \Leftrightarrow a \in int\,(M - X)$.*

Definição 3.10. *Um subconjunto $X \subset M$ é considerado denso em M quando $\overline{X} = M$, isto é, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X, ou ainda, para cada aberto não vazio $A \subset M$, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$.*

Exemplo 3.12. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Além disso, o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais também o é. Decorre disso que todo intervalo aberto da reta contém números racionais e números irracionais.*

Proposição 3.3. *Para todo ponto $a \in M$ e todo subconjunto não vazio X num espaço métrico M, tem-se $d(a, X) = d(a, \overline{X})$.*

Demonstração. Por $X \subset \overline{X}$, temos $d(a, \overline{X}) \leq d(a, X)$. Suponhamos, por contradição, que $d(a, \overline{X}) < d(a, X)$. Sendo assim, seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(a, \overline{X}) < c < d(a, X)$. Dai, segue que c é uma das cotas inferiores de $d(a, X)$, mas não é de $d(a, \overline{X})$. Logo, existe $\overline{x} \in \overline{X}$ tal que $d(a, \overline{x}) < c$. Tomemos $\varepsilon = c - d(a, \overline{x}) > 0$. Desse modo, existe $x \in X$ tal que

$$d(x, \overline{x}) < \varepsilon \Rightarrow d(x, \overline{x}) < c - d(a, \overline{x}).$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(a, \overline{x}) + d(x, \overline{x}) \\ &< d(a, \overline{x}) + c - d(a, \overline{x}) \\ &= c \end{aligned}$$

Isso implica que $d(a, X) \leq c$, mas se assim for, há contradição da hipótese, logo $d(a, X) = d(a, \overline{X})$. ■

Corolário 3.3. *Para todo subconjunto $X \subset M$, tem-se $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Demonstração. Seja $a \in \overline{\overline{X}}$, pela Proposição 3.3, tem-se $d(a, \overline{\overline{X}}) = d(a, \overline{X}) = 0$. Mas $d(a, \overline{X}) = 0$ é equivalente a afirmar que $d(a, X) = 0$, uma vez que $d(a, \overline{X}) = d(a, X) = 0$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Assim, $a \in \overline{X}$ e portanto $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. ■

Definição 3.11. *Um subconjunto F de um espaço métrico M diz-se fechado quando o seu complementar, $M - F$ é aberto.*

Observação 3.12. *A fim de que X seja um subconjunto fechado de M, é necessário e suficiente que, para cada ponto $x \in M - X$ exista um aberto U_x com $x \in U_x \subset M - X$, isto é, $x \in U_x$ e $U_x \cap X = \emptyset$. Isso equivale afirmar que $M - X = \bigcup U_x, x \in M - X$ é uma reunião de abertos. Logo, pela Proposição 3.2, $M - X$ é um conjunto aberto. A proposição seguinte relaciona conjuntos fechados com o fecho.*

Proposição 3.4. *Dado $F \subset M$, a fim de que $F = \overline{F}$ é necessário e suficiente que $M - F$ seja aberto. De outro modo: um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.*

Demonstração. Se F é um conjunto fechado, então todo ponto aderente a F pertence a F. Desse modo, dado $a \in M - F$, segue que a por não pertencer a F, não é ponto aderente de tal conjunto. Assim, se $a \in M - F$, então para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \subset M - F$, donde $B(a; \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Segue daí que todo ponto $a \in M - F$ é ponto interior a $M - F$ e, portanto, $M - F$ é aberto.

Reciprocamente, se assumirmos que $M - F$ é aberto, então todo ponto a é ponto interior de $M - F$. Isto equivale afirmarmos que para todo $\varepsilon > 0$, temos $B(a; \varepsilon) \subset M - F$. Disso, tem-se $B(a; \varepsilon) \not\subset F$, ou seja, $B(a; \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Portanto, F é um conjunto fechado. ■

Corolário 3.4. *Para todo $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ é um subconjunto fechado.*

Demonstração. Pela definição de fecho, temos que todos os pontos de $\overline{X}$ são aderentes. Logo, segue da proposição 3.4 que $\overline{X}$ é fechado. ■

Observação 3.13. *Observemos, a principio, que fechado não é sinônimo de não aberto. Em tal caso, dependendo do espaço métrico M, podemos ter subconjuntos que não são abertos e nem fechados e subconjuntos que são ambas as coisas. Como já foi visto, na reta $\mathbb{R}$ o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ não é aberto e, além disso, também não é fechado, pois como existem números racionais em qualquer intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, tomando $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Segue daí que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é aberto e, consequentemente, $\mathbb{Q}$ não é fechado.*

Exemplo 3.13. *O conjunto $X = \mathbb{R} - \{0\}$ dos números reais diferentes de zero, munido com a métrica usual da reta, é um espaço desconexo pois $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ pode ser escrito como a reunião de dois intervalos abertos em X. Em contrapartida, cada um destes intervalos também é fechado, uma vez que o outro é aberto, por ser o complementar em X.*

Observação 3.14. *Afirmar que $X \subset M$ não é fechado é o mesmo que admitir a existência de algum ponto $a \notin X$, no qual $d(a, X) = 0$. Em outras palavras, para qualquer $\varepsilon > 0$, temos $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Nessas condições, este ponto pertence a fronteira de X. Desse modo, X é fechado se, e somente se, $X \supset \partial X$.*

Exemplo 3.14. *Toda bola fechada $B[a; r]$ de um espaço métrico M é um subconjunto fechado deste espaço, pois seu complementar $M - B[a; r]$ é aberto.*

Exemplo 3.15. *A fronteira ∂X de qualquer subconjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M, uma vez que pela decomposição do espaço inteiro, temos que ∂X é o complementar do aberto $(int\, X) \cup int\, (M - X)$*

Exemplo 3.16. *Todo subconjunto finito $F = \{a_1, \dots, a_n\} \subset M$ é fechado em M. Em razão disso, se $a \notin F$ então $d(a, F)$ é o menor dos números $d(a, a_1), \dots, d(a, a_n)$, logo $d(a, F) > 0$. Especialmente, todo ponto $a \in M$ é um subconjunto fechado de M.*

Proposição 3.5. *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

(1) *o conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço inteiro M são fechados;*

(2) *a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$ é um subconjunto fechado de M;*

(3) *a reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \dots, F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2, temos:

(1) M e $\emptyset$ são complementares dos conjuntos abertos $\emptyset$ e M, respectivamente, logo são fechados.

(2) Seja $A_\lambda = M - F_\lambda$. Cada A_λ é aberto em M, logo, $A = \bigcup A_\lambda$ é também aberto. Como $F = \bigcap F_\lambda = \bigcap (M - A_\lambda) = M - \bigcup A_\lambda = M - A$. Segue daí que F é fechado.

(3) Novamente, os conjuntos $A_1 = M - F_1, \dots, A_n = M - F_n$ são abertos. Logo, $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto e $F_1 \cup \cdots \cup F_n = (M - A_1) \cup \cdots \cup (M - A_n) = M - (\cap A_1 \cdots \cap A_n)$ é fechado.

■

Exemplo 3.17. *A reunião de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Desse modo, todo conjunto é reunião de seus pontos que são conjuntos fechados.*

Exemplo 3.18. *O conjunto $\mathscr{C}_0(M; N)$ das aplicações contínuas limitadas $f : M \to N$ é um subconjunto fechado do espaço $\mathscr{B}(M; N)$ das funções limitadas $f : M \to N$. Além do mais, dada qualquer $f : M \to N$, o conjunto $\mathscr{C}_f(M; N)$ das funções contínuas de M em N que estão a uma distância finita de f é um subconjunto fechado do espaço $\mathscr{B}_f(M; N)$. Se fixarmos um ponto $a \in M$, também é fechado em $\mathscr{B}_f(M; N)$ o conjunto F_a formado pelas aplicações $g : M \to N$ que estão a uma distância finita de f e são contínuas no ponto a.*

Observação 3.15. *O conceito de fecho e conjunto fechado são relativos e dependem do espaço que consideramos. tal é o caso do subconjunto $X = (1/2, 1)$ do espaço $M = [0, 1)$, donde o fecho de X em M é $\overline{X} = [1/2, 1)$ enquanto que o fecho de X em $\mathbb{R}$ é $\overline{X'} = [1/2, 1]$. Por essa razão, $[1/2, 1)$ é fechado em M, mas não é fechado em $\mathbb{R}$. A relação entre o fecho num subespaço e o fecho no espaço inteiro é dado pela próxima proposição.*

Proposição 3.6. *Seja S um subespaço do espaço métrico M. Dado um subconjunto $X \subset S$, indiquemos com $\tilde{X}$ o fecho de X em S e com $\overline{X}$ o fecho de X em M. Então $\tilde{X}$ $= \overline{X} \cap S$*

Demonstração. Se $a \in S$, a distância $d(a, X) = inf\,\{d(a, x); x \in X\}$ é a mesma, quer consideremos X como subconjunto de S, quer de M. Logo

$$\tilde{\mathrm{X}} = \{a \in S; d(a, X) = 0\} = \{a \in M; d(a, X) = 0\} \cap S = \overline{X} \cap S.$$

■

Proposição 3.7. *Se S é fechado em M, então, para todo $X \subset S$, tem-se $\tilde{X} = \overline{X}$.*

Demonstração. $X \subset S \Rightarrow \overline{X} \subset S$ (pois $\overline{S} = S$) $\Rightarrow \overline{X} \cap S = \tilde{\mathrm{X}}$. ■

Corolário 3.5. *Os subconjuntos fechados do subespaço S são as interseções $F \cap S$, dos fechados $F \subset M$ com o subespaço S.*

Demonstração. Seja $X \subset S$, temos $\tilde{\mathrm{X}} = X \Leftrightarrow X = \overline{X} \cap S \Leftrightarrow X = F \cap S$, com $F = \overline{X}$. ■

Definição 3.12. *Sejam M um espaço métrico e um subconjunto $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ é dito ponto de acumulação de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X, distinto do ponto a. Isto é*

$$(B(a; \varepsilon) - \{a\}) \cap X \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0.$$

Chamamos de derivado e denotamos por X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de X em M.

Observação 3.16. *É evidente que se toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X, então algum deles é diferente de a, logo $a \in X'$. Reciprocamente, se $a \in X'$, então toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X. De fato, dada uma bola $B(a; \varepsilon)$, existe $x_1 \neq a$ tal que $x_1 \in X \cap B(a; \varepsilon)$. Tomando $\varepsilon_1 = d(a, x_1)$, existe $x_2 \neq a$ tal que $x_2 \in X \cap B(a; \varepsilon_1)$. Seja $\varepsilon_2 = d(a, x_2)$, temos $0 < r_2 < r_1$. Existe $x_3 \neq a$, de modo que $x_3 \in X \cap B(a; \varepsilon_2)$. Repetindo esse processo indefinidamente, obtemos uma infinidade de pontos $x_1, x_2, \ldots$ pertencentes a X e contidos na bola $B(a; \varepsilon)$.*

Observação 3.17. *Para todo subconjunto finito $F \subset M$, tem-se $F' = \emptyset$.*

Exemplo 3.19. *Se X é o intervalo aberto $(0, 1)$ da reta $\mathbb{R}$, então X' é o intervalo fechado $[0, 1]$. Em tal situação, $\overline{X} = X'$. Se $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, então $P' = \{0\}$. O derivado $\mathbb{Z}'$ do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ consiste no vazio $\emptyset$, ou seja, $\mathbb{Z}$ não possui pontos de acumulação. Por fim, no conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dos números racionais, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.*

3.3 CONJUNTOS CONEXOS

Definição 3.13. *Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ de M como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ equivalem afirmar que $A = M - B$ e $B = M - A$. Consequentemente, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A, B são abertos e fechados em M.*

Observação 3.18. *Foi visto, na Observação* 3.13*, que um subconjunto X de um espaço métrico M pode ser conjuntamente aberto e fechado em M. O próprio espaço M e o conjunto vazio $\emptyset$ sempre o são. Em tal caso, chamamos a cisão $M = M \cup \emptyset$ de trivial.*

Definição 3.14. *Um espaço métrico M diz-se conexo quando a única cisão possível em M é a trivial. Um subconjunto X de um espaço métrico M é um subconjunto conexo quando, com a métrica induzida de M, $X \subset M$ é um subespaço conexo.*

Observação 3.19. *Intuitivamente, um espaço conexo é constituído de "uma só parte". Um espaço discreto com mais de um ponto, por exemplo, é desconexo (ou seja, quando não é conexo), logo, todo subconjunto $X \subset M$ constitui uma cisão $M = X \cup (M - A)$. O conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ dos números reais diferentes de zero, munido com a métrica usual da reta, é um espaço desconexo pois, pelo Exemplo* 3.13*, o subconjunto $X = (-\infty, 0) \subset \mathbb{R} - \{0\}$ é aberto e fechado em $\mathbb{R} - \{0\}$.*

Observação 3.20. *Para um espaço métrico M ser conexo é necessário e suficiente que não seja a reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios. Notemos ainda que um subconjunto $X \subset M$ é aberto se, e somente se, não contém nenhum ponto de sua fronteira e é fechado se, e somente se, contém todos os pontos da sua fronteira. Resulta disso que X é simultaneamente aberto e fechado se, e somente se, sua fronteira é vazia.*

Proposição 3.8. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

(1) *M é conexo;*

(2) *M e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de M ao mesmo tempo abertos e fechados;*

(3) *Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$.*

Demonstração.

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja M conexo. Se existir $A \subset M, A \neq M$ e $A \neq \emptyset$ com A aberto e fechado, então $M = A \cup (M \backslash A)$ é uma cisão não trivial de M, o que é um absurdo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se M não fosse conexo, existiria uma cisão não trivial $M = A \cup B$ de M. Assim, A e B seriam abertos e fechados simultaneamente, o que é uma contradição.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que exista $A \subset M, A \neq \emptyset$ e $A \neq M$ tal que $\partial A = \emptyset$. Então:

- $\partial A \cap A = \emptyset$, o que implica que A é aberto;
- $\partial A \subset A$, o que implica que A é fechado, mas isso é uma contradição.

(3) $\Rightarrow$ (2) seja $A \subset M$ aberto e fechado em M. Como A é aberto, então $\partial A \cap A = \emptyset$. Como A também é fechado, então $\partial A \subset A$. Logo $\partial A = \emptyset$ e, por hipótese, $A = M$ ou $A = \emptyset$. ■

Proposição 3.9. *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e X um conjunto conexo. Como $f : X \to f(X) \subset Y$ é ainda uma função contínua, é suficiente considerar o caso em que f é sobrejetiva.

Seja então $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e sobrejetiva e consideremos $Y = A \cup B$ uma cisão de Y. Então $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos e disjuntos. Logo, por f ser sobrejetiva, tem-se que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão e, por X ser conexo, esta cisão tem que que ser a trivial, ou seja, $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$, implicando que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, uma vez que f é sobrejetiva. Assim, Y só admite a cisão trivial e é, portanto, conexo. ■

Corolário 3.6. *Se M é conexo e N é homeomorfo a M, então N também é conexo.*

Demonstração. Se N é homeomorfo M, então existe uma aplicação contínua e sobrejetiva $f : N \to M$. Segue daí que, por M ser conexo, N também o é. ■

Exemplo 3.20. *Todo intervalo aberto da reta é conexo, pois é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Proposição 3.10. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

Demonstração. Por definição, temos que $X \subset \overline{X}$. Seja então $\overline{X} = A \cup B$ uma cisão do espaço métrico $\overline{X}$. Segue daí que $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ é uma cisão de X (pois $A \cap X$ e $B \cap X$ são abertos em X). Como X é conexo, segue que $A \cap X = \emptyset$ ou $B \cap X = \emptyset$. Assim, como X é denso em $\overline{X}$, tem-se que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, haja vista que todo aberto não vazio de $\overline{X}$ intercepta X. Assim, $\overline{X}$ só admite a cisão trivial e é, portanto, conexo. ■

Proposição 3.11. *Se $X \subset Y \subset \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Considerando X como subespaço de Y e de $\overline{X}$, temos que o fecho de X relativamente a Y é $\overline{X^Y} = \overline{X} \cap Y = Y$. Como pela proposição anterior X é denso em Y, então Y é conexo. ■

Proposição 3.12. *Seja* $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família arbitrária de conjuntos conexos num espaço métrico* M*. Se todo* X_λ *contêm o mesmo ponto* $a \in M$*, então a reunião* $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ *é conexa.*

Demonstração. Seja $X = A \cap B$ uma cisão tal que o ponto $a \in M$ pertence somente a um dos conjuntos, A ou B. Digamos que $a \in A$. Para todo $\lambda \in L$, $A \cap X_\lambda$ e $B \cap X_\lambda$ são abertos em X_λ, logo $X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda)$ é uma cisão de X_λ. Por X_λ ser conexo, tem-se que $A \cap X_\lambda = \emptyset$ ou $B \cap X_\lambda = \emptyset$. Mas, por hipótese, todos os X_λ contém o mesmo ponto $a \in M$, então $A = A \cap X_\lambda \neq \emptyset$ e $B = B \cap X_\lambda = \emptyset$. Portanto, X é conexo. ∎

Corolário 3.7. *A fim de que o espaço métrico* M *seja conexo, é necessário e suficiente que dois pontos quaisquer* $a, b \in M$ *estejam contidos em algum conexo* $X_{ab} \subset M$*.*

Demonstração. Se M for conexo, é suficiente tomar $M = X_{ab}$ para quaisquer $a, b \in M$. Reciprocamente, para todo $a, b \in M$, suponhamos que exista um conexo $X_{ab} \subset M$ tal que $a, b \in X_{ab}$. Note que para todo $a \in M$ arbitrário, porém fixo, $M = \bigcup_{b \in M} X_{ab}$. Pela proposição anterior, como X_{ab} é um conexo e todos os X_{ab} contém o mesmo ponto $a \in M$. Segue daí que, para todo $b \in M$, M é conexo. ∎

Proposição 3.13. *Todo intervalo da reta é um subconjunto conexo se, e somente se, todo subconjunto conexo for um intervalo em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Consideremos um intervalo I de extremos $a = -\infty$ e $b = +\infty$. Seja $A \subset I$ um subconjunto aberto e fechado em I. A principio, tomemos $A \neq \emptyset$ e mostremos que isso resulta $A = I$. De fato, por A ser aberto em I, existe $c \in A$, interior ao intervalo I. Seja $b' = sup\,\{t \in I; [c, t) \subset A\}$. Decorre daí que $c < b'$. Se $x \in [c, b')$, então pela definição de supremo, existe $t \in I$ com $x < t$ e $[c, t) \subset A$, tal que $x \in A$. Além disso, garantimos que $b' = b$, pois caso contrário, $b' < b$ onde $b' \in I$ e, como A é fechado em I, temos $b' \in A$, ou seja, $[c, b'] \subset A$. Mas como A é aberto em I, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[c, b' + \varepsilon) \subset A$ o que contraria a definição de b'. Assim, $b' = b$ e $[c, b') \subset A$. De modo análogo, prova-se que $(a, c] \subset A$ e, portanto, $(a, b) \subset A$. Por A ser fechado em I, o fecho de (a, b) relativamente a I está contido em A, mas tal fecho é I. Logo, $A = I$.

Reciprocamente, dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que não é um intervalo, então existe números reais $a, b \in A$, $c \notin A$, tais que $a < c < b$. Decorre daí que $B = (-\infty, c) \cap A$ e $C = (c, +\infty) \cap A$ são abertos, disjuntos e não vazios em A, donde $A = B \cup C$, mas $c \notin A$. Logo, A é desconexo. ∎

Observação 3.21. *Resulta da Proposição* 3.13 *que todo conjunto de números racionais contendo mais de um ponto é desconexo. Analogamente, todo conjunto de números irracionais com mais de um elemento é desconexo.*

Corolário 3.8. *A reta $\mathbb{R}$ é um espaço conexo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma cisão não trivial $\mathbb{R} = A \cup B$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$; digamos que $a < b$. Seja $X = \{x \in A; x < b\}$. Temos que X é não vazio, uma vez que $a \in X$. Além disso, b é uma cota superior de X. Logo, existe $c = sup X$. Segue daí que $c \leq b$. Pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existe $x \in X$ (e portanto $x \in A$) tal que $c - \varepsilon < x \leq c$. Logo $c \in \overline{A}$, mas como A é fechado, temos que $c \in A$. Assim, tem-se que $c \neq b$, pois $b \in B$. Por A também ser aberto, existe $\varepsilon > 0$ onde $c + \varepsilon < b$ e $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$. Logo, todos os pontos do intervalo $(c, c + \varepsilon)$ pertencem a X o que contradiz a definição de c. Assim, a única cisão possível em $\mathbb{R}$ é a trivial e, portanto, $\mathbb{R}$ é conexo. ∎

Corolário 3.9. *Seja M um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ uma aplicação real contínua, então $f(M)$ é um intervalo.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.9 que a imagem $f(M)$ é um subconjunto conexo da reta. Logo, pela Proposição 3.13, $f(M)$ é um intervalo. ∎

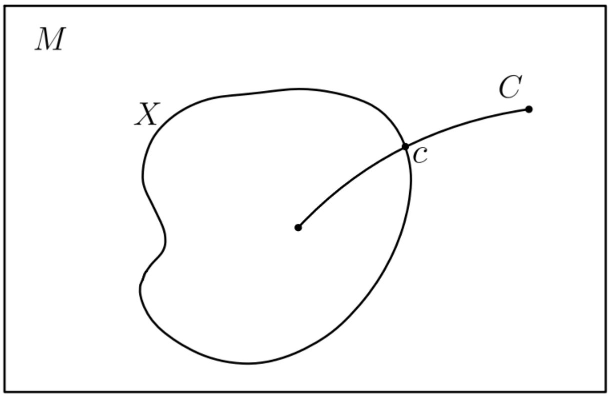
Observação 3.22. *Como resultado do Corolário* 3.9*, uma função f real e continua, definida num intervalo que assume dois valores $f(a)$ e $f(b)$, assume também todos os valores compreendidos entre a e b. Mais formalmente:*

Corolário 3.10 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$*

Demonstração. Como a imagem de $f[a, b])$ é um intervalo que contém os pontos $f(a)$ e $f(b)$, logo contém o ponto intermediário d. Assim, existe $c \in [a.b]$ tal que $f(c) = d$. Portanto, como $f(a) < f(c) < f(b)$ exclui a possibilidade de $c = a$ ou $c = b$, temos que $c \in (a, b)$

Proposição 3.14 (Teorema da Alfândega)**.** *Sejam C, X subconjuntos de um espaço métrico M. Se C é conexo e tem pontos em comum com X e com $M - X$, então algum ponto de C pertence à fronteira de X.*

Figura 3.4 – Representação do Teorema da Alfândega



Fonte: Autoral

Demonstração. Por hipótese, $C \cap X \neq \emptyset$ e $C \cap (M - X) \neq \emptyset$ implica que o subconjunto $C \cap X$ não é vazio, muito menos é completamente o espaço C. Nesse caso, existe algum ponto $c \in \partial(C \cap X)$ que também pertence ao subespaço C. Agora, mostremos que $c \in \partial(M - X)$ no subespaço X. De fato, para todo $\varepsilon > 0$ existem $p \in C \cap X \subset X$, onde $d(c, p) < \varepsilon$ e $q \in C - C \cap X = C - X \subset M - X$, onde $d(c, t) < \varepsilon$. ∎

Observação 3.23. *O Teorema da Alfândega generaliza o Teorema do Valor Intermediário. Este último resultado pode ser obtido como corolário da Proposição* 3.14*: dada* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua com* $f(a) < d < f(b)$*, tomamos* $C = [a, b]$ *e* $X = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$*. A partir da proposição* 3.14*, obtemos um ponto* $c \in \partial X$*. Nesse caso, tem-se necessariamente que* $f(c) = d$*.*

3.4 LIMITES

3.4.1 Limites de sequências

Definição 3.15. *Uma sequência (ou uma sucessão) num conjunto* M *é uma aplicação* $x : \mathbb{N} \to M$ *onde, a cada elemento* $n \in \mathbb{N}$*, a sequência faz corresponder um elemento de* M*, que denotaremos por* x_n *e chamar-se-á o n-ésimo termo (ou termo de ordem n) da sequência. A própria sequência é indicada com as notações* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$*,* (x_n) *ou* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$*. Por sua vez, usaremos as notações* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}, \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *ou* $x(\mathbb{N})$ *para denotar o conjunto dos valores, ou o conjunto dos termos da sequência.*

Observação 3.24. *Retomemos à Observação* 3.10*, onde estipulamos a convergência de sequências para pontos aderentes de um subconjunto* $X \subset M$*. Segue da Definição* 3.15 *que todos os pontos do conjunto de valores de uma sequência são pontos aderentes. Com efeito, suponhamos que exista um ponto* $x \in \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *que não é um ponto aderente desse conjunto. Isso significa que existe uma vizinhança de* x *que não possui pontos* *em comum com $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. No entanto, se assim for, ocorre uma contradição com a definição de sequência, pois a aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, atribui um termo à sequência a cada número natural. Assim, para qualquer vizinhança de x, sempre haverá um termo da sequência pertencente a esta. Contudo, veremos adiante que os casos mais interessantes que englobam este resultado ocorrem devido a recíproca não ser verdadeira, isto é, nem todo ponto aderente a $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ pertence a $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

Observação 3.25. *É importante distinguir a sequência (x_n) que é uma função do seu conjunto de valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, pois poderá ocorrer que $x_n = x_m$, enquanto que $m \neq n$. Por exemplo, se definirmos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pondo $x_n = (-1)^n$, então obtemos a sequência $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, cujo conjunto de termos é $\{-1, 1\}$. Observa-se então que entre os termos da sequência é possível ocorrer repetições de tal modo que o conjunto de valores pode até ser finito, como ocorre com o exemplo dado, ou até no caso extremo de uma sequência constante, $x_n = a$, para $n \in \mathbb{N}$. Em tal situação, o conjunto de termos reduz-se ao único elemento $\{a\}$.*

Definição 3.16. *Quando a aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ for injetiva, isto é, quando $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, diremos que (x_n) é uma sequência de termos distintos.*

Exemplo 3.21. *Fixemos $a \in \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos*

$$x_n = e^{ina} = (cos(na), sen(na)).$$

Através disso, adquirimos uma sequência (x_n) no plano $\mathbb{R}^2$ ou, em particular, no circulo S^1. Esta sequência tem repetições se, e somente se, a é um múltiplo racional de 2π, isto é, $a = 2\pi p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$e^{ima} = e^{ina};\ m \neq n \Leftrightarrow e^{i(m-n)a} = 1 \Leftrightarrow (m-n)a = 2k\pi \Leftrightarrow a = \frac{2\pi \cdot k}{m-n}.$$

Definição 3.17. *Uma subsequência da sequência (x_n) em M é uma restrição da aplicação $n \to x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Representa-se uma subsequência pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente, (x_{n_k}).*

Observação 3.26. *De maneira formal, uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ não é uma sequência em M, pois está definida apenas num subconjunto dos números naturais. Entretanto, (x_{n_k}) pode ser considerada, naturalmente, como uma aplicação*

$$1 \to x_{n_1}, 2 \to x_{n_2}, \dots, k \to x_{n_k}, \dots$$

e, consequentemente, como uma sequência em M. A própria notação $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ já a exibe como sequência. Por exemplo, a sequência $(3, 16, 64, \dots, 4^k, \dots)$ é uma subsequência de $(2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots)$, onde $\mathbb{N}'$ é o conjunto dos números pares.

Definição 3.18. *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M é dita limitada quando o conjunto de seus valores x_n for um conjunto limitado em M, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.*

Observação 3.27. *Toda subsequência de uma sequência limitada é também limitada.*

Exemplo 3.22. *Uma sequência constante $x_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ou, mais geralmente, uma sequência que assume apenas um número finito de valores, é evidentemente limitada. Se $a \in \mathbb{R}$, com $|a| > 1$, a sequência de números reais $x_n = a^n$ não é limitada, em razão da desigualdade de Bernoulli: $(1 + b^n) > 1 + n \cdot b$, se $b > -1$. No entanto, quando $|a| \leq 1$, a sequência dos números $x_n = a^n$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.19. *Num espaço métrico M, um ponto $a \in M$ é dito limite da sequência (x_n) quando, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implique $d(x_n, a) < \varepsilon$. Denotamos então $a = \lim x_n$, $a = \lim\limits_{n} x_n$ ou $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Além disso, quando a é limite da sequência (x_n) diz-se também que x_n tende para a ou que x_n converge para a e escreve-se ainda $x_n \to a$.*

Observação 3.28. *Uma sequência que possui limite chama-se convergente, enquanto uma que não possui diz-se divergente.*

Observação 3.29. *Afirmar que $\lim x_n = a \in M$ equivale a dizer que toda bola B centrada em a (e portanto, todo aberto A contendo a ou toda vizinhança de a) contém x_n para todo $n \in \mathbb{N}$, exceto para uma quantidade finita deles (que são no máximo os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$).*

Exemplo 3.23. *Toda sequência constante, $x_n = a$ é convergente e $\lim x_n = a$. Se $a \in M$ for um ponto isolado e $\lim x_n = a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice maior que n_0 são iguais ao ponto a. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tal que exista em M ponto algum que diste menos de ε do ponto a. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ correspondente a ε tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow x_n = a.$$

Em particular, num espaço métrico discreto, para uma sequência (x_n) ser convergente é necessário e suficiente que seja constante a partir de um certo índice, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots$.

Exemplo 3.24. *Se o espaço métrico M possui pelo menos dois pontos distintos $a, b \in M$, existem em M sequências que não possuem limite. Com efeito, é suficiente considerar a sequência definida por $x_n = a$ quando n for ímpar e $x_n = b$ se n for par. Segue daí que nenhum ponto $x \in M$ pode ser limite da sequência (x_n), pois tomando-se ε igual ao menor dos números $d(x, a)$ e $d(x, b)$ temos $\varepsilon > 0$. Entretanto, ε não corresponderá a nenhum $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaça $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.*

Observação 3.30. *Para melhor compreender os fatos relativos a definição de limite, é necessário desassociar as seguintes afirmações a respeito de uma sequência* (x_n) *num conjunto* X.

(a) *Afirmaremos que* X *contém números suficientemente grandes quando, para todo* $n_0 \in \mathbb{N}$, *conseguirmos encontrar* $n \in X$ *tal que* $n > n_0$. *Em outras palavras, é equivalente a dizer que* X *é um subconjunto ilimitado de* $\mathbb{N}$ *ou que* X *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$.

(b) *Um conjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *conterá todos os números naturais arbitrariamente grandes quando existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow n \in X$. *Em tal caso, o complementar* $\mathbb{N} - X$ *é finito e, consequentemente,* X *é infinito.*

Exemplo 3.25. *O conjunto dos números naturais pares* $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ *é infinito. Em particular, existem números naturais arbitrariamente grandes que não são pares. Isto é, tanto* $\mathbb{P}$ *como o seu complementar, o conjunto dos números naturais ímpares* $\mathbb{N} - \mathbb{P}$ *são infinitos.*

Exemplo 3.26. *Seja* X *o conjunto dos números* n *tais que* $n^2 - 14n + 40 > 0$. *Então* $X = \{1, 2, 3, 11, 12, 13, \ldots\}$. *Segue daí que para todo* $n > 10 \Rightarrow n \in X$. *Logo* X *contém todos os números naturais suficientemente grandes. Em tal caso, "suficientemente grande" é equivalente a "maior que 10". O complementar de* X *é o conjunto finito* $\mathbb{N} - X = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Observação 3.31. *Seja* (x_n) *uma sequência no espaço métrico* M. *Dizer que* $\lim x_n = a \in M$ *significa que, dada qualquer bola* B *centrada em* a, *tem-se* $x_n \in B$ *para todo* n *arbitrariamente grande. No Exemplo* 3.24, *dada qualquer bola aberta* $B(a; \varepsilon)$, *tem-se que* $x_n \in B$ *para valores suficientemente grandes de* n, *no entanto, não é válido para todo* n *suficientemente grande.*

Exemplo 3.27. *A sequência* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente na reta* $\mathbb{R}$. *Com efeito, dado* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, tomamos* $n_0 > 1/\varepsilon$. *Obtemos então:*

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Observação 3.32. *Segue do Exemplo* 3.27 *que o único valor de aderência de* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* $0 = \lim \frac{1}{n}$, *porém, todos os pontos da sequência, por pertencerem a* $\{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ *são pontos aderentes. Este resultado generaliza o contra-exemplo da Observação* 3.24.

Proposição 3.15. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$ num espaço métrico M. Por definição, para todo $\varepsilon > 0$, a saber, para $\varepsilon = 1$ obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; 1)$.

Seja $k = \max\{1, d(x,a)\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \leq n_0$. Temos então,

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < 1 \leq K.$$

Por outro lado, se $n < n_0 \Rightarrow d(x_n, a) \leq K$. Em todos os casos, tem-se

$$(x_n) \subset B(a; k) \subset B(a; k+1).$$

Portanto, (x_n) é limitada. ■

Observação 3.33. *A recíproca da Proposição* 3.15 *é falsa, pois dada a sequência de números reais $x_n = (-1)^n$, temos que (x_n) é limitada, no entanto, não é convergente. Por outro lado, dado $a \in \mathbb{R}$, com $|a| > 1$, a sequência definida por $x_n = a^n$ não converge porque não é limitada.*

Proposição 3.16 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência do espaço métrico M tal que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Por definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_1$. De modo análogo, obtemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, b) < \varepsilon/2$ para qualquer $n \geq n_2$. Tomando $n = max\{n_1, n_2\}$, tem-se pela desigualdade triangular que

$$d(a,b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) \Rightarrow d(a,b) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq d(a,b) < \varepsilon.$$

Suponhamos que $a \neq b$, logo $g = d(a,b) > 0$. Como a definição é válida para todo $\varepsilon > 0$, tomemos $\varepsilon = g$. Assim, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(a,b) < g$ para qualquer $n > n_0$. Mas isso contradiz a definição de $g = d(a,b)$. Portanto, $a = b$. ■

Proposição 3.17. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Como $\lim x_n = a \in M$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ e domínio de (x_{n_k}). Como $\mathbb{N}'$ é infinito e, portanto, ilimitado superiormente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Assim,

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow n_k > n_0 \;\therefore\; d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim x_{n_k} = a$. ■

Corolário 3.11. *Se* $\lim x_n = a$ *então, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se* $\lim\limits_{n} x_{n+p} = a$.

Demonstração. Se $\lim x_n = a \in M$ então, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, tem-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Seja $\mathbb{N}' = \{n+1 < n+2 < \cdots < n+p < \cdots\}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ e domínio de (x_{n+p}). Pela proposição anterior, $(x_{n+p}) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}, \ldots)$ é uma subsequência de (x_n). ■

Corolário 3.12. *Se* $\lim x_n = a \neq b$ *então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq b$.

Demonstração. Suponhamos que $x_n = b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < x_{n_k} < \cdots\}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ e domínio da subsequência (x_{n_k}) cujo limite $\lim x_{n_k} = b \neq a = \lim x_n$. Absurdo.

■

Exemplo 3.28. *Se uma sequência* (x_n) *possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela é divergente. De fato, pela Proposição* 3.17*, se* $\lim x_n = a$*, então toda subsequência* $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ *convergirá para o ponto* a*. Logo, pela Proposição* 3.16 *nenhuma subsequência possuiria um limite* $b \neq a$*.*

Proposição 3.18. *Um ponto* a*, num espaço métrico* M*, é limite de uma subsequência de* (x_n) *se, e somente se, toda bola aberta de centro* a *contém termos* x_n *com indices arbitrariamente grandes.*

Demonstração. Se uma subsequência (x_{n_k}) converge para o ponto $a \in M$ então, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow x_{n_k} \in B(a;\varepsilon)$. Decorre daí que toda bola aberta $B(a;\varepsilon)$ centrada em a e raio $\varepsilon > 0$ contém termos de x_n com índices arbitrariamente grandes. a saber, todos n_k com $k > k_0$.

Reciprocamente, supondo que toda bola aberta $B(a;\varepsilon)$ de centro a e raio ε contém termos de x_n com índices arbitrariamente grandes, a saber, n_k para todo $k > k_0$. Consideremos a bola aberta $B(a;1)$ que contém um termo x_{n_1}, a bola $B(a;1/2)$ contém o termo x_{n_2} com índice $n_2 > n_1$. Repetindo esse processo sucessivamente, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos $x_{n_k} \in B(a;1/k)$ com $n_k > n_{k-1} > n_{k-2} > \cdots > n_2 > n_1$. Disso, adquirimos um subconjunto próprio infinito e ilimitado superiormente $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$ e uma subsequência (x_{n_k}) tal que $d(x_{n_k}, a) < 1/k = \varepsilon$. Portanto, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. ■

Observação 3.34. *No enunciado da Proposição* 3.18*, podemos substituir "bola aberta de centro* a*" por "conjunto aberto contendo* a*" ou "vizinhança de* a*".*

3.4.2 Sequências de números reais

Definição 3.20. *Uma sequência* (x_n) *de números reais chama-se crescente quando se tem* $x - 1 < x_2, < \cdots < x_n < \cdots$*, isto é,* $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Quando vale apenas* $x_n \leq x_{n+1}$*, a sequência é dita não-decrescente. De modo análogo, se definem sequências decrescentes e não-crescentes. Uma sequência que obedece uma dessas quatro condições é chamada monótona.*

Proposição 3.19. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência não-decrescente limitada. Por ser limitada, existe $a > 0$ tal que $a = sup\, x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_n \leq a$. Mostremos que $a = \lim x_n$.

De fato, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto dos termos da sequência x_n. Logo, dentro do intervalo $(a - \varepsilon, a]$ existem uma infinidade de termos, a saber, existe x_{n_0} com $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, como a sequência é monótona, ou seja, todos os termos sucessores de x_{n_0} estão no intervalo, para todo $n > n_0$, tem-se

$$a - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Logo, $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, a sequência é convergente. ∎

Corolário 3.13. *Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) seja uma sequência não decrescente. Consideremos (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $a = sup\, x_n$, isto é, $x_{n_k} \leq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$, mostremos que (x_n) é limitada. De fato, satisfeita a condição de que $x_{n_k} \leq a$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos obter k tal que $n < n_k$ e então

$$x_n \leq x_{n_k} \leq a \Rightarrow x_n \leq a.$$

Logo, tomando x_1 como o primeiro termo da sequência, tem-se

$$x_1 \leq x_n \leq a.$$

Isso satisfaz a condição de (x_n) ser monótona e limitada. Ainda, pela proposição anterior, segue que (x_n) é convergente.

Reciprocamente, válida a condição anterior, temos que (x_n) é limitada e convergente, sendo $a = \lim x_n$. Assim, pela Proposição 3.17, toda subsequência de (x_n), a saber, (x_{n_k}) converge para a. Logo, $a = sup\ \{x_{n_k}; \forall n \in \mathbb{N}\}$ e, portanto, (x_{n_k}) é limitada. ∎

Exemplo 3.29. *Se* $|a| < 1$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. *Pela definição de limite, não há diferenças entre as afirmações* $\lim x_n = 0$ *e* $\lim |x_n| = 0$. *Logo, podemos admitir que* $0 \leq a < 1$. *Em tal caso,* $a \geq a^2 \geq a^3 \geq \cdots \geq a^n \geq \cdots \geq 0$ *e, portanto,* (a^n) *é uma sequência monótona limitada para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Pela Proposição* 3.19, *existe* $x = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$. *Segue daí que*

$$x = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(a \cdot a^n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot x.$$

Logo, $(1-a)x = 0$. *Como* $1 - a > 0$, *tem-se que* $x = 0$.

Proposição 3.20. *Seja* (x_n) *uma sequência de números reais, com* $\lim x_n = a{>}b$. *Então* $x_n > b$ *para todo* n *suficientemente grande.*

Demonstração. Como a sequência (x_n) converge para a. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, obtemos uma bola $B(a;\varepsilon)$ centrada em a que dista um raio $\varepsilon > 0$, tal que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = a - b > 0$, temos que

$$a - (a - b) < x_n < a + a - b \Rightarrow b < x_n < 2a - b.$$

Assim, obtemos $b < x_n$ para todo n suficientemente grande. ■

Corolário 3.14. *Se* $x_n \leq b$ *para valores arbitrariamente grandes de* n *e existe* $a = \lim x_n$, *então* $a \leq b$.

Demonstração. De fato, se valesse $a > b$, pela proposição anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, tem-se $x_n > b$. Mas isso é um absurdo, uma vez que teríamos $x_n \leq b$ para, no máximo, um número finito de índices n, contrariando a hipótese de existir $x_n \leq b$ para todo n arbitrariamente grande. ■

Exemplo 3.30. *Se* $a > 0$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$. *Suponhamos que seja* $a > 1$, *então* $a > a^{1/2} > a^{1/3} > \cdots > 1$. *Pela Proposição* 3.19, *existe* $x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ *e* $x \geq 1$ *pelo corolário acima. Considerando a subsequência*

$$a^{1/n(n+1)} = a^{1/n - 1/(n+1)} = a^{1/n} + a^{1/(n+1)},$$

temos que

$$x = \lim_{n\to\infty} a^{1/n(n+1)} = (\lim a^{1/n})/(\lim a^{1/(n+1)}) = 1.$$

Observação 3.35. *O caso em que* $0 < a < 1$ *se trata de modo análogo.*

4 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M, a única possibilidade existente para provar sua convergência constitui-se em exprimir $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Em diversos casos, contudo, não é preciso ter conhecimento explícito do limite, mas apenas ter a consciência de sua existência. Dessa forma, torna-se vantajoso o uso das condições suficientes para que o limite exista, ou seja, os "critérios de convergência". O mais conhecido destes é o critério de Cauchy.

Neste capítulo, vamos analisar os espaços métricos nos quais o critério de Cauchy é aplicável. Isso significa que uma sequência num espaço métrico M converge se, e somente se, $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Uma das utilidades dos espaços métricos completos é a possibilidade de demonstrar a existência de teoremas que satisfaçam determinadas condições. De um modo geral, busca-se construir uma sequência de Cauchy passo a passo, na qual os elementos x_n, estão cada vez mais próximos de satisfazerem as condições dadas. Se M for completo, então haverá $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ que satisfará exatamente essas condições.

4.1 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Definição 4.1. *Diz-se que uma sequência (x_n) num espaço métrico M é uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Observação 4.1. *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy.*

Observação 4.2. *Para uma sequência (x_n) ser de Cauchy é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, possa ser possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, donde $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$. Instintivamente, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros a medida que cresce o índice n, assemelhando-se com a definição de limite, na qual requer que os termos tornem-se cada vez mais próximos de um ponto fixo.*

Observação 4.3. *Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência, dependendo apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço. Assim, se $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N. Quando os termos de uma sequência de aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se um dos outros.*

Proposição 4.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente num espaço métrico M. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, $m > n_0$ implica em $d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, para $m, n > n_0$ temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy. ■

Observação 4.4. *Assim como foi visto na Proposição* 4.1, *toda sequência convergente é de Cauchy, porém, nem toda sequência de Cauchy é convergente.*

Exemplo 4.1. *Seja o conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos racionais, com a sua métrica usual* $d(x, y) = |x - y|$. *Se uma sequência* (x_n) *de números racionais converge para um número irracional* $x = \lim x_n$. *(Por exemplo,* $x_1 = 2; x_2 = 2,7; x_3 = 2,71; \ldots; x_n = e$*). Por* (x_n) *ser convergente na reta* $\mathbb{R}$*, pela Proposição* 4.1*, a sequência é de Cauchy em* $\mathbb{R}$*, logo, é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{Q}$*, no entanto,* (x_n) *não converge neste espaço.*

Proposição 4.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$, donde $x_m, x_n \in B(a, 1)$. Tomando $K = max\,\{1, d(x_m, x_n)\}$. Se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < 1 \leq K$. Caso $m, n < n_0$, temos $d(x_m, x_n) \leq K$. Logo, concluímos que $(x_n) \in B(a, K) \subset B(a, K+1)$ e, portanto, (x_n) é limitada. ■

Observação 4.5. *Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Para ver isto, consideremos a sequência dada por* $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ *em* $\mathbb{R}$*. Apesar de ser limitada, esta sequência não é de Cauchy, pois* $d(x_m, x_n) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Observação 4.6. *Dada uma sequência* (x_n) *no espaço métrico* M*, ponhamos, para cada* $n \in \mathbb{N}; X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$*. Temos* $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$*. Como* $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \cup X_n$*, um desses conjuntos é limitado se, e somente se, todos os demais forem. Caso isso ocorra, temos* $diam(X_1) \geq diam(X_2) \geq \cdots$ *e, consequentemente, sempre haverá* $\lim\limits_{n \to \infty} diam(X_n)$*.*

Proposição 4.3. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite da subsequência).*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Por (x_n) ser convergente, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por (x_n) ser de Cauchy, existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tomando $n_0 = max\{p, q\}$, para $n > n_0$, existe $n_k > n_0$ de modo que

$$
\begin{aligned}
d(x_n, a) &\leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Portanto, a sequência (x_n) converge para a. ∎

Observação 4.7. *Note que a propriedade enunciada na Proposição* 4.3 *é evidentemente falsa para sequências arbitrárias, pois caso contrário, uma sequência de Cauchy só não convergiria num espaço M se "faltarem pontos no espaço".*

Exemplo 4.2. *Se uma sequência possui duas subsequências que convergem para limites distintos então ela não é de Cauchy. Tal é, por exemplo, o caso da sequência* $(0, 1, 0, 1, \dots)$ *que, apesar de ser limitada, não é convergente pois possui duas subsequências que convergem para limites diferentes, a saber,* $(0, 0, 0, \dots)$ *e* $(1, 1, 1, \dots)$.

Observação 4.8. *Uma sequência que possui apenas um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.*

Proposição 4.4. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Por f ser uniformemente contínua, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$. Por outro lado, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ de modo que $d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Segue que $(f(x_n))$ é de Cauchy.

Corolário 4.1. *Seja $f : M \to N$ um homeomorfismo uniforme. Uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N.*

Demonstração. Por $f : M \to N$ ser um homeomorfismo, temos que a aplicação é contínua e, como também é uniforme, pela Proposição 4.4, a sequência (x_n) ser de Cauchy em M, resulta que $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em N. Reciprocamente. por $f : M \to N$ ser um homeomorfismo, a aplicação também é sobrejetiva. Sendo f uniformemente contínua, uma vez que é um homeomorfismo uniforme, segue que $(f(x_n))$ ser de Cauchy em N, implica que (x_n) é de Cauchy em M.

Exemplo 4.3. *Se $f : M \to N$ é apenas contínua, é possível ter uma sequência de Cauchy (x_n) em M cuja imagem $(f(x_n))$ não é uma sequência de Cauchy em N. Basta considerar a função contínua $f : (0, 1] \to \mathbb{R}; f(x) = 1/x$. A Sequência de pontos $x_n = 1/n$ é de Cauchy em M, mas $(f(x_n)) = (1, 2, 3, \dots)$ não é uma sequência de Cauchy em N.*

Observação 4.9. *A recíproca da Proposição* 4.4 *é falsa, uma vez que a transformação de sequências de Cauchy em sequências de Cauchy é uma condição suficiente para que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua, mas não garante que f seja uniformemente contínua.*

Exemplo 4.4. *A função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua, mas se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f|[-c, c]$ é lipschitziana, segue-se da Proposição* 4.4 *que $(f(x_n))$ é de Cauchy.*

Exemplo 4.5. *Dada uma sequência (x_n) num espaço métrico M, consideremos o espaço $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ com a métrica induzida pela reta e a função $f : P \to M$, dada por $f(1/n) = x_n$. Para que (x_n) seja uma sequência de Cauchy é necessário e suficiente que f seja uniformemente contínua. Decerto, se (x_n) é de Cauchy, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Seja $\delta = \dfrac{1}{(n_0+1)^2}$. A menor distância não nula de um ponto qualquer de P a um ponto do conjunto $\{1, 1/2, \ldots, 1/n_0\}$ é dada por

$$\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1} = \frac{1}{n_0(n_0+1)} > \frac{1}{(n_0+1)^2} = \delta.$$

Logo,

$$m, n > n_0 \Rightarrow 0 < \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \delta \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

e, consequentemente, f é uniformemente contínua.

Reciprocamente, se $f : P \to M$ é uniformemente contínua, como a sequência $(1/n)$ é de Cauchy em P, uma vez que é convergente em $\mathbb{R}$, pela Proposição 4.4 *tem-se que $(x_n) = (f(1/n))$ é de Cauchy.*

4.2 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Definição 4.2. *Dizemos que o espaço métrico M é completo se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.*

Exemplo 4.6. *Todo espaço métrico M munido da métrica zero-um é completo, uma vez que qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice, logo é convergente. Porém, nem todo espaço discreto é completo, tal como vemos considerando $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, no qual $x_n = 1/n$ produz uma sequência que não converge*

Observação 4.10. *Atribuiremos num espaço métrico M uma métrica uniformemente discreta, quando existir $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$, para quaisquer que sejam $x, y \in M$. Em tal caso, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_m = x_n.$$

Dessa forma, toda sequência de Cauchy num espaço uniformemente discreto é contante a partir de um certo índice n_0 e, por consequência, convergente neste espaço. Tais espaços são, evidentemente, completos.

Exemplo 4.7. *Considerando $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ munido da sua métrica usual e, em seguida, com a métrica zero-um, adquirimos duas métricas equivalentes de modo que P torna-se completo em relação a uma, mas não em comparação a outra. Isso mostra que um espaço métrico completo pode ser homeomorfo a um espaço não completo.*

Exemplo 4.8. *Segue do Exemplo* 4.1 *que o espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo, enquanto $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. A proposição que se segue, devida a Cauchy, estabelece o mais importante exemplo de espaço métrico completo.*

Proposição 4.5. *A reta é um espaço métrico completo*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e X o conjunto de termos de (x_n). Para todo $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ o conjunto de termos de (x_n) a partir de n. Por $X_n \subset X$, temos que X_n é limitado, uma vez que X também o é, afinal, pela Proposição 4.2, toda sequência de Cauchy é limitada. Tomemos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ uma sequência de subconjuntos de X. Seja $a_n = inf\, X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b = sup X_1$. Por (a_n) ser monótona e limitada, pela Proposição 3.19, existe um número real $a = \lim a_n$. Mostremos que $\lim x_n = a$. Ora, para que a seja limite da sequência (x_n), pela Proposição 4.3, basta mostrar que existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para o ponto a. Para tanto, como $a_n \to a$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe n_0 tal que se $n > n_0$, tem-se $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Como $a_n = inf\, X_n$, o número $a + \varepsilon$ não pode ser cota inferior do conjunto X_n, logo no intervalo $(a_n, a + \varepsilon)$ existem infinitos termos, a saber, existe x_{n_k} para $n_k > n$ tal que $a_n \leq x_{n_k} < a + \varepsilon$. Segue daí que $\lim x_{n_k} = a$. Além disso, por (x_{n_k}) ser convergente, temos que (x_n) também o é, logo, $\lim x_n = a$, isto é, toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. ■

Proposição 4.6. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Seja M completo e $F \subset M$ fechado. Por M ser completo, dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, existe $a \in M$ tal que $x_n \to a$. Disso, segue que a é ponto aderente de F, uma vez que é limite de uma sequência de pontos $x_n \subset F$ (Observação 3.10). Logo $a \in \overline{F} = F$. Assim, $x_n \to a$ e, portanto, F é completo.

De maneira recíproca, seja $F \subset M$ um subespaço completo. Consideremos (x_n) uma sequência em F, tal que $x_n \to a \in M$. Por (x_n) ser convergente em M, temos que é de Cauchy. Por F ser um subespaço completo, (x_n) é de Cauchy em F, logo existe $b \in F$

tal que $x_n \to b$, mas a existência de b contraria a unicidade do limite de (x_n). Assim, para que não haja a perda da unicidade de (x_n), temos que $a = b$, ou seja, $a \in F$ é ponto aderente de (x_n). Portanto, F é fechado em M. ■

Proposição 4.7. *Se o espaço métrico M é completo então $\mathscr{B}_\alpha(X; M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \to M$.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathscr{B}_\alpha(X; M)$. Por ser de Cauchy, (f_n) é limitada, logo existe $c > 0$ tal que

$$d(f_n, \alpha) = sup\, d(f_n(x), \alpha(x)) \Rightarrow d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c$$

para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Fixando-se arbitrariamente $x \in X$, a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy em M. Como M é completo, existe o limite da sequência $(f_n(x))$ para cada $x \in X$. Denotemos por $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in M$.

Por $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, concluímos, ao fazermos $n \to \infty$, que $d(f(x), \alpha(x)) \leq c$ para todo $x \in X$. Logo $f \in \mathscr{B}_\alpha(X; M)$. Mostremos que $f_n \to f$ uniformemente em X. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para qualquer $x \in X$. Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, temos que para $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Ou seja, $f_n \to f$ uniformemente. ■

Corolário 4.2 (Critério de Cauchy para convergência uniforme)**.** *Seja M um espaço métrico completo. A fim de que uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$ convirja uniformemente em X, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implique $d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Se $f_n \to f$ uniformemente em X, então $f_n \in \mathscr{B}_f(X; M)$ para todo n suficientemente grande. Como $\lim f_n = f$ nesse espaço, então (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{B}_f(X; M)$ e a condição acima é necessária. Reciprocamente, supondo a condição satisfeita, tomemos $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $\alpha = f_{n_0+1}$, vale $d(f_n, \alpha) \leq 1$, ou seja, $f_n \in \mathscr{B}_\alpha(X; M)$ para $n > n_0$. Segue da Proposição 4.7 que (f_n) é uma sequência de Cauchy no espaço completo $\mathscr{B}_\alpha(X; M)$. Portanto, (f_n) converge uniformemente em X.

Exemplo 4.9. *Dados dois espaços vetoriais normados E e F, denotamos por $\mathscr{L}(E; F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F. O conjunto $\mathscr{L}(E; F)$ munido da norma*

$$||f|| = sup\ \{|f(x)|; x \in E, |x| = 1\}$$

é um espaço vetorial normado, donde para toda $f \in \mathscr{L}(E; F)$ e, todo $x \in E$, vale $|f(x)| \leq ||f|| \cdot |x|$.

Proposição 4.8. *Se F é um espaço métrico completo, então o espaço vetorial normado $\mathscr{L}(E;F)$ é completo.*

Demonstração. Ver (LIMA, 2020, p. 168, Exemplo 11) ■

Exemplo 4.10. *Um espaço vetorial normado completo chama-se espaço de Banach.*

Exemplo 4.11. *$\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. Outros exemplos de espaços de Banach são $\mathscr{B}(X;F), \mathscr{C}_0(M;F)$ e $\mathscr{L}(E;F)$, onde X é um conjunto qualquer, M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e F um espaço de Banach.*

Exemplo 4.12. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H, munido de um produto interno, e completo com relação à norma $||x|| = \sqrt{< x, x >}$. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, munido com o produto interno $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ é um exemplo de espaço de Hilbert.*

Observação 4.11. *Pelo exemplo anterior, percebe-se que o espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

4.3 COMPLETAMENTO DE UM ESPAÇO MÉTRICO

Até o momento, discutimos acerca da existência de espaços métricos completos e a sua importância para a formulação de conceitos-chave como convergência, continuidade e limites. No entanto, nem todos os espaços métricos são completos, e é nesse contexto que surge a necessidade de explorar e compreender o conceito de completamento.

O completamento de espaços métricos é uma ferramenta valiosa na teoria dos espaços métricos, proporcionando uma maneira de "preencher as lacunas"e tornar os espaços métricos incompletos em estruturas mais robustas e integralmente definidas. Este processo é crucial para entender a continuidade e a convergência de sequências em espaços métricos, proporcionando uma base sólida à Análise. Um exemplo clássico é o completamento do espaço $\mathbb{Q}$ para formar o espaço $\mathbb{R}$. Os números racionais possuem lacunas notáveis, como a inexistência da raiz quadrada exata de 2. Intuitivamente, o completamento pode ser interpretado do seguinte modo: $\mathbb{R}$ é a ampliação de $\mathbb{Q}$ obtida acrescentando-se a este espaço os limites das sequências de Cauchy de números racionais que a ele ainda não pertençam. Isso significa que toda sequência de números reais convergentes tem um limite dentro desse espaço, proporcionando uma integridade topológica essencial.

Nosso objetivo agora é mostrar que dado um espaço métrico é sempre possível completá-lo, nos moldes acima.

4.3.1 Teorema do completamento

Definição 4.3. *Um completamento de um espaço métrico, é um par ($\hat{M}$, φ), onde $\hat{M}$ é um espaço métrico completo e $\varphi : M \to \hat{M}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\varphi(M)$ é densa em $\hat{M}$.*

Teorema 4.1 (Teorema do completamento)**.** *Todo espaço métrico admite um completamento.*

A importância fundamental do Teorema 4.1 para a teoria dos espaços métricos é inegável. Considerando sua relevância e a natureza construtiva de sua demonstração, abordaremos, de forma concisa baseando-se em (MELO, 2022) as ideias fundamentais que serão utilizadas na comprovação.

Primeiramente, concentraremos nossa atenção na definição da noção de classe de equivalência para sequências de Cauchy em um espaço métrico arbitrário M. A partir dessa definição, escolheremos representantes para essas classes de equivalência, os quais serão os objetos matemáticos centrais ao longo da demonstração. Em seguida, procederemos à construção do conjunto $\hat{M}$, composto pelas classes de equivalência de sequências de Cauchy em M. Subsequentemente, introduziremos uma métrica em $\hat{M}$ de maneira a transformá-lo em um espaço métrico. Com essa base estabelecida, teremos todos os elementos necessários para mostrar que $\hat{M}$ é completo, sendo este o que denominamos de completamento do espaço métrico M.

Dada a complexidade dos resultados que precisam ser desenvolvidos e demonstrados, organizaremos a prova do Teorema 4.1 em diversos lemas, a fim de facilitar a compreensão e a exposição sistematizada desses resultados. Esses lemas serão apresentados a seguir.

Definição 4.4. *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de Cauchy em M, então definamos:*

(a) *Dizemos que a sequência (x_n) está relacionada com a sequência (y_n) e denotamos por $(x_n) \sim (y_n)$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} d_M(x_n, y_n) = 0$.*

(b) *Denotemos por $M' = \{(x_n) | (x_n) \in M\}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em M.*

Lema 4.1. *A relação $\sim$ é de equivalência.*

Demonstração. A demonstração é simples e segue diretamente das propriedades de métrica postas na Definição 1.1. De fato:

1. Para qualquer sequência de Cauchy (x_n) em M, temos $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$, logo $x_n \sim x_n$;

2. Se $x_n \sim y_n$, então $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Mas por $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$, segue que $d(y_n, x_n) = 0$. Logo $y_n \sim x_n$;

3. Se $x_n \sim y_n$ e $y_n \sim z_n$, então $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n).$$

   Como todos os termos do lado direito da desigualdade tendem a zero quando $n \to \infty$, segue que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$ e, portanto, $x_n \sim z_n$.

■

Agora que sabemos que $\sim$ é uma relação de equivalência entre sequências de Cauchy em M, podemos eleger um representante dessas classes para prosseguirmos nos desenvolvimentos seguintes. Nesse sentido, denotemos por x̂ e ŷ os representantes das classes de equivalência das sequências (x_n) e (y_n), respectivamente.

Lema 4.2. *Se (x_n) e (y_n) são sequências de M', então:*

$$\hat{x} = \hat{y} \text{ ou } \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que x̂ ≠ ŷ e x̂ ∩ ŷ ≠ ∅. De posse que a interseção dos conjuntos é não vazia, temos que existe uma sequência de Cauchy (u_n) que é mutualmente equivalente a (x_n) e (y_n), isto é:

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, x_n) = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} d(u_n, y_n) = 0$$

Por outro lado, temos que existe uma sequência de Cauchy (v_n) que é equivalente a uma e apenas uma destas sequências. Digamos que essa seja equivalente a (x_n) e não a (y_n), assim $\lim_{n\to\infty} d(v_n, x_n) = 0$. Usando a desigualdade triangular, obtemos:

$$d(v_n, y_n) \leq d(v_n, x_n) + d(x_n, u_n) + d(u_n, y_n)$$

o que nos dá que $\lim_{n\to\infty} d(v_n, y_n) = 0$ e, consequentemente, contradiz a hipótese de que (v_n) seja equivalente apenas a uma das sequências e logo as classes de equivalência são disjuntas. ■

Definição 4.5. *Seja $\hat{M}$ o conjunto das classes de equivalência das sequências de Cauchy em M. Definamos, para cada $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{M}$ a métrica*

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

onde (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy pertencentes às classes $\hat{x}$ e $\hat{y}$, respectivamente.

Lema 4.3. *A métrica da Definição 4.5 está bem definida.*

Demonstração. Sejam $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n)$ sequências de Cauchy em M, tais que $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$. Deste modo, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$ e consequentemente,

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y'_n)| + |d(x_n, y'_n) - d(x'_n, y'_n)| \\ &\leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \end{aligned}$$

(Aqui usamos a desigualdade triangular na forma $d(a, b) \geq |d(a, c) - d(c, b)|$). Como os limites $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y'_n)$ são ambos nulos, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$. ■

Notemos que a métrica determinada na Definição 4.5 torna $\hat{M}$ um espaço métrico, mas para que seja possível definirmos a métrica em $\hat{M}$, é necessário mostrarmos a existência do limite. Ele é garantido ao verificarmos que a sequência $(d(x_n, y_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. De fato, como as sequências (x_n) e (y_n) são de Cauchy em M, então dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $d(x_m, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $d(y_m, y_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para quaisquer que sejam $m, n \geq n_1$ e $m, n \geq n_2$, respectivamente. Desse modo, dado $n_0 \geq max\,\{n_1, n_2\}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} |d(x_m, x_n) - d(y_m, y_n)| &= |d(x_m, y_m) - d(y_m, x_n) + d(y_m, x_n) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq |d(x_m, y_m) - d(y_m, x_n)| + |d(y_m, x_n) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall m, n > n_0 \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $(d(x_n, y_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e como $\mathbb{R}$ é completo, ela converge para algum $a \in \mathbb{R}$, o que nos garante a existência do limite.

Definição 4.6. *Dois espaços métricos, X e Y, são ditos isométricos quando há uma bijeção $\varphi : X \to Y$, que preserva as distâncias, isto é, que satisfaz*

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)); \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Lema 4.4. *$\varphi : M \to \hat{M}$ é uma isometria.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $\varphi : M \to \hat{M}$, definida por $\varphi(x) = \hat{x}$, onde $\hat{x}$ representa as sequências constantes $(x, x, x, \dots)$ em M. Temos que, para cada $x \in M$, um termo de $\varphi(M)$ é uma classe de equivalência $\hat{x} = [(x, x, x, \dots)] \in \hat{M}$. Resulta imediatamente da Definição 4.6 que $\varphi(M)$ e $\hat{M}$ são isométricos, pois

$$\hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

■

Lema 4.5. *$\varphi(M)$ é denso em $\hat{M}$*

Demonstração. Com efeito, seja $\hat{x} \in \hat{M}$, consideremos uma bola qualquer centrada em $\hat{x}$ com raio $\varepsilon > 0$. Tomemos $(x_n) \in \hat{x}$. Por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para quaisquer $m, n \geq n_0$. Seja $\hat{y} = \varphi(x_{n_0+1})$ a classe de equivalência determinada pela sequência constante $(x_{n_0+1}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1}, \dots)$. Por definição, segue que

$$\begin{aligned}
\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0+1}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Logo, $\hat{y} = \varphi(x_{n_0+1}) \in B(\hat{x}, \varepsilon)$, ou seja, toda bola de centro $\hat{x} \in \hat{M}$ contém uma classe de equivalência $\hat{y} \in \varphi(M)$. Portanto, $\varphi(M)$ é denso em $\hat{M}$. ■

Lema 4.6. *$\hat{M}$ é completo.*

Demonstração. Seja (y_n) uma sequência de Cauchy do espaço métrico $\hat{M}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_m, y_n) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ para quaisquer que sejam $m, n \geq n_0$. Como $\varphi(M)$ é denso em $\hat{M}$, para cada $k \geq 1$, existe $x_k \in \varphi(M)$ tal que $d(x_k, y_k) < \dfrac{1}{k}$. Disso, dado $i > max\left\{n_0, \dfrac{3}{\varepsilon}\right\}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) + d(y_n, x_n) \\
&< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon; \quad \forall m, n \geq i
\end{aligned}$$

garantindo que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\varphi(M)$. Por outro lado, como as sequências de Cauchy em $\varphi(M)$ convergem em $\hat{M}$, existe um ponto $a \in \hat{M}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Mostremos que (y_n) também converge para o ponto $a \in \hat{M}$.

De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty}$, então dado $\varepsilon > 0$, existe p tal que $n \geq p \Rightarrow d(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Segue daí que para todo $n > max\left\{p, \dfrac{2}{\varepsilon}\right\}$, temos:

$$\begin{aligned}
d(y_n, a) &\leq d(y_n, x_n) + d(x_n, a) \\
&< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, (y_n) é uma sequência de Cauchy convergente, o que possibilita garantirmos a completude do espaço métrico $\hat{M}$. Portanto, fica provada a existência do completamento de um espaço métrico M qualquer. ■

4.3.2 Unicidade do completamento

Proposição 4.9. *Dois completamentos quaisquer de um mesmo espaço métrico são isométricos.*

Demonstração. Seja X o espaço métrico do qual Y e Z são completamentos. Definimos a bijeção $\varphi : Y \to Z$ como segue. Seja $y \in Y$, por definição existe $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to y$. Como X também é denso em Z, existe $z \in Z$ tal que $x_n \to z$. Definindo $\varphi(y) = z$, tem-se que φ é uma bijeção de Y sobre Z. Tomando quaisquer $y, y' \in Y$ e $z, z' \in Z$ tais que $z = \varphi(y)$ e $z' = \varphi(y')$. Pela definição de φ, existem $(x_n), (x'_n) \subset X$ tais que $x_n \to y, x_n \to y'$ em Y e $x_n \to z, x_n \to z'$ em Z. Como a distância é uma aplicação contínua, tem-se

$$d(y, y') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$$

$$d(z, z') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)$$

Segue daí que $d(y, y') = d(z, z')$ e, portanto, φ é uma isometria. ■

Observação 4.12. *O resultado acima garante que o completamento é único a menos de isometrias.*

Exemplo 4.13. *Como já foi mencionado, $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$. Para ver isto, considere a aplicação $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = x$. Note que φ é uma imersão isométrica e além disso, $\varphi(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ que é denso em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 4.14. *Se M é completo, então para todo $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ é um completamento de X. De fato, considere a aplicação $\varphi : X \to M$ definida por $\varphi(x) = x$. Temos que φ é uma imersão isométrica e além disso $\varphi(X) = X$ portanto $\overline{\varphi(X)} = \overline{X}$*

5 ESPAÇOS DE BAIRE

Este capítulo tem como propósito introduzir e explorar de maneira aprofundada os Espaços de Baire, uma classe especial de espaços topológicos que desempenha um papel crucial na Análise Funcional. Exploraremos inicialmente as bases teóricas que sustentam os Espaços de Baire, destacando conceitos essenciais como conjuntos densos, conjuntos abertos e a topologia associada. Em seguida, adentraremos nas propriedades peculiares que tornam esses espaços notáveis, tais como a intersecção enumerável de conjuntos densos e a caracterização de espaços completos.

Além disso, analisaremos a importância dos Espaços de Baire em aplicações práticas, ilustrando como esses espaços oferecem ferramentas poderosas para compreender a convergência de sequências, além de desempenhar um papel crucial na formulação de resultados-chave em Análise Funcional.

A fim de discutirmos acerca dos espaços de Baire, iremos apresentar uma categoria de conjuntos que, de certo modo, são irrelevantes dentro do espaço métrico que os contém.

Definição 5.1. *Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se magro em M quando é uma reunião enumerável $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $int(\overline{X}_n) = \emptyset$*

Observação 5.1. *Esta é a ideia de conjunto magro, conjunto este que desempenha, em Topologia, função semelhante ao conjunto de medida nula, em Análise.*

Proposição 5.1. *Para que X seja magro em M é necessário e suficiente que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio em X.*

Demonstração. Suponhamos que X seja magro em M. Por definição, X é uma reunião enumerável $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $int(\overline{X}_n) = \emptyset$. Isso significa que X não contém nenhum conjunto aberto não vazio, ou seja, para qualquer conjunto aberto U em M, tem-se $X \cap U = \emptyset$. Agora, consideremos $F_n = M - U_n$, onde U_n é o conjunto aberto correspondente ao conjunto fechado F_n. Assim, F_n é fechado com interior vazio, e $X \cap U_n$ é vazio. Então, temos que:

$$X \cap U_n = \emptyset \Rightarrow X \subset M - U_n = F_n$$

Portanto, $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio em X.

Reciprocamente, suponhamos que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio em X. Queremos mostrar que X é magro em M. Para isso, considere qualquer conjunto aberto não vazio U em M. Queremos mostrar que $X \cap U$ é vazio.

Dado que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, temos:

$$X \cap U \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap U)$$

Agora, como F_n tem interior vazio em X, $F_n \cap U$ também tem interior vazio em X. Isso significa que, para cada n, existe um conjunto aberto não vazio $V_n \subset F_n \cap U$ tal que $V_n \cap X$ é vazio.

Decorre daí que:

$$X \cap U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap U) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

Como $V_n \cap X$ é vazio para cada n, a reunião $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \cap X$ é vazia. Portanto, $X \cap U$ é vazio. Como a escolha de U foi arbitrária, isso implica que X é magro em M. ■

Observação 5.2. *É imediato que todo subconjunto e toda reunião de uma família enumerável de conjuntos magros ainda seja um conjunto magro, porém, não basta definir como conjunto magro somente um conjunto que tenha interior vazio, pois todo subconjunto $X \subset \mathbb{Q}$ é magro, uma vez que pode ser escrito como reunião enumerável de seus pontos, cada um com interior vazio em $\mathbb{Q}$, mas X não precisa ter interior vazio em $\mathbb{Q}$. Isso ocorre porque o espaço $\mathbb{Q}$ não é completo. É em torno dessa noção que os espaços de Baire surgem com o intuito de tornar os conjuntos magros, de fato, insignificantes.*

Exemplo 5.1. *Um ponto num espaço métrico completo tem interior vazio se, e somente se, não é isolado. De fato, seja M um espaço métrico completo, dado um ponto $a \in M$ com interior vazio, então para todo $\varepsilon > 0$, não existe uma bola aberta $B(a, \varepsilon)$ de centro a e raio $\varepsilon > 0$ contida em M, exceto possivelmente em a mesmo. Em outras palavras, para qualquer raio $\varepsilon > 0$, existe $x \in M$ tal que $0 < d(a, x) < \varepsilon$, donde $x \neq a$ e, d é a métrica de M. Decorre daí que a é um ponto de acumulação. Por outro lado, se a fosse um ponto isolado, então haveria uma bola aberta $B(a, \varepsilon) = \{a\}$, para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, tal bola aberta não conteria outros pontos de M, além do próprio a. No entanto, como assumimos que o interior de a é vazio, isso contradiz a definição de um ponto isolado. Portanto, se a tem interior vazio, ele não pode ser um ponto isolado. Reciprocamente, se $a \in M$ não é um ponto isolado, então é um ponto de acumulação. Afirmamos então que a tem interior vazio. Com efeito, se assim não fosse, haveria uma bola aberta $B(a, \varepsilon) \subset \{a\}$. No entanto, como para qualquer raio $\varepsilon > 0$ sempre existe um ponto $x \in M$ diferente de a em $B(a, \varepsilon)$, não podemos encontrar uma bola aberta em torno de a que não contenha outros pontos de M, o que contradiz a suposição de que a não é um ponto isolado.*

Exemplo 5.2. *Um conjunto enumerável $X \subset M$ é magro se, e somente se, nenhum de seus pontos é isolado. Com efeito, Seja X um conjunto magro em M, onde M é um espaço métrico completo. Por X ser magro, podemos denotá-lo com a reunião enumerável de seus pontos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$, dois a dois disjuntos, tal que, para cada n, int $\{\overline{x_n}\} = \emptyset$. Ora, se cada x_n tem interior vazio, repetindo o processo do Exemplo* 5.1 *para cada ponto de X, concluímos que nenhum de seus pontos é isolado. A recíproca se faz de modo análogo.*

Exemplo 5.3. *Em particular, o espaço $\mathbb{Q}$ é magro na reta. Por outro lado, o espaço $\mathbb{R}$ não é magro, pois não é um conjunto enumerável, conforme veremos adiante.*

Observação 5.3. *Na terminologia clássica, um conjunto magro era denotado como conjunto de primeira categoria, enquanto que os conjuntos que não são magros eram denotados como conjuntos de segunda categoria.*

Exemplo 5.4. *A fronteira de um conjunto aberto $A \subset M$ é um conjunto fechado com interior vazio. Com efeito, se x é um ponto na fronteira do conjunto A, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma bola centrada em x que contém pontos de A. Mas $A \cap \partial A = \emptyset$, logo não existe nenhuma bola de centro x que possa está contida em ∂A o que resulta que ∂A tem interior vazio. Como $\partial A = \partial(M - A)$, segue que a fronteira de todo subconjunto fechado $F \subset M$ também tem interior vazio. Em contrapartida, se $X \subset M$ não é aberto e nem fechado, sua fronteira talvez não tenha interior vazio, assim como ocorre com a fronteira dos racionais $\mathbb{Q}$, uma vez que $\partial\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$.*

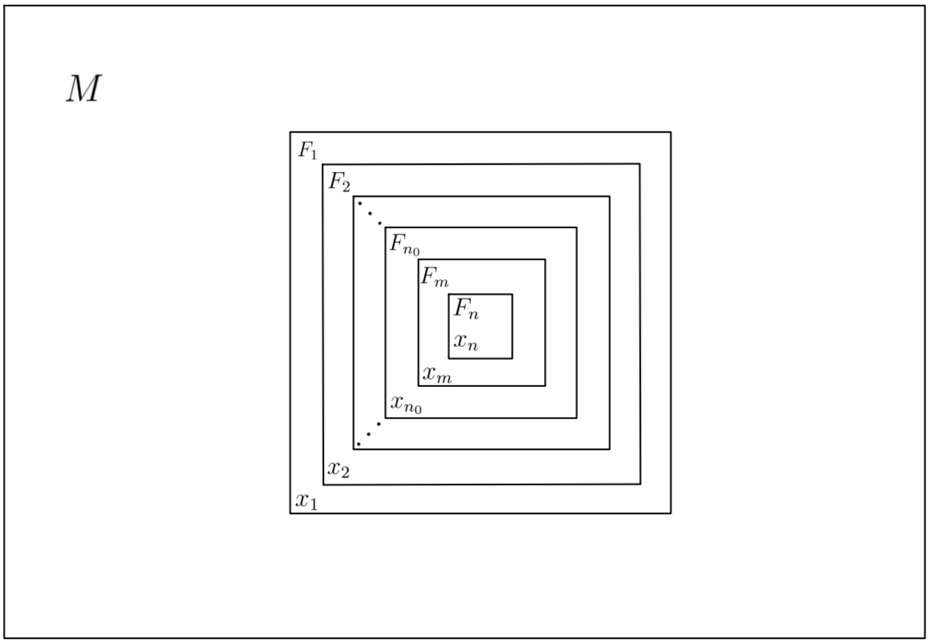
Exemplo 5.5. *O conjunto de Cantor K é um subconjunto fechado do intervalo* $[0, 1]$ *obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos ao realizar a seguinte operação: retira-se o terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ do intervalo* $[0, 1]$. *Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sobra então*

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes e repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Se denotarmos por $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos retirados do intervalo $[0, 1]$, *teremos que $K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um subconjunto fechado em* $[0, 1]$ *e, portanto, fechado na reta. Além disso, K não contém nenhum intervalo, logo int$(K) = \emptyset$. Assim, K é um subconjunto fechado com interior vazio e, por conseguinte, magro na reta. No entanto, K não é magro em si mesmo, isto é, não se pode escrever $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado com interior vazio em K.*

Proposição 5.2 (Teorema de Cantor)**.** *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M$, com $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.*

Figura 5.1 – Generalização do princípio de intervalos encaixantes



Fonte: Autoral

Demonstração. Suponhamos que M seja completo e que nos seja dada uma sequência que satisfaça todas as condições exigidas no enunciado. Escolhendo um ponto $x_n \in F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos uma sequência $(x_n) \subset M$ tal que dado $n_0 \in \mathbb{N}$, para quaisquer $m, n > n_0$, digamos $m < n$, tanto x_m quanto x_n estão em F_n.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, existe n_0 tal que para todo $\varepsilon > 0$ temos $diam(F_n) < \varepsilon$. Logo, $m, n > n_0$ implica que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e, portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Por M ser completo, existe $a \in M$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Mostremos que $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. De fato, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, temos $x_n \in F_m$, desde que $n \geq m$. Como cada F_m é fechado, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in F_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, o que resulta em $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Além disso, a deve ser único, caso contrário, existiria $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ e $b \neq a$ que implicaria em $d(a, b) \leq diam(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, então $d(a, b) = 0$. Logo $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Reciprocamente, dada uma sequência de Cauchy $(x_n) \subset M$, denotemos por $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ o conjunto de termos de (x_n) para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí segue que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e, por conseguinte, $(\overline{X_n})$ é uma sequência decrescente de fechados não vazios. Além disso, $\lim\limits_{n\to\infty} diam(\overline{X_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} diam(X_n) = 0$. Logo, por hipótese, existe

$a \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \{a\}$. Como $a \in \overline{X_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que qualquer bola aberta $B(a,\varepsilon)$ contém pontos de x_n com índices suficientemente grandes, ou seja, a é limite de uma subsequência de (x_n). Por (x_n) ser de Cauchy, sua subsequência também o é, logo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e, portanto, M é completo. ■

Definição 5.2. *Chama-se espaço de Baire um espaço métrico no qual todo subconjunto magro tem interior vazio.*

Exemplo 5.6. *O espaço métrico $\mathbb{Z}$ munido da métrica zero-um é um espaço de Baire. De fato, todos os subconjuntos de $\mathbb{Z}$ são abertos, o que inclui os conjuntos unitários $\{n\}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $\mathbb{Z}$ com a métrica discreta pode ser representado como a união enumerável de conjuntos unitários fechados com interior vazio: $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$. Cada $\{n\}$ é fechado, pois o complemento de $\{n\}$ em $\mathbb{Z}$ é o conjunto $\mathbb{Z} - \{n\}$, que é aberto. Assim, $\mathbb{Z}$ com a métrica discreta é um espaço de Baire.*

Observação 5.4. *Em particular, todo espaço discreto munido da métrica zero-um é um espaço de Baire.*

Exemplo 5.7. *O espaço $\mathbb{Q}$ não é um espaço de Baire, pois é magro em si mesmo. Além disso, resultará da Proposição* 5.1 *que o espaço dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço de Baire.*

Exemplo 5.8. *O conjunto de Cantor é um espaço de Baire, pois é um subespaço fechado da reta $\mathbb{R}$.*

Observação 5.5. *É nos espaços de Baire que os subconjuntos magros são, de fato, insignificantes.*

O resultado principal deste capitulo e um dos mais importantes da teoria de Espaços Métricos é o seguinte:

Teorema 5.1 (Teorema de Baire)**.** *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico completo. Dada uma família enumerável (A_n) de abertos densos em M, mostremos que $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é um subconjunto denso em M. Para isso, devemos mostrar que dado arbitrariamente uma bola aberta $B_1 \subset M$, tem-se $B_1 \cap S \neq \emptyset$. Com efeito, seja A_1 aberto e denso, então $B_1 \cap A_1$ é aberto e não vazio, donde contém uma bola aberta B_2 cujo raio é tão pequeno que não excede $\frac{1}{2}$ e seu fecho esteja inteiramente contido em $B_1 \cap A_1$. Por sua vez, seja A_2 aberto e denso tal que $B_2 \cap A_2$ é aberto e não vazio, logo, podemos obter uma bola aberta B_3 de raio inferior a $\frac{1}{3}$ tal que $\overline{B}_3 \subset B_2 \cap A_2$. Prosseguindo desta forma, obtemos uma sequência $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \cdots \supset \overline{B}_n \supset \cdots$ de fechados não vazios com $\overline{B}_{n+1} \subset \overline{B}_n \cap A_n$ cujo $\lim\limits_{n\to\infty} diam(\overline{B}_n) = 0$. Segue do Teorema de Cantor que existe $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n = \{a\}$. Em virtude da relação $\overline{B}_{n+1} \subset \overline{B}_n \cap A_n$, vemos que a pertence tanto a B_1 quanto a todos os A_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $a \in B_1 \cap S$ e, portanto, $B_1 \cap S \neq \emptyset$ o que possibilita garantirmos que M é um espaço de Baire. ∎

Corolário 5.1. *Seja M um espaço métrico completo. Se* $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$*, onde cada* F_n *é fechado em M, então existe pelo menos um n tal que* $int\, F_n \neq \emptyset$

Demonstração. De fato, se $int\, F_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então pelo Teorema de Baire, a reunião dos F_n teria interior vazio, o que é absurdo pois tal reunião é M. ∎

Observação 5.6. *Ser um espaço de Baire é um fato topológico, logo continua válido se substituirmos a métrica do espaço métrico M por outra equivalente. Em outras palavras, isso significa que todo espaço topológico homeomorfo a um espaço métrico completo é um espaço de Baire. A titulo de exemplo, se A é um subconjunto aberto de um espaço métrico completo* M*, então* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$*, onde cada* F_n *é fechado em* M*. Isso implica que algum dos* F_n *tem interior não vazio em A. Esta condição determina uma versão mais forte do Corolário* 5.1.

Proposição 5.3. *Seja M um espaço métrico completo. Se* $M = \bigcup_{n-1}^{\infty} F_n$*, onde* F_n *é fechado em* M*, então* $A = \bigcup_{n-1}^{\infty} int\, F_n$ *é um aberto denso em* M*.*

Demonstração. Seja U aberto e não vazio em M. Mostremos que $U \cap A \neq \emptyset$, isto é, existe n tal que $U \cap int\, F_n \neq \emptyset$. Denotemos $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(U \cap F_n)$, onde cada $U \cap F_n$ é fechado em U. Pela Observação 5.6, existe n tal que $int\,(U \cap F_n) \neq \emptyset$. Como o interior de $U \cap F_n$ é um aberto contido em ambos conjuntos U e F_n, temos que $int\,(U \cap F_n) = U \cap int\, F_n$. Portanto, $U \cap int\, F_n \neq \emptyset$. ∎

Exemplo 5.9. *Sendo M um espaço métrico completo contendo uma quantidade enumerável de pontos, então M deve possuir uma infinidade de pontos isolados. Com efeito, é óbvio que M deve possuir pelo menos um ponto isolado, pois se tal afirmação fosse falsa, pelo Exemplo* 5.1*, M seria magro em si mesmo e, pelo Teorema de Baire,* $int\, M = \emptyset$*, o que é absurdo. De posse disso, seja* $x_1 \in M$ *isolado, então* $M - \{x_1\}$ *é fechado em M e portanto é um espaço métrico enumerável. Logo, existe* $x_2 \in M - \{x_1\}$ *isolado e assim sucessivamente. Em particular, todo subconjunto fechado enumerável do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *possui uma infinidade de pontos isolados. Essa afirmação proporciona também uma demonstração de que o conjunto dos números reais não é enumerável, por ser um espaço métrico completo sem pontos isolados*

Observação 5.7. *Segue da Proposição* 5.3 *que todo espaço de Baire possui um subconjunto discreto denso.*

Proposição 5.4. *Todo subconjunto aberto A de um espaço de Baire M é um espaço de Baire*

Demonstração. Devemos mostrar que a interseção $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ de uma família enumerável de subconjuntos $A_n \subset A$, abertos densos em A, é um subconjunto denso em A. Para isso, seja $B_n = A_n \cup (M - \overline{A})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, A é aberto em M, logo cada A_n também o é e, por conseguinte, cada B_n também. Note ainda que cada B_n é denso em M. De fato, temos $M = A \cup \partial A \cup (M - \overline{A})$.

Seja $x \in M$ um ponto arbitrário e seja U um aberto arbitrário de M contendo o ponto x. Se $x \in A$ então $U \cap A$ é um aberto não vazio de A, donde $U \cap A_n = (U \cap A) \cap A_n \neq \emptyset$ uma vez que A_n é denso em A. Se $x \in \partial A$, obtemos $U \cap A \neq \emptyset$, pela definição de fronteira, e daí $U \cap A_n \neq \emptyset$ pelo mesmo motivo citado anteriormente. Por fim, se $x \in M - \overline{A}$, então $U \cap (M - \overline{A}) \neq \emptyset$, evidentemente. Em qualquer hipótese, $U \cap B_n \neq \emptyset$, comprovando que B_n é denso em M. Sendo M um espaço de Baire, $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ é um subconjunto denso de M. Como A é aberto, $T \cap A$ é denso em A, mas $T = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup (M - \overline{A}) = S \cup (X - \overline{A})$, logo $T \cap A = S$ e, portanto, S é denso em A. ∎

Proposição 5.5. *Se todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que é um espaço de Baire, então M é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ a interseção de uma família enumerável de abertos A_n densos em M. Mostremos que S é denso em M. Para isso, tomemos um ponto $x \in X$ e um aberto arbitrário U contendo o ponto x. Segue daí que $S \cap U \neq \emptyset$. De fato, por $x \in X$ existe uma vizinhança V que é um espaço de Baire. Seja W aberto em X tal que $x \in W \subset U \cap V$. Pela Proposição 5.4, W é um espaço de Baire. Os conjuntos $A_n \cap W$ são abertos e densos em W, logo $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap W)$ é denso em W. No entanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap W) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cap W = S \cap W \subset U \cap V$$

isto é,

$$S \cap W \subset U \Rightarrow S \cap W \subset S \cap U.$$

Portanto, $S \cap U \neq \emptyset$. ∎

Proposição 5.6. *O complementar de um subconjunto magro de um espaço de Baire é um espaço de Baire. Equivalentemente: a interseção de uma família enumerável de abertos densos num espaço de Baire é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada A_n é aberto e denso num espaço de Baire M. Mostremos que S é um espaço de Baire. Seja (B_n) uma família enumerável de abertos densos em S. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = S \cap B'_n$, onde B'_n é aberto em M. Além disso, sendo M um espaço de Baire, S é denso em M, logo cada B_n também o é. Em particular, B'_n é denso em M para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja (C_n) uma família enumerável de abertos densos em M, definida por $C_{2n} = A_n$; $C_{2n-1} = B'_n$, ou seja, $(C_n) = (B'_1, A_1, B'_2, A_2, \dots)$. Segue daí que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ é denso em M. Entretanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B'_n\right) = S \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B'_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (S \cap B'_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ é denso em S. ■

Exemplo 5.10. *Segue da Proposição* 5.6 *que o conjunto dos números irracionais* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *é um espaço de Baire, uma vez que o seu complementar, o conjunto* $\mathbb{Q}$*, é magro na reta.*

5.1 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BAIRE

Como aplicações do Teorema de Baire, apresentaremos os seguintes resultados:

5.1.1 Não enumerabilidade da reta

A demonstração da não enumerabilidade dos números reais é um resultado fundamental na Teoria dos Conjuntos e na Análise Matemática. Essencialmente, ela mostra que não é possível listar todos os números reais em uma sequência numerável. A prova clássica, muitas vezes atribuída a Georg Cantor, utiliza o argumento do método da diagonalização. Suponha, por contradição, que seja possível listar todos os números reais em uma sequência $r_1, r_2, r_3, \dots$. Então, construímos um número real que não está na lista ao criar uma diagonal composta por dígitos não correspondentes nas posições decimais dos números listados.

Esse novo número não pode estar na lista original, pois difere de cada número na lista em pelo menos uma posição decimal. Portanto, a suposição de que podemos listar todos os números reais gera uma contradição.

Consequentemente, concluímos que o conjunto dos números reais não é enumerável, não podendo ser colocados em uma correspondência biunívoca com os números naturais. Essa descoberta foi revolucionária e teve implicações profundas na compreensão da cardinalidade dos conjuntos infinitos, consolidando o trabalho de Cantor na Teoria dos

Conjuntos. Vejamos a seguir a maneira na qual o Teorema de Baire pode ser aplicado para mostrar que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Proposição 5.7. *A reta $\mathbb{R}$ não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{R}$ seja enumerável, então $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$, isto é, $\mathbb{R}$ pode ser escrito como reunião enumerável de seus pontos, no qual são evidentemente fechados em $\mathbb{R}$. Segue do Corolário 5.1 que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $int\,\{r_n\} \neq \emptyset$. Absurdo.

Observação 5.8. *A ideia básica por trás da não enumerabilidade dos números reais utilizando o Teorema de Baire está relacionada com a natureza densa dos conjuntos abertos em uma topologia adequada. Se considerarmos o espaço dos números reais $\mathbb{R}$ munido com a métrica usual, então os intervalos abertos são conjuntos densos. O Teorema de Baire afirma que a interseção de uma sequência de conjuntos densos é densa. Podemos então considerar o complementar desses conjuntos densos e mostrar que a interseção deles ainda é densa no complemento.*

5.1.2 Principio da Limitação Uniforme

O Teorema de Baire estabelece propriedades sobre conjuntos completos de funções contínuas, e é frequentemente usado na demonstração de resultados como o Princípio da Limitação Uniforme. Este principio é uma ferramenta valiosa na Análise Matemática, especialmente quando se lida com sequências de funções, pois tal resultado afirma que a convergência de uma sequência de funções contínuas definidas em um conjunto fechado e limitado, além de convergir pontualmente para uma função limite, também converge uniformemente.

A importância do Teorema de Baire nesse contexto está relacionada à estrutura dos conjuntos de funções contínuas, pois a interseção de conjuntos densos e abertos em um espaço métrico completo também é densa. Isso, ao ser aplicado ao espaço de funções contínuas em um domínio compacto (conjunto fechado e limitado), resulta em um conjunto de funções contínuas denso nesse espaço.

A densidade das funções contínuas é crucial para o Princípio da Limitação Uniforme, porque permite aproximar qualquer função naquele espaço por funções contínuas. Isso é fundamental quando se lida com a convergência uniforme, pois é possível aproximar a função limite por funções contínuas da sequência, garantindo a convergência uniforme.

Em suma, esses resultados, quando combinados, fornecem uma estrutura sólida para estudar o comportamento de sequências de funções e a convergência uniforme em espaços de funções contínuas. Vejamos tal demonstração:

Proposição 5.8. *Seja M um espaço métrico completo, E um espaço vetorial normado e $\mathscr{C}(M;E)$ uma família de aplicações contínuas $f : M \to E$. Suponhamos que $\mathscr{C}(M;E)$ seja pontualmente limitada, isto é, para cada $x \in M$, existe uma constante $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ para cada $f \in \mathscr{C}(M;E)$. Afirmamos que existe um aberto não vazio $U \subset M$ tal que $\mathscr{C}(M;E)$ é uniformemente limitado em U, ou seja, existe uma constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para toda $f \in \mathscr{C}(M;E)$ e todo $x \in U$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos o conjunto $F_n = \{x \in M; |f(x)| \leq n, \forall f \in \mathscr{C}\}$. Cada F_n é fechado, devido à continuidade das funções em $\mathscr{C}(M;E)$.

Agora, para cada $x \in M$, escolhemos um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq c_x$. Isso garante que $x \in F_n$. Como isso vale para todo $x \in M$, temos que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Pelo Corolário 5.1, sabemos que pelo menos um dos conjuntos F_n tem interior não vazio. Ou seja, existe um n tal que $U = int\, F_n \neq \emptyset$. Isso significa que existe uma bola aberta contida em U.

Como para todo $x \in U$ e toda $f \in \mathscr{C}(M;E)$, temos $|f(x)| \leq n$, segue que esta bola contém funções que são uniformemente limitadas por n. Portanto, $\mathscr{C}(M;E)$ é uniformemente limitado em U. ■

5.1.3 O Conjunto de Cantor não é enumerável

O conjunto de Cantor K é um subespaço fechado da reta, logo, é um espaço métrico completo e, consequentemente, um espaço de Baire. Em virtude disso, podemos usar o Teorema de Baire para mostrar que o conjunto de Cantor não é enumerável. Para isso, mostraremos que nenhum de seus pontos é isolado.

Proposição 5.9. *O conjunto de Cantor, não é enumerável.*

Demonstração. Consideremos, por exemplo, que $b \in K$ seja a extremidade de um terço médio omitido (a, b). Embora exista um intervalo semiaberto $(a, b]$ tal que $(a, b] \cap K = \{b\}$, qualquer intervalo $[b, b + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de K, para todo $\varepsilon > 0$. De fato, na ocasião em que (a, b) foi retirado, restou um certo intervalo $[b, c]$. Nas etapas posteriores da construção de K, restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo $[b, c_n]$, com $c_n \in K$. O comprimento $|c_n - b|$ tende para zero, logo, $c_n \to b$ e assim b não é ponto isolado de K.

Por outro lado, suponhamos que $x \in K$ não seja extremo de um intervalo omitido durante a construção de K. Afirmamos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem pontos de K em ambos os intervalos $(x - \varepsilon, x)$ e $(x, x + \varepsilon)$. Tomemos $(x, x + \varepsilon)$, por exemplo. Se $(x, x + \varepsilon) \cap K$ fosse vazio, então o intervalo $(x, x + \varepsilon)$ teria sido omitido durante a construção de K. Na primeira vez em que uma parte de $(x, x+\varepsilon)$ fosse omitida, nada mais restaria desse intervalo pois os extremos do intervalo omitido pertenceriam a K e, portanto, não seriam omitidos em etapas posteriores. Como x permaneceu, segue que o intervalo omitido foi do tipo (x, b). Mas x não é extremo de intervalo omitido algum, logo $(x, x+\varepsilon) \cap K \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ e, portanto, x não é isolado em K.

Decorre disso que K não é enumerável. ■

Observação 5.9. *Apesar de não termos considerado $x \in K$ como extremo de um terço médio omitido durante a construção do conjunto de Cantor, não podemos afirmar que tais pontos realmente existem em K. No entanto, como apenas uma infinidade enumerável de intervalos foi omitida, os pontos extremos dos intervalos omitidos formam um subconjunto enumerável de K. Portanto, a partir desta discussão, concluímos que os demais pontos não apenas existem, mas também formam um conjunto não enumerável.*

5.1.4 O conjunto dos pontos de descontinuidade de um espaço métrico completo é magro

Sabemos que uma sequência de aplicações contínuas $f_n : M \to N$ pode convergir simplesmente para uma aplicação descontínua $f : M \to N$. Utilizaremos agora o Teorema de Baire para mostrarmos que, quando o espaço métrico M é completo, a função limite é contínua na maioria dos pontos de M, ou seja, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é magro. A ideia é que se o conjunto de descontinuidades fosse denso (ou seja, não magro), poderíamos aplicar o Teorema de Baire para concluir que o conjunto de funções contínuas seria residual, contradizendo a natureza dos pontos de descontinuidade. Começaremos com uma condição para que a aplicação f seja contínua num ponto.

Proposição 5.10. *Dada uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, convergindo simplesmente para uma aplicação $f : M \to N$. A fim de que f seja contínua no ponto a, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$ existam $\delta > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponhamos que sejam satisfeitas as condições postas no enunciado. Mostremos que f é contínua no ponto a. Dado $\varepsilon > 0$, existem $p \in \mathbb{N}$ e $\delta' > 0$ tais que

$$d(x, a) < \delta' \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Além disso, existe também $\delta'' > 0$ de modo que

$$d(x, a) < \delta'' \Rightarrow d(f_p(x), f_p(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando $\delta = min\{\delta', \delta''\}$, temos:

$$\begin{aligned} d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_p(x)) + d(f_p(x), f_p(a)) + d(f_p(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja f contínua no ponto a. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que $d(x,a) < \delta' \Rightarrow d(f_p(a), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ e, como f_p é contínua no ponto a, existe também $\delta'' > 0$ de modo que $d(x,a) < \delta'' \Rightarrow d(f_p(x), f_p(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tomando $\delta = min\{\delta', \delta''\}$, temos:

$$\begin{aligned} d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f(a)) &\leq d(f_p(x), f_p(a)) + d(f_p(a), f(a)) + d(f(a), f(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

■

Proposição 5.11. *Dados os espaços métricos M e N. Se M é completo e uma sequência de aplicações contínuas $f_n : M \to N$ converge simplesmente para uma aplicação $f : M \to N$, então o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é magro em M.*

Demonstração. Para cada $k, p \in \mathbb{Z}$, definimos

$$F_{kp} = \left\{ x \in M | d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{k}, \forall m, n \geq p \right\}.$$

Este conjunto contém os pontos x em M para os quais as sequências $(f_m(x))_{m \geq p}$ e $(f_n(x))_{n \geq p}$ estão próximas uma da outra. Fazendo $m \to \infty$, vemos que $x \in F_{kp}$ implica $d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{k}$, para todo $n > p$. Como cada f_n é contínua, todos os conjuntos F_{kp} são fechados em M. Além disso, para cada $K \in \mathbb{Z}$, temos $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{kp}$. De fato, para qualquer $x \in M$, $f_n(x) \to f(x)$, logo, $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy em N e por conseguinte existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > p \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \geq \frac{1}{k}$.

Pela Proposição 5.3, existe $A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} int F_{kp}$, tal que cada A_k é aberto denso em M. Seja $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_k$. Mostremos que f é contínua em todo ponto de S.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, tomemos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{3}{k} < \varepsilon$. Seja $x_0 \in A_k$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in int F_{kp}$. Dado $\delta > 0$, se $d(x, x_0) < \delta$ implica $x_0 \in F_{kp}$ e $d(f_m(x), f_n(x)) \geq \frac{1}{k}$, então

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_p(x)) + d(f_p(x), f_p(x_0)) + d(f_p(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

no qual conclui-se a continuidade de f no ponto x_0. Como S é um aberto denso em M, segue que os pontos de descontinuidade de f estão no complementar de S, que por sua vez é magro em M. ■

Observação 5.10. *Este é um exemplo de como ferramentas topológicas, como o Teorema de Baire, podem ser aplicadas para obter resultados importantes sobre a convergência de sequências de funções.*

Observação 5.11. *Utilizaremos agora a Proposição* 5.11 *para mostrar que a convergência simples de funções reais de uma variável real não provém de uma métrica. Mais formalmente:*

Proposição 5.12. *Dado um intervalo $I = [a, b]$, não existe uma métrica no conjunto $\mathscr{B}(I; \mathbb{R})$ das aplicações limitadas $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\lim f_n = f$ relativamente a d de modo que $f_n \to f$ convirja ponto a ponto em I.*

Demonstração. Sejam $C = \mathscr{C}(I; \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas $g : I \to \mathbb{R}$ e $I_{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$ o conjunto dos números racionais de I. Para cada n, seja $f_n : I \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in I_{\mathbb{Q}} \\ 0 & ; \quad x \in I - I_{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Denotemos por $f : I \to \mathbb{R}$ a função característica de $\mathbb{Q} \cap I$, então $f_n \to f$ ponto a ponto em I. Agora, suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de funções contínuas $(g_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge ponto a ponto para f_n em I. Se existisse uma métrica em $\mathscr{B}(I; \mathbb{R})$ em relação à qual a convergência fosse ponto a ponto, teríamos $f_n \in \overline{C}$ para cada n e portanto $\lim f_n = f \in \overline{C}$. Isso implicaria a existência de uma sequência de funções contínuas $g_n : I \to \mathbb{R}$ convergindo ponto a ponto para f em I, o que contradiz a Proposição 5.11, pois f não pode ser limite simples de uma sequência de funções contínuas uma vez que é descontínua em todo ponto $x \in I$. Portanto, não existe tal métrica em $\mathscr{B}(I; \mathbb{R})$. ■

5.1.5 A recíproca do Teorema da Derivabilidade e Continuidade é falsa

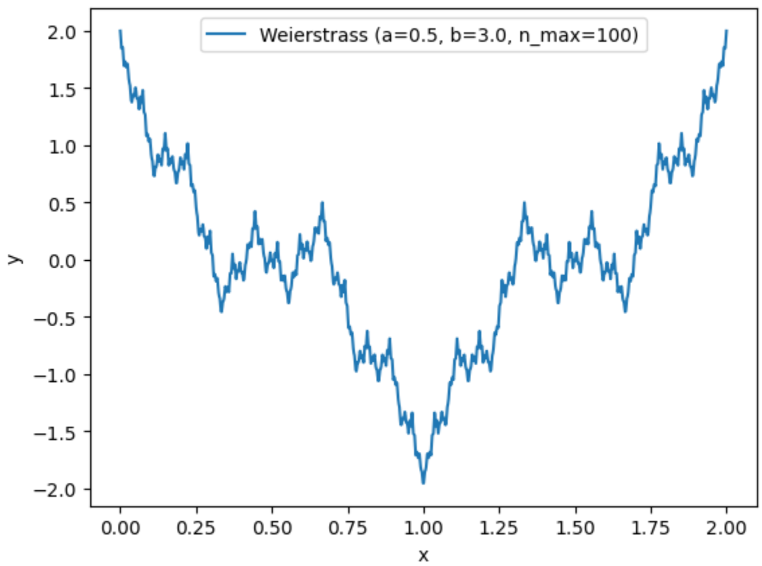
O Teorema da Derivabilidade e Continuidade estabelece uma relação entre a derivada de uma função em um ponto e sua continuidade nesse ponto. Vamos considerar o teorema em duas partes:

(1) Derivabilidade implica continuidade: Se uma função f é derivável em um ponto a, então f é contínua em a. Isso significa que se a derivada de f existe em a,

então f é contínua nesse ponto. A prova desse resultado é uma aplicação direta das propriedades das derivadas.

(2) Continuidade não implica derivabilidade: A segunda parte do teorema afirma que a continuidade de uma função em um ponto não implica necessariamente que a função seja derivável nesse ponto. Ou seja, existem funções contínuas que não são deriváveis em certos pontos. Um exemplo clássico é a função de Weierstrass.

Figura 5.2 – Representação da função de Weierstrass.



Fonte: Autoral

A função de Weierstrass é um exemplo clássico de uma função contínua mas não diferenciável em nenhum ponto. Ela foi introduzida por Karl Weierstrass no final do século XIX como uma resposta ao desafio de encontrar uma função contínua que não fosse diferenciável em ponto algum do domínio. A função é definida por meio de uma série infinita, que pode ser escrita como:

$$W(x; a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot cos(b^n \pi \cdot x),$$

onde a e b são parâmetros constantes. A função é somada sobre todos os inteiros não negativos $n \in \mathbb{N}$. A escolha específica dos parâmetros a e b afeta as propriedades da função de Weierstrass. Em particular, é possível escolher a e b de tal forma que a função de Weierstrass seja contínua em todos os lugares, mas não seja diferenciável em nenhum ponto. O interessante sobre a função de Weierstrass é que ela é um exemplo de uma função que desafia intuições geométricas comuns. Enquanto a função é contínua em todos os lugares, sua falta de diferenciabilidade em qualquer ponto é uma propriedade não trivial e desafia as expectativas de funções mais suaves.

Retornando ao Teorema da Derivabilidade e Continuidade, este é fundamental na Análise Matemática, especialmente ao estudar funções diferenciáveis. Ele destaca a relação entre a continuidade e a derivabilidade, indicando que a derivabilidade implica continuidade, mas o contrário não é verdadeiro em todos os casos. Isso ocorre porque a derivabilidade exige não apenas continuidade, mas também uma certa suavidade no comportamento da função no ponto em questão. A compreensão dessas relações é essencial para o desenvolvimento da teoria das derivadas e fornece uma compreensão sobre o comportamento das funções em pontos específicos. Mostraremos agora que o Teorema de Baire pode ser utilizado para garantir que a recíproca do teorema não é verdadeira. Vejamos:

Proposição 5.13. *Dado o intervalo* $[0,1]$*, seja* $C = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ *o conjunto das funções contínuas limitadas* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *com métrica da convergência uniforme. Há funções reais contínuas sem derivada em ponto algum no intervalo* $[0,1]$*. Equivalentemente: o conjunto das funções contínuas sem derivada em* $[0,1]$ *é magro em* C*.*

Demonstração. O conjunto $C = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ das aplicações contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ munido na métrica da convergência uniforme

$$d(f,g) = \sup_{x\,\in\,[0,1]} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$$

é um espaço métrico completo. Pelo Teorema de Baire, para garantir a magreza de um conjunto num espaço métrico completo, é suficiente mostrar que o conjunto das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que não possuem derivada em nenhum ponto de $[0,1]$ contém uma interseção enumerável de abertos densos em C, ou equivalentemente, que o seu complementar seja uma reunião enumerável de fechados com interior vazio.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$F_n = \left\{ f \in C;\ \text{para todo } t \in [0,1],\ \text{existe } h \neq 0 \text{ tal que} \left| \ \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \ \right| \leq n \right\}$$

de modo que h é suficientemente pequeno, tal que $t + h \in [0,1]$.

Parte 1: Mostrando que cada F_n é fechado

Vamos garantir que toda sequência convergente de F_n converge para um ponto de F_n, ou seja, que F_n contém todos os seus pontos de acumulação. De fato, como [0, 1] é fechado e limitado, podemos utilizar o fato que toda sequência convergente é uniformemente convergente.

Fixando $n \in \mathbb{N}$, seja (f_m) uma sequência que converge para f, com $f_m \in F_n$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por definição, há pontos $t_m \in [0,1]$ para cada $m \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\left| \ \frac{f_m(t_m + h) - f_m(t_m)}{h} \ \right| \leq n$$

para todo h suficientemente pequeno. Segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que (t_m) possui uma subsequência $(t_{m'})$ que converge para um ponto t_0 tal que

$$\begin{aligned} |f_m(t_m) - f(t_0)| &\leq |f_m(t_m) - f(t_m)| + |f(t_m) - f(t_0)| \\ &\leq d(f_m, f) + |f(t_m) - f(t_0)| \end{aligned}$$

Segue que $f(t_m) \to f(t_0)$ quando $m \to \infty$. De maneira análoga, obtemos $f(t_m + h) \to f(t_0 + h)$. Logo

$$\left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right| \leq n$$

para todo h suficientemente pequeno, ou seja, $f \in F_n$.

Parte 2: Mostrando que cada F_n tem interior vazio

Provemos que F_n não contém nenhuma bola. Com efeito, seja $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, dado uma bola $B(f, \varepsilon)$ de raio $\varepsilon > 0$ e centro em f. Por f ser uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ sempre que $|x - y| < \delta$, para todo $x, y \in [0,1]$. Repartimos o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento menores que δ. Dai construímos uma função contínua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de forma que seu gráfico seja constituído por segmentos retilíneos com inclinação maior que n, em módulo.

Primeiramente, dividimos o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento menor que δ. Para simplificar, vamos supor que $[0,1]$ é dividido em N subintervalos de comprimento δ, onde $N = \lceil 1/\delta \rceil$ e os pontos de divisão são

$$x_0 = 0, x_1 = \delta, x_2 = 2\delta, \ldots, x_N = 1.$$

Agora, vamos construir a função g de forma que seu gráfico seja constituído por segmentos de reta com inclinação maior que n em módulo. Para fazer isso, vamos definir g nos pontos de divisão x_i e depois interpolar linearmente entre esses pontos.

Definimos $g(x_0) = f(x_0)$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, definimos

$$g(x_i) = g(x_{i-1}) + n\delta.$$

Observe que a diferença entre $g(x_i)$ e $g(x_{i-1})$ é $n\delta$, então a inclinação do segmento de reta de $(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$ a $(x_i, g(x_i))$ é

$$\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{n\delta}{\delta} = n,$$

que é maior que n em módulo.

Finalmente, para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$, definimos

$$g(x) = g(x_{i-1}) + n(x - x_{i-1}).$$

Esta é uma equação linear com inclinação n que passa pelo ponto $(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$. Portanto, a função g é contínua, seu gráfico é constituído por segmentos de reta com inclinação maior que n em módulo, e $g \in B(f, \varepsilon)$ porque a diferença entre g e f em qualquer ponto é menor que $\varepsilon/2$.

Por g ser contínua em um subintervalo de $[0,1]$, g também é contínua em $[0,1]$, além disso, $g \in B(f, \varepsilon)$, porém, por definição, $g \notin F_n$. Segue daí que F_n não contém nenhuma bola e portanto é magro em C. Como $g \in C$ e não pertence a $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, temos que C é de segunda categoria, mas como uma função contínua é diferenciável em algum ponto se, e somente se, pertence a F_n, temos que g não é diferenciável em nenhum ponto do intervalo $[0,1]$. ■

Observação 5.12. *Essa abordagem destaca a importância do Teorema de Baire na Análise Funcional, pois fornece um método sistemático para mostrar que conjuntos específicos de funções são magros em espaços métricos.*

6 CONCLUSÃO

No transcurso deste trabalho, empenhamo-nos na análise minuciosa dos espaços métricos, com ênfase especial nos espaços de Baire, e exploramos a aplicação dessa teoria na demonstração do Teorema de Baire. Ao longo dos capítulos, percorremos um trajeto que nos levou desde os aspectos mais elementares e fundamentais de espaços métricos perpassando por suas propriedades geométricas e topológicas até as implicações práticas do Teorema de Baire em diversas áreas da Matemática. Através de suas ramificações, pudemos perceber sua relevância em áreas como a Análise Funcional, demonstrando a força e a abrangência desse teorema na caracterização de espaços métricos completos. Além disso, exploramos implicações surpreendentes, como a não enumerabilidade do conjunto ternário de Cantor e de um dos espaços mais clássicos da Análise: o espaço métrico $\mathbb{R}$, além da existência de funções contínuas em todo domínio, mas não deriváveis em nenhum ponto.

Com isso, à medida que avançamos nos capítulos, pudemos consolidar nosso entendimento sobre os espaços métricos e a aplicação do Teorema de Baire. Ademais, entendemos que com este estudo, conseguimos não apenas enriquecer o conhecimento teórico, mas também fornecer bases sólidas para a compreensão e aplicação prática desses conceitos matemáticos de tal modo que a discussão realizada neste trabalho lança luz sobre um domínio fascinante da Topologia, promovendo uma apreciação mais profunda das sutilezas matemáticas envolvidas.

Contudo, reconhecemos que os tópicos abordados neste trabalho representam apenas uma pequena parcela da sofisticada Análise Matemática. Em suma, esses são conceitos necessários para o entendimento de temas mais avançados, os quais identificamos como perspectivas para futuras investigações:

- Teoria de operadores lineares e espaços de funções;
- Teoria da Medida e Integração;
- Equações Diferenciais Parciais.

Em última análise, a jornada através dos espaços de Baire reforçou a importância da precisão matemática, do raciocínio lógico e da conexão intrínseca entre diferentes ramos da Matemática. Este trabalho não se encerra aqui, mas serve como um convite para explorar ainda mais as profundezas desses conceitos matemáticos e sua influência em diversas áreas da pesquisa matemática.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1982. ISBN 8570567057,9788570567055. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 21.

KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley, 1989. ISBN 0471507318. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nZmpQgAACAAJ>. Citado na página 14.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1970. Citado na página 12.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2020. (Projeto Euclides, v. 6). ISBN 978-65-990528-7-3. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 69.

MELO, G. . G. A. . *Espaços de Hilbert e suas aplicações*. Imperatriz: UEMASUL, 2022. Citado na página 70.