

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS, NATURAIS E LETRAS
CURSO DE CIÊNCIAS NATURAIS (MATEMÁTICA/FÍSICA) –
LICENCIATURA



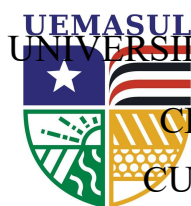
ALGUNS RESULTADOS EM CÁLCULO FRACIONÁRIO

Autor: Alessandra Guimarães dos Santos

Orientador: Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho

Estreito – MA

2026



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS, NATURAIS E LETRAS
CURSO DE CIÊNCIAS NATURAIS (MATEMÁTICA/FÍSICA) –
LICENCIATURA



Alessandra Guimarães dos Santos

ALGUNS RESULTADOS EM CÁLCULO FRACIONÁRIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte integrante dos requisitos para conclusão e obtenção do título de Licenciado em Ciências Naturais, com ênfase em Matemática pela Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão.

Orientador: Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho

S194a

Santos, Alessandra Guimarães dos

Alguns resultados em cálculo Fracionário. Alessandra Guimarães dos Santos. – Estreito, MA, 2026.

72 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, Estreito, MA, 2026.

1. Integral fracionária. 2. Derivada fracionária. 3. Riemann-Liouville. 4. Estreito - MA. I. Título.

CDU 517.524

Alessandra Guimarães dos Santos

ALGUNS RESULTADOS EM CÁLCULO FRACIONÁRIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte integrante dos requisitos para conclusão e obtenção do título de Licenciado em Ciências Naturais, com ênfase em Matemática pela Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão.

Orientador: Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho

APROVADO EM: 02 de julho de 2026

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 ISMAEL CARLOS PEREIRA DE CARVALHO
Data: 03/07/2026 16:40:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho (Orientador)

Documento assinado digitalmente
 EDUARDO ANDRE DE FIGUEIREDO BRAGANCA
Data: 03/07/2026 20:17:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo André de Figueiredo Bragança

Documento assinado digitalmente
 DIEME PEREIRA DA SILVA
Data: 06/07/2026 11:36:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Dieme Pereira da Silva

Dedico este trabalho a Deus, à minha família e a todos que contribuíram para minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Deus, fonte de toda a vida e sabedoria, por me conceder força, coragem e perseverança para superar os desafios e concluir esta importante etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho, pela dedicação, paciência, orientação e pelos valiosos conhecimentos compartilhados, fundamentais para a realização deste trabalho.

À Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL), à coordenação do curso de Ciências Naturais e a todos os professores, pelo compromisso com a educação e pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal.

Aos meus colegas e amigos de turma, pela amizade, companheirismo e apoio ao longo desta jornada, tornando os desafios mais leves e as conquistas ainda mais significativas.

À minha família, especialmente aos meus pais, Antônia e José Alberto, pelo amor, incentivo, apoio incondicional e por sempre acreditarem em mim. Seus ensinamentos e exemplos foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Ao meu filho, Bonifácio, que foi uma fonte constante de inspiração e motivação. Seu carinho, sua alegria e seu sorriso me deram forças para continuar e alcançar esta conquista.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação e para a concretização deste sonho. Minha sincera gratidão a todos.

RESUMO

O cálculo fracionário é um ramo da Matemática que generaliza os conceitos clássicos de integração e derivação para ordens não inteiras. Este trabalho apresenta os fundamentos teóricos dessa área, destacando o papel da função gama na extensão do conceito de fatorial. O estudo concentra-se na integral fracionária de Riemann-Liouville e em derivadas fracionárias aplicadas a algumas funções elementares. Foram desenvolvidos exemplos envolvendo integrais fracionárias de funções potência com expoentes positivos, bem como derivadas fracionárias de funções potência com expoentes positivos e negativos e das funções trigonométricas seno e cosseno. Os resultados mostraram que duas integrais fracionárias sucessivas de ordem $\frac{1}{2}$ aplicadas à função constante $f(x) = 1$ reproduzem a integral de primeira ordem, resultando em $f(x) = x$. De forma análoga, duas derivadas fracionárias sucessivas de ordem $\frac{1}{2}$ aplicadas à função $f(x) = x$ reproduzem a derivada de primeira ordem, cujo resultado é igual a 1. Além disso, verificou-se que as derivadas fracionárias das funções seno e cosseno apresentam um padrão consistente para ordens arbitrárias com o auxílio da fórmula de soma de arcos, confirmando a coerência da teoria. Conclui-se que o cálculo fracionário constitui uma extensão natural do cálculo diferencial e integral clássico, preservando propriedades fundamentais das derivadas e integrais e oferecendo ferramentas matemáticas adequadas para a modelagem de fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento.

Palavras Chaves: Integral fracionária; Derivada fracionária; Riemann-Liouville.

ABSTRACT

Fractional calculus is a branch of Mathematics that generalizes the classical concepts of integration and differentiation to non-integer orders. This work presents the theoretical foundations of this field, highlighting the role of the gamma function in extending the concept of factorial. The study focuses on the Riemann–Liouville fractional integral and on fractional derivatives applied to some elementary functions. Examples were developed involving fractional integrals of power functions with positive exponents, as well as fractional derivatives of power functions with positive and negative exponents and of the trigonometric functions sine and cosine. The results showed that two successive fractional integrals of order $\frac{1}{2}$ applied to the constant function $f(x) = 1$ reproduce the first-order integral, yielding $f(x) = x$. Similarly, two successive fractional derivatives of order $\frac{1}{2}$ applied to the function $f(x) = x$ reproduce the first-order derivative, whose result is equal to 1. Furthermore, it was verified that the fractional derivatives of the sine and cosine functions exhibit a consistent pattern for arbitrary orders with the aid of the angle-sum formula, confirming the coherence of the theory. It is concluded that fractional calculus constitutes a natural extension of classical differential and integral calculus, preserving fundamental properties of derivatives and integrals while providing suitable mathematical tools for modeling complex phenomena in various fields of knowledge.

Keywords: Fractional Integral; Fractional Derivative; Riemann–Liouville.

Sumário

RESUMO.....	7
ABSTRACT.....	8
1. INTRODUÇÃO	8
2. CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO.....	12
2.1. Fatorial.....	12
2.1.1 Arranjos.....	12
2.1.2 Permutações	13
2.1.3 Combinações.....	13
2.2. Duplo Fatorial	14
2.3. Função Gama	15
3. INTEGRAL FRACIONÁRIO	27
4. DERIVADA FRACIONÁRIA	57
4.1 Derivada fracionária de potência de x	57
4.2 Derivadas fracionárias das funções seno e cosseno	62
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	67
REFERÊNCIAS.....	69

1. INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral, desenvolvido independentemente por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII, constitui um dos pilares da matemática moderna. Desde sua criação, os conceitos de derivada e integral têm sido amplamente utilizados para modelar fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos. Entretanto, já nos primórdios do cálculo surgiu o questionamento acerca da possibilidade de estender essas operações para ordens não inteiras (Teodoro; Oliveira; Oliveira, 2018).

O desenvolvimento dessa ideia deu origem ao cálculo fracionário, área da Matemática que estuda a generalização dos operadores clássicos de integração e derivação para ordens arbitrárias, incluindo números reais, complexos e fracionários. Diferentemente do cálculo tradicional, que considera apenas integrais e derivadas de ordem inteira, o cálculo fracionário permite estender esses conceitos para ordens não inteiras, possibilitando uma descrição mais abrangente de diversos fenômenos naturais (Tieppo; Guzzo, 2018).

O surgimento do cálculo fracionário é geralmente associado ao ano de 1695, durante a fase inicial de desenvolvimento do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz. Nesse período, uma carta enviada por L'Hospital a Leibniz apresentou um questionamento acerca da interpretação da seguinte expressão:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x). \quad (1.1)$$

Leibniz respondeu: “Um aparente paradoxo, do qual algum dia, consequências úteis poderão ser feitas”. A resposta de Leibniz ao questionamento de L'Hospital, aliada às contribuições de diversos matemáticos de destaque, como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside e Liouville, impulsionou o desenvolvimento das primeiras ideias relacionadas às derivadas e integrais de ordem não inteira (Oldham; Spanier, 1974).

Além da importância teórica, o cálculo fracionário possui aplicações em diversas áreas do conhecimento, como modelagem de materiais viscoelásticos, oscilador harmônico, sistemas elétricos com memória, difusão anômala, processamento de sinais, teoria de controle, dinâmica populacional e mecânica quântica. Em muitos desses problemas, os modelos

fracionários fornecem descrições mais precisas do que aquelas obtidas pelos modelos clássicos (Oliveira, 2018).

Um dos principais instrumentos matemáticos utilizados para introduzir o cálculo fracionário é a função gama, introduzida por Euler como uma generalização do conceito de fatorial. A qual possibilita estender o conceito de fatorial para números não inteiros, sendo fundamental para a formulação das integrais e derivadas fracionárias. Um resultado clássico é

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi},$$

que evidencia a capacidade dessa função de relacionar conceitos aparentemente distintos e fornece a base para diversos resultados do cálculo fracionário (Melo, 2021).

Diferentemente da abordagem tradicional do cálculo, em que as derivadas são estudadas antes das integrais, o cálculo fracionário geralmente inicia sua construção teórica pelas integrais fracionárias. Entre as definições mais importantes destaca-se a integral fracionária de Riemann-Liouville, que permite estender o operador integral para ordens arbitrárias por meio da utilização da função gama. Essa definição constitui um dos pilares da teoria e serve como ponto de partida para diversas formulações de derivadas fracionárias desenvolvidas posteriormente (Ferreira, 2024).

Dessa forma, define-se primeiro a integral fracionária de acordo com Riemann Liouville, com um método que nos possibilita representar qualquer integral fracionária, como o auxílio da função gama, é viável inserir números não inteiros na fórmula de integração desenvolvida por Liouville (Zeiser, 2023), permitindo calcular a integral

$$\int_{\frac{1}{2}} f(x) dx \tag{1.2}$$

e mostraremos a seguinte equivalência

$$\int_{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int f(x) dx.$$

Existem diversas definições que envolvem a expressão d^n/dx^n , para n inteiro ou não-inteiro, chamada como derivada de ordem fracionária, a qual deve obter o mesmo efeito

de uma derivada simples e regular (Vcubingx, 2019). Com o auxílio da fórmula de soma de arcos, verificamos que as derivadas fracionárias das funções $\sin x$ e $\cos x$ possuem esta mesma propriedade de uma derivada simples e regular.

No estudo do cálculo fracionário, um dos resultados mais relevantes é a generalização das fórmulas clássicas de derivação e integração aplicadas a algumas funções elementares. Para funções potência, por exemplo, os operadores fracionários podem ser expressos por meio da função gama, produzindo resultados que estendem naturalmente as regras conhecidas do cálculo tradicional. De maneira semelhante, as funções trigonométricas seno e cosseno apresentam comportamentos particularmente interessantes quando submetidas a derivada de ordem fracionária, preservando relações estruturais que lembram aquelas observadas nas derivadas de ordem inteira (Morillo; Riera; Yangari, 2022).

Considerando a amplitude do cálculo fracionário, este trabalho delimita-se ao estudo de integrais e derivadas fracionárias aplicadas a algumas funções elementares. Especificamente, são analisadas integrais fracionárias e derivadas fracionárias de funções potência. Também são investigadas as derivadas fracionárias das funções trigonométricas seno e cosseno, buscando compreender como os operadores de ordem arbitrária generalizam os resultados conhecidos do cálculo diferencial e integral tradicional.

A relevância deste estudo está relacionada à crescente importância do cálculo fracionário na Matemática e em diversas áreas do conhecimento. Além de representar uma extensão natural do cálculo clássico, os operadores fracionários têm sido utilizados na modelagem de sistemas que apresentam memória e efeitos hereditários, características frequentemente encontradas em fenômenos físicos e de engenharia. Do ponto de vista acadêmico, o estudo de exemplos envolvendo funções elementares contribui para uma melhor compreensão dos fundamentos do cálculo fracionário, tornando seus conceitos mais acessíveis aos estudantes e pesquisadores interessados na área (Oliveira, 2018).

O objetivo geral deste trabalho é estudar os fundamentos do cálculo fracionário por meio da análise de integrais e derivadas de ordem arbitrária aplicadas a algumas funções elementares.

Para alcançar esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos: estudar a função gama e sua relação com a generalização do conceito de fatorial; introduzir a integral fracionária segundo a definição de Riemann-Liouville; resolver exemplos de

integrais fracionárias de funções potência com expoentes positivos; calcular derivadas fracionárias de funções potência com expoentes positivos e negativos; analisar as derivadas fracionárias das funções seno e cosseno; e comparar os resultados obtidos com aqueles provenientes do cálculo diferencial e integral clássico.

Quanto à metodologia, a pesquisa caracteriza-se como pesquisa bibliográfica, de natureza teórica e exploratória. O trabalho foi desenvolvido a partir da análise de livros, artigos científicos, dissertações e teses relacionados ao cálculo fracionário. Com base nesse referencial teórico, foram realizados estudos e exemplos envolvendo integrais fracionárias de potências positivas e derivadas fracionárias de potências positivas, potências negativas, seno e cosseno, com o objetivo de verificar as propriedades desses operadores e sua relação com os resultados clássicos do cálculo.

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos. Após esta introdução, o Capítulo 2 apresenta conceitos básicos do cálculo fracionário, introduzindo o fatorial e a função gama. O Capítulo 3 aborda a integral fracionária de Riemann-Liouville e apresenta exemplos aplicados a funções potência. O Capítulo 4 dedica-se ao estudo das derivadas fracionárias de funções potência. Além de funções seno e cosseno, destacando suas propriedades e resultados. Por fim, são apresentadas as considerações finais do trabalho, enfatizando os principais resultados obtidos e possíveis perspectivas para estudos futuros.

2. CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos fundamentais do cálculo fracionário que servirão de base teórica para o desenvolvimento e a obtenção de uma possível solução para as equações (1.1) e (1.2).

2.1. Fatorial

Presente em diversas áreas da matemática, o fatorial é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ representada por um número natural $n!$, que é o produto de todos os inteiros positivos menores ou igual a n . Definido por

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1, \text{ para } n \geq 1$$

ou pode ser definida por

$$n! = n \times (n - 1)!.$$

De forma que n seja diferente de 0, conforme a convenção para números inteiros, o fatorial de zero é definido como 1.

Existem varias aplicações para fatorial, dentre elas temos a análise combinatória, na qual identifica três tipos básicos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. Ver em (Hazzan, 2013).

2.1.1 Arranjos

Os arranjos são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos. Podendo ocorrer mudanças no agrupamento se a ordem dos elementos for alterada. O cálculo de arranjos simples de n elementos agrupados em conjuntos de p , ou seja, p a p ($p \leq n$), de forma que o fatorial do número total de elementos disponíveis é dividido pelo fatorial da diferença do número total e a quantidade de elementos que compõe o agrupamento, utiliza-se

a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Como exemplo de arranjo, podemos pensar na votação para escolher um representante e um vice representante de uma turma, com 20 alunos. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante.

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 380.$$

Dessa forma, podemos observar que o arranjo pode ser feito de 380 maneiras diferentes, podemos notar também a importância da ordem na alteração do resultado.

2.1.2 Permutações

As permutações são agrupamentos ordenados, isto é uma variação específica do arranjo simples, ocorrendo precisamente quando a quantidade de elementos disponíveis coincide com o número de posições a serem preenchidas no agrupamento. Desta maneira, o denominador na fórmula do arranjo é igual a 1 na permutação. Representada pela seguinte expressão

$$P_n = n!.$$

Para exemplificar, vamos pensar de quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se sentar em um banco com 6 lugares.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Isso nos mostra que existem 720 maneiras diferentes para as 6 pessoas se sentarem neste banco.

2.1.3 Combinações

As combinações são agrupamentos de elementos onde a ordem não interfere no resultado, a combinação é definida exclusivamente pela natureza dos elementos escolhidos e não a posição ocupada dentro do subconjunto. O cálculo de uma combinação simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$), é dado pela expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)}.$$

Para exemplificar, podemos pensar na escolha de 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre as 10 pessoas que se candidataram. De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Podemos observar no exemplo que nas combinações a ordem dos elementos não é relevante. Obtendo 120 maneiras diferentes para formar a comissão.

2.2. Duplo Fatorial

O duplo fatorial é uma generalização da função fatorial usual, definida como o produto sucessivo de número inteiros positivos de mesma paridade. Representado por $n!!$, é definido por

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4) \cdots 2, & \text{se } n \text{ é par,} \\ n(n-2)(n-4) \cdots 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, o duplo fatorial está relacionado ao fatorial usual de acordo com as seguintes identidades,

$$k!! = \begin{cases} (2n)!! = 2^n n!, & \text{se } n \text{ é par,} \\ (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

que são frequentemente utilizadas na dedução de propriedades da função gama para argumentos de semi-inteiros. Por convenção $0!! = 1$ e $(-1)!! = 1$. Diferentemente do fatorial usual, que envolve o produto de todos os inteiros positivos até n , o duplo fatorial considera apenas os termos da mesma paridade de n , decrescendo de duas unidades a cada fator (Callan, 2009).

Exemplo 2.2. O duplo fatorial de 7 e 8 são, respectivamente,

$$7!! = 7 \cdot (7-2) \cdot (7-4) \cdot (7-6)$$

$$7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$$

$$8!! = 8 \cdot (8 - 2) \cdot (8 - 4) \cdot (8 - 6)$$

$$8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$$

2.3. Função Gama

Baseando-se nos estudos de Euler (1707–1783) sobre movimentos harmônicos iniciados em 1729, a função em questão será apresentada por meio de sua representação como integral imprópria cuja definição é dada como segue. Uma das consequências, é que a função fatorial através da função gama pode ser definida exclusivamente para não inteiros (Melo, 2021).

Definição 2.1 (Função Gama). Seja $z > 0$, definimos a função gama pela seguinte integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Com o objetivo de generalizar a ideia de fatorial de um número natural, a função gama cuja notação Γ foi atribuída por Legendre em 1811, tornou-se essencial em campos como a dinâmica dos fluidos e a astronomia. De acordo com Melo (2021), sua aplicabilidade estende-se até mesmo ao estudo estatístico da frequência de terremotos. A partir de tal função é possível realizar o cálculo do fatorial para argumentos complexos, o que fundamenta as operações de ordem não inteira no cálculo fracionário.

Fazendo a demonstração de como calcular a função gama para inteiros positivos, temos:

1. Vamos calcular $\Gamma(1) = 1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^{-t} dt \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{e^t} \Big|_0^j \right] \\
&= \frac{-1}{\lim_{j \rightarrow \infty} e^j} + e^0 = 1.
\end{aligned}$$

2. Vamos calcular $\Gamma(2) = 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \int_0^\infty t^{2-1} \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t \cdot e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ \int dv = \int e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} + c. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int t \cdot e^{-t} dt &= t \cdot (-e^{-t}) - \int -e^{-t} dt \\
&= -t \cdot e^{-t} + \int e^{-t} dt \\
&= -t \cdot e^{-t} - e^{-t} + c.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \int_0^\infty t^1 \cdot e^{-t} dt \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} (-t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \Big|_0^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t} \right)_0^j \\
&= (-0 - 0) - \left(-\frac{0}{e^0} - \frac{1}{e^0} \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(2) = 1.$$

3. Vamos calcular $\Gamma(3) = 2$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(3) &= \int_0^{\infty} t^{3-1} \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-t} dt. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{cases} u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt, \\ \int dv = \int e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int t^2 \cdot e^{-t} dt &= t^2 \cdot (-e)^{-t} - \int -e^{-t} \cdot 2t dt \\
&= -t^2 \cdot e^{-t} + 2 \int t e^{-t} dt \\
&= -t^2 \cdot e^{-t} - 2t \cdot e^{-t} - 2e^{-t} + c.
\end{aligned}$$

A integral na segunda igualdade já foi resolvida em (2.1). Aplicando em (2.2), obtemos

$$\Gamma(3) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{e^t} - \frac{2t}{e^t} - \frac{2}{e^t} \right)_0^j$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(-\frac{j^2}{e^j} - \frac{2j}{e^j} - \frac{2}{e^j} \right) - \left(-\frac{0}{e^0} - \frac{0}{e^0} - \frac{2}{e^0} \right) \\
&= (0 - 0 - 0) + 0 + \frac{2}{1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(3) = 2.$$

A partir da definição 2.1, obtem-se as seguintes propriedades:

Propriedade 2.1: Para todo $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Demonstração:

Substituindo $\Gamma(z)$ por $\Gamma(z + 1)$ e obtemos,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z + 1) &= \int_0^\infty t^{(z+1)-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j t^z e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

Por integração por partes, obtem-se

$$\begin{aligned}
\Gamma(z + 1) &= \lim_{j \rightarrow \infty} [-e^{-t} t^z]_0^j + z \int_0^\infty -e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= -\lim_{j \rightarrow \infty} -e^{-j} j^z + \frac{0^z}{1} + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= 0 + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos a seguinte recorrência:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

□

Propriedade 2.2: Para todo $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\Gamma(z + 1) = z!.$$

Demonstração.

A demonstração da propriedade 2.2 segue diretamente da propriedade 2.1. De fato, pela propriedade 2.1, a função gama de $z + 1$ é igual $z!$, para todo z pertencentes aos reais. Em particular, o resultado ainda continua válido para $0 < x < z$, e como resultado

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Isso nos garante que a função gama de $z + 1$ será $z!$, demonstramos isso de forma que satisfaça a relação,

$$\Gamma(z) = (z - 1)!, \quad z \in \mathbb{N},$$

de fato, aplicando essa relação sucessivamente, temos :

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= z\Gamma(z) \\ &= z(z - 1)\Gamma(z - 1) \\ &= z(z - 1)(z - 2) \cdots 1. \end{aligned}$$

Com isso, para números inteiros positivos, a recursividade da propriedade cai na definição de fatorial. Isso significa que

$$\Gamma(z + 1) = z!.$$

□

Assim fica fácil ver que a função gama de 1 é exatamente 1, pois para $z = 1$, temos que $\Gamma(1) = 0! = 1$, válido para $z = 1$.

Isso mostra que a função gama é de fato uma representação do fatorial para números

inteiros não-negativos. Essa recorrência é fundamental quando analisamos números não naturais. Podemos utilizar $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{(z+1)-1} e^{-t} dt$ para constatar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Vamos demonstrar como calcular a função gama para racionais positivos.

1. Mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.\end{aligned}$$

Utilizando mudança de variável, obtemos,

$$t = r^2 \Rightarrow dt = 2rdr.$$

Substituindo na integral,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty (r^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-r^2} 2rdr \\ &= \int_0^\infty r^{-1} e^{-r^2} 2rdr \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} 2dr.\end{aligned}$$

Primeiro substituiremos r por x ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \tag{2.3}$$

Para simplificar nossa conta, vamos considerar uma nova função $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Em seguida multiplicamos pela mesma integral, mas com variável y , vamos resolver a integral

$$I(x) \cdot I(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Chamamos de I cada integral e reescrevemos como integral dupla,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Reescrevemos em coordenadas polares podemos observar que r vai de 0 a infinito e o ângulo θ vai de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Resolvendo por substituição,

$$u = -r^2 \Rightarrow -\frac{du}{2} = r dr$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -\frac{e^{-r^2}}{2} \right|_0^{\infty} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = 2 \left| \frac{1}{2} \theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Podemos observar que gama de $\frac{1}{2}$ será o valor de I vezes 2:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = \sqrt{\pi}.$$

2. Vamos calcular $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, utilizando a recorrência $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

3. Vamos calcular $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

4. Vamos calcular $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

5. Vamos calcular $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2} + 1\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{15\sqrt{\pi}}{8} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}.$$

As propriedades apresentadas a seguir decorrem da relação funcional da função gama e são amplamente discutidas na literatura sobre funções especiais e cálculo fracionário (Almeida, 2023; Lustosa, 2022).

Propriedade 2.3: Considerando que z é um número natural, então

$$\Gamma\left(\frac{z+2}{2}\right) = \frac{z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right).$$

Por consequência da propriedade 2.1 ($\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$), fazendo a seguinte substituição

$$z = \frac{v}{2}.$$

Então,

$$v+1 = \frac{v}{2} + 1 = \frac{v+2}{2}.$$

Aplicando na propriedade 2.1

$$\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{v}{2} + 1\right) = \frac{v}{2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right).$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{z+2}{2}\right) = \frac{z}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right).$$

□

Propriedade 2.4: Considerando que n é um número natural, então

$$\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Usando a propriedade 2.3:

$$\Gamma\left(\frac{z+2}{2}\right) = \frac{z}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right).$$

Tomando $z = 2n - 1$, onde n é um número natural

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

Aplicando a Propriedade 2.3 recursivamente e finalizando com o duplo fatorial, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{2n-5}{2} \Gamma\left(\frac{2n-5}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{2n-5}{2} \dots \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.5: Considerando que n é um número natural, então

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Utilizando a propriedade 2.2 ($\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$), e reescrevendo da seguinte forma,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Tomando $z = \frac{1}{2} - n$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - n\right)}{\frac{1}{2} - n}.$$

Aplicando novamente a propriedade 2.2

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} - n\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} - n\right)}{\frac{3}{2} - n},$$

e proseguindo sucessivamente até alcançar $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, resulta

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{3}{2} - n\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}\right)}.$$

Como existe n fatores no denominador, podemos reescrevê-los como

$$\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{3}{2} - n\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^n \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}}.$$

Observa-se que,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 1}{2^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}.$$

Substituindo na expressão anterior,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n}} \\ &= \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ também podemos escrever

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}.$$

Isso conclui a demonstração.

□

Utilizando $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, é possível encontrar valores da função gama para frações negativas com denominador 2. Observe os exemplos:

1. Vamos calcular $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

2. Vamos calcular $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2} + 1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{(-2\sqrt{\pi})}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.$$

3. Vamos calcular $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2} + 1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{3}}{-\frac{5}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}.$$

4. Vamos calcular $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2} + 1\right)}{-\frac{7}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{7}{2}} = \frac{-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}}{-\frac{7}{2}} = \left(-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{16\sqrt{\pi}}{105}.$$

5. Vamos calcular $\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{9}{2} + 1\right)}{-\frac{9}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)}{-\frac{9}{2}} = \frac{\frac{16\sqrt{\pi}}{105}}{-\frac{9}{2}} = \left(\frac{16\sqrt{\pi}}{105}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{32\sqrt{\pi}}{975}.$$

A partir dos exemplos, percebesse que a função gama facilita o manejo da fatorial, fornecendo melhor suporte durante análise de cálculos e outras aprimorações.

3. INTEGRAL FRACIONÁRIA

Um contexto interessante que envolve função gama, é o **cálculo fracionário**, ou seja, cálculo de ordem não inteira, no qual primeiramente é estudada a **integral fracionária** e posteriormente a **derivada fracionária**.

Ao analisarmos a função $\sqrt{x}$, que pode ser escrita como $x^{\frac{1}{2}}$, percebe-se que está meio caminho de ser uma constante e uma função linear. Ou seja, potências fracionárias de x servem para interpolar entre os polinômios básicos. Desta forma, sabemos que derivadas de polinômios geram outros polinômios de grau menor, e com isso poderia construir um tipo de derivada fracionária que interpola as derivadas ordinárias com polinômios?

Tabela 1. Demonstração de derivadas.

$\frac{d^0}{dx^0} x^3 = x^3$	$\frac{d^1}{dx^1} x^3 = 3x^2$	$\frac{d^2}{dx^2} x^3 = 6x$	$\frac{d^3}{dx^3} x^3 = 6$
------------------------------	-------------------------------	-----------------------------	----------------------------

Analisando a Tabela 1, observamos que cada derivada reduz a potência em um grau (1°), entretanto existem funções que se encontram entre polinômios básicos, como $\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) x^3$, as potências fracionárias de x . Será que a derivada de ordem meia de x^3 terá como fator $x^{2,5}$?

$$\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) x^3 \stackrel{?}{\rightarrow} x^{2,5}.$$

Não é bem assim, pois é necessário entender as propriedades necessárias de uma semiderivada. A derivada de ordem 2 é a derivada sucessiva de 1ª ordem duas vezes. Por exemplo,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) x^3 = \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{d}{dx}\right) x^3 = 6x.$$

Usando a mesma lógica, devemos encontrar a derivada de ordem meia $\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) x^3$ tal que,

$$\frac{d}{dx} x^3 = \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \right) x^3 = 3x^2.$$

Entretanto não é simples assim, vamos então analisar integrais fracionárias para resolver o problema das derivadas fracionárias.

3.1 Ordem de uma Integral

De acordo com Leithold (1994), o Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma relação direta entre os processos de derivação e integração. Em sua formulação geral, se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (3.1)$$

$a \leq x \leq b$, é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e possui derivada igual à função integrada, isto é

$$F'(x) = f(x).$$

Além disso, o teorema garante que, sendo f contínua em $[a, b]$, a integral definida de f nesse intervalo pode ser calculada por meio de uma primitiva F de f , de modo que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Definindo o operador J como representação da integral de uma função integrável. Define-se a integral de f como

$$Jf(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

se f é integrável no intervalo $[a, b]$, $a \leq x \leq b$.

Visto a integral iterada, conduz à busca de uma formulação que possibilite determinar diretamente uma integral de ordem superior. Nesse contexto, a **Identidade de Cauchy**

desempenha papel fundamental ao fornecer uma representação equivalente para integrais repetidas. Por meio dessa identidade, a integral de ordem $n \in \mathbb{N}$, pode ser expressa em termos de uma única integral envolvendo a função original, eliminando a necessidade de calcular sucessivamente as integrais de ordens inferiores.

Teorema 3.1 (Identidade de Cauchy). Se f é uma função integrável no intervalo real $[a, b]$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, então

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Demonstração: Adaptado de Almeida, (2023). De acordo com o Princípio de Indução Matemática,

i. Caso base com $n = 1$,

O resultado decorre diretamente da definição (3.1), pois

$$Jf(x) = \frac{1}{(1-1)!} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t) dt = J^1 f(x).$$

ii. Hipótese de Indução

Considere um número natural $k > 1$, tal que

$$J^k f(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t) dt.$$

A partir da relação de recorrência, constata-se que a aproximação da integral iterada $J^k f(x)$, possui ordem de convergência $k + 1$, tal que

$$\begin{aligned} J^{k+1} f(x) &= J(J^k f(x)) = \int_a^x J^k f(x) du = \int_a^x \left(\frac{1}{(k-1)!} \int_a^u (u-\xi)^{k-1} f(\xi) d\xi \right) du \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \int_a^u (u-\xi)^{k-1} f(\xi) d\xi du \end{aligned}$$

Visto que os limites de integração variam no intervalo $[a, x]$, podemos permutar a ordem de integração por meio de um reajuste que mantenha inalterável a região de integração considerada. Assim,

$$\begin{aligned}
J^{k+1}f(x) &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \int_\xi^x (u-\xi)^{k-1} f(\xi) du d\xi \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \left[\frac{1}{k} (u-\xi)^k \right]_\xi^x f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{k} \int_a^x (x-\xi)^k f(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Conforme previsto, o resultado valida a hipótese de indução para o caso $k + 1$.

□

3.2 Integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville

Uma integral de ordem não inteira é definida como integral fracionária, embora o termo “ordem arbitrária” seja mais adequado, pois calcular este tipo de função significa que a função será integrada um número finito, n -vezes, em que n pode ser um número real ou complexo, o qual depende da notação de integral de ordem n .

Conclui-se a análise ressaltando que é possível, ao menos em parte, a substituir o fatorial $(n-1)!$ por sua respectiva generalização, a função gama $\Gamma(n)$. A partir da Identidade de Cauchy, torna-se possível introduzir a definição da integral de Riemann-Liouville (Morphocular, 2022) é um dos métodos aqui apresentados. A definição a seguir está apoiada neste fato.

Definição 3.1 (Integral Fracionária de Riemann-Liouville). Seja $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $n \in \mathbb{R}_+$. A integral de Riemann-Liouville de ordem n , é definida por

$$\int_0^t f(x) dx^n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-x)^{n-1} f(x) dx, \quad (3.2)$$

onde $\Gamma(n)$ representa a função gama. Para valores inteiros positivos de n , tem-se

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Neste trabalho, a notação dx^n será utilizada como uma representação simbólica da integração de ordem n . Embora a definição seja válida para funções integráveis em geral, no

presente trabalho serão consideradas principalmente funções potência de forma geral $f(x) = x^m$, com $m \in \mathbb{R}$, uma vez que tais funções serão utilizadas no desenvolvimento de resultados posteriores.

A partir da fórmula (3.2), é possível obter integral de ordem fracionária. Em particular, tomando $n = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$\int_0^t f(x) dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} f(x) dx = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)!} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

Utilizando a relação $\Gamma(z) = (z-1)!$, para $z = \frac{1}{2}$ temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)!.$$

Como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, conclui-se que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}.$$

Dessa forma, a definição da integral fracionária para $n = \frac{1}{2}$ assume a forma

$$\int_0^t f(x) dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

Essa expressão representa a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\frac{1}{2}$, também denominada de semi-integral. De modo geral, a definição (3.2) permite estender o conceito clássico de integração para ordens arbitrárias positivas.

A integração é uma das operações fundamentais do cálculo. Por exemplo,

$$\int 1 dx = x + C.$$

Entretanto, quando a ordem da integração não é inteira, torna-se necessário recorrer aos operadores do cálculo fracionário. Nesse contexto, a integral de Riemann-Liouville fornece uma generalização natural da integral clássica, o qual permite calcular a integral de

$\frac{1}{2} \int 1 \, dx$ de ordem n de uma função integrável.

Além disso, quando n é um número inteiro positivo vale a relação

$$\Gamma(n) = (n - 1)!,$$

de modo que a definição (3.2) pode ser escrita na forma

$$\int_0^t f(x) dx^n = \frac{1}{(n - 1)!} \int_0^t (t - x)^{n-1} f(x) dx. \quad (3.3)$$

Portanto, a expressão (3.3) constitui um caso particular da definição (3.2) para valores inteiros positivos de n . Se for usar essa fórmula diretamente, as contas seriam muito longas, para diminuir, vamos resolver algumas integrais especiais separadamente.

Proposição 3.1: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Calcular a seguinte integral

$$g(x) = \int (t - x)^{n-1} f(x) dx$$

para $n = \frac{1}{2}$ e $f(x) \in \{x, x^2, x^3\}$.

Demonstração: Vamos verificar cada caso.

Caso 1: $f(x) = x$.

$$g_1(x) = \int (t - x)^{\frac{1}{2}-1} x.$$

Será utilizado o método de integração por partes para resolver essa integral, por comodidade, usaremos a integral indefinida nas substituições. Inicialmente, temos que resolver a seguinte integral:

$$v = \int (t - x)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (3.4)$$

Fazendo a seguinte substituição, obtemos

$$w = t - x \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -1 \Rightarrow -dw = dx.$$

Aplicando em (3.4)

$$v = \int w^{-\frac{1}{2}}(-dw) = - \int w^{-\frac{1}{2}} dw = - \frac{w^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = - \frac{w^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2(t-x)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Utilizando o método de integração por partes na integral $\int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \, dx$, temos

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = (t-x)^{-\frac{1}{2}} dx \Rightarrow v = -2(t-x)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Aplicando em (3.5),

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \, dx \\ &= x \cdot (-2) \cdot (t-x)^{\frac{1}{2}} - \int -2(t-x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= -2x(t-x)^{\frac{1}{2}} + 2 \int (t-x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= -2x(t-x)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} (t-x)^{\frac{3}{2}} \\ &= -2x(t-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} (t-x)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Caso 2: $f(x) = x^2$.

$$g_2(x) = \int (t-x)^{-\frac{1}{2}} x^2 \, dx.$$

Utilizando o método de integração por partes,

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = (t-x)^{-\frac{1}{2}} dx \Rightarrow v = -2\sqrt{t-x}. \end{cases}$$

Vamos calcular a função $g_2(x)$ pela integração por partes

$$g_2(x) = \int (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2 \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= x^2(-2\sqrt{t-x}) - \int -2(t-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \, dx \\
&= -2x^2\sqrt{t-x} + 4 \int (t-x)^{\frac{1}{2}} \cdot x \, dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes a expressão $\int x\sqrt{t-x} \, dx$, obtemos

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = (t-x)^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(t-x)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

O cálculo da segunda igualdade é da seguinte forma:

$$\int dv = \int (t-x)^{\frac{1}{2}} dx = \int w^{\frac{1}{2}}(-dw) = -\int w^{\frac{1}{2}} dw = -\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(t-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int x(t-x)^{\frac{1}{2}} dx &= x\left(-\frac{2}{3}\sqrt{(t-x)^3}\right) - \int -\frac{2}{3}\sqrt{(t-x)^3} dx \\
&= -\frac{2}{3}x\sqrt{(t-x)^3} + \frac{2}{3} \int w^{\frac{3}{2}}(-dw) \\
&= -\frac{2}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{2}{3}\left(\frac{w^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right) \\
&= -\frac{2}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}w^{\frac{5}{2}} \\
&= -\frac{2}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(t-x)^5}.
\end{aligned}$$

Aplicando o resultado de g_2 , concluímos que

$$\begin{aligned}
g_2(x) &= -2x^2\sqrt{t-x} + 4\left(-\frac{2}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(t-x)^5}\right) \\
&= -2x^2\sqrt{t-x} - \frac{8}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{16}{15}\sqrt{(t-x)^5}.
\end{aligned}$$

Caso 3: $f(x) = x^3$.

$$g_3(x) = \int (t-x)^{-\frac{1}{2}} x^3 dx.$$

Utilizando o método de integração por partes,

$$\begin{cases} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \\ dv = (t-x)^{-\frac{1}{2}} dx \Rightarrow v = -2\sqrt{t-x}. \end{cases}$$

Calculando a função $g_3(x)$ pela integração por partes

$$\begin{aligned} g_3(x) &= \int (t-x)^{-\frac{1}{2}} x^3 dx \\ &= x^3(-2\sqrt{t-x}) - \int -2(t-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 dx \\ &= -2x^3\sqrt{t-x} + 6 \int x^2(t-x)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Integrando por partes a expressão $\int x^2\sqrt{t-x} dx$, obtemos

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ (*) dv = (t-x)^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(t-x)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

O calculo de (*) é da seguinte forma

$$\int dv = \int (t-x)^{\frac{1}{2}} dx = \int w^{\frac{1}{2}}(-dw) = -\int w^{\frac{1}{2}} dw = -\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(t-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \int x^2(t-x)^{\frac{1}{2}} dx &= x^2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{(t-x)^3}\right) - \int -\frac{2}{3}\sqrt{(t-x)^3} \cdot 2x dx \\ &= -\frac{2}{3}x^2\sqrt{(t-x)^3} + \frac{4}{3} \int x\sqrt{(t-x)^3} dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Integrando por partes a expressão $\int x\sqrt{(t-x)^3} dx$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ (**) dv = (t-x)^{\frac{3}{2}} dx \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(t-x)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

O calculo de (**) é da seguinte forma

$$\int dv = \int (t-x)^{\frac{3}{2}} dx = \int w^{\frac{3}{2}}(-dw) = -\int w^{\frac{3}{2}} dw = -\frac{w^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = -\frac{w^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}(t-x)^{\frac{5}{2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{(t-x)^3} dx &= x\left(-\frac{2}{5}(t-x)^{\frac{5}{2}}\right) - \int -\frac{2}{5}(t-x)^{\frac{5}{2}} dx \\ &= -\frac{2}{5}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} \int (t-x)^{\frac{5}{2}} dx \\ &= -\frac{2}{5}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} \left(\frac{(t-x)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} \right) \\ &= -\frac{2}{5}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{35}(t-x)^{\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.7), temos

$$\begin{aligned} \int x^2(t-x)^{\frac{1}{2}} dx &= -\frac{2}{3}x^2\sqrt{(t-x)^3} + \frac{4}{3} \left(-\frac{2}{5}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{35}(t-x)^{\frac{7}{2}} \right) \\ &= -\frac{2}{3}x^2\sqrt{(t-x)^3} - \frac{8}{15}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{105}(t-x)^{\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando esse resultado em (3.6)

$$\begin{aligned} g_3(x) &= -2x^3\sqrt{t-x} + 6 \left(-\frac{2}{3}x^2\sqrt{(t-x)^3} - \frac{8}{15}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{105}(t-x)^{\frac{7}{2}} \right) \\ &= -2x^3\sqrt{t-x} - 4x^2\sqrt{(t-x)^3} - \frac{16}{5}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{32}{35}(t-x)^{\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2: Calcular a seguinte integral

$$h(v) = \int \sin^n(v) dv$$

para $n = 2, 4, 6$ e 8 .

Demonstração: Pela tabela de integral em Leithold (1994, p. 714), temos

$$\int \sin^n(v) dv = -\frac{1}{n} \sin^{n-1}(v) \cos(v) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(v) dv.$$

Caso 1: Para $n = 2$.

$$\begin{aligned} h_1(v) &= \int \sin^2(v) dv \\ &= -\frac{1}{2} \sin^{2-1}(v) \cos(v) + \frac{2-1}{2} \int \sin^{2-2}(v) dv \\ &= -\frac{1}{2} \sin(v) \cos(v) + \frac{1}{2} \int 1 dv \\ &= -\frac{1}{2} \sin(v) \cos(v) + \frac{1}{2} v. \end{aligned}$$

Caso 2: Para $n = 4$.

$$\begin{aligned} h_2(v) &= \int \sin^4(v) dv \\ &= -\frac{1}{4} \sin^{4-1}(v) \cos(v) + \frac{4-1}{4} \int \sin^2(v) dv \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{3}{4} \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin(v) \cos(v)}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{3v}{8} - \frac{3 \sin(v) \cos(v)}{16}. \end{aligned}$$

Caso 3: Para $n = 6$.

$$h_3(v) = \int \sin^6(v) dv$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{6} \sin^{6-1}(v) \cos(v) + \frac{6-1}{6} \int \sin^4(v) dv \\
&= -\frac{1}{6} \sin^5(v) \cos(v) + \frac{5}{6} \left(-\frac{1}{4} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{3v}{8} - \frac{3 \sin(v) \cos(v)}{16} \right) \\
&= -\frac{1}{6} \sin^5(v) \cos(v) - \frac{5}{24} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{5v}{16} - \frac{5 \sin(v) \cos(v)}{32}.
\end{aligned}$$

Caso 4: Para $n = 8$.

$$\begin{aligned}
h_4(v) &= \int \sin^8(v) dv \\
&= -\frac{1}{8} \sin^{8-1}(v) \cos(v) + \frac{8-1}{8} \int \sin^6(v) dv \\
&= -\frac{1}{8} \sin^7(v) \cos(v) + \frac{7}{8} \left(\frac{5v}{16} - \left(\frac{1}{6} \sin^5(v) + \frac{5}{24} \sin^3(v) + \frac{5 \sin(v)}{32} \right) \cos(v) \right) \\
&= \frac{35v}{128} - \left(\frac{1}{8} \sin^7(v) + \frac{7}{48} \sin^5(v) + \frac{35}{192} \sin^3(v) + \frac{35 \sin(v)}{256} \right) \cos(v). \quad \square
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que a integral dupla de ordem fracionário é igual a integral usual, ou seja,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx = \int 1 dx = x.$$

Primeiramente, vamos calcular a integral $\int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx$ usando o método (3.2).

1. Vamos calcular $f_1(t) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_0(x) dx$, onde $f_0(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^t 1 dx^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1 dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Utilizando o método de integração por substituição,

$$u = t - x \Rightarrow -du = dx.$$

Temos

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u^{-\frac{1}{2}} (-du) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right)_0^t = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sqrt{t-x})_0^t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sqrt{t-t} - 2\sqrt{t-0}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (-2\sqrt{t}) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_1(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Usando o método de integral fracionária, temos que a integral fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ de 1 será $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$.

2. Vamos calcular $f_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_1(x) dx$, para $f_1(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sqrt{x}}{(t-x)^{\frac{1}{2}}} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^t \sqrt{\frac{x}{t-x}} dx. \quad (3.8)$$

Isolando x da expressão $\sqrt{\frac{x}{t-x}}$

$$u = \sqrt{\frac{x}{t-x}} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow u^2 = \left(\sqrt{\frac{x}{t-x}} \right)^2 \Rightarrow u^2 = \frac{x}{t-x}.$$

Aplicando racionalidade linear fracionária,

$$u^2(t-x) = x \Rightarrow tu^2 = x + xu^2 \Rightarrow \frac{tu^2}{1+u^2} = x.$$

Portanto,

$$x = \frac{tu^2}{1+u^2}. \quad (3.10)$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{2tu \cdot (1+u^2) - 2u \cdot tu^2}{(1+u^2)^2} \\ &= \frac{2tu + 2tu^3 - 2tu^3}{(1+u^2)^2} \\ \Rightarrow dx &= \frac{2tu}{(1+u^2)^2} du. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.9) e (3.11) em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t u \left(\frac{2tu}{(1+u^2)^2} du \right) \\ &= \frac{4t}{\pi} \int_0^t u \left(\frac{u}{(1+u^2)^2} du \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para resolver essa questão, vamos fazer a seguinte manipulação

$$v = \int \frac{u}{(1+u^2)^2} du. \quad (3.13)$$

Usando a seguinte substituição $s = 1 + u^2$ e derivando $\frac{ds}{du} = 2u$, obtemos

$$\frac{ds}{2} = u du.$$

Aplicando (3.13), temos

$$v = \int \frac{\frac{ds}{2}}{s^2} = \frac{1}{2} \int s^{-2} ds = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s^{-2+1}}{-2+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2s}.$$

Invertendo a substituição, obtemos

$$v = -\frac{1}{2(1+u^2)}.$$

Usaremos a integração por partes

$$\begin{cases} w = u \Rightarrow dw = du \\ dv = \frac{u}{(1+u^2)^2} du \Rightarrow v = -\frac{1}{2(1+u^2)} \end{cases}$$

e substituindo na equação (3.12),

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{4t}{\pi} \int_0^t u \left(\frac{u}{(1+u^2)^2} du \right) \\ &= \frac{4t}{\pi} \left[w \left(\frac{-1}{2(1+u^2)} \right) - \int \left(\frac{-1}{2(1+u^2)} \right) du \right] \\ &= \frac{4t}{\pi} \left[\left(\frac{-w}{2(1+u^2)} \right) + \int \left(\frac{1}{2(u^2+1)} \right) du \right] \\ &= \frac{4t}{\pi} \left[\left(\frac{-u}{2(1+u^2)} \right) + \frac{1}{2} \arctg(u) du \right]_0^t \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\left(\frac{tu}{(1+u^2)} \right) + t \cdot \arctg(u) du \right]_0^t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Fazendo uma manipulação na expressão $\frac{tu}{(1+u^2)}$ e aplicando em (3.10) e (3.9)

$$\frac{tu}{u^2+1} \cdot \frac{u}{u} = \frac{tu^2}{u^2+1} \cdot \frac{1}{u} = x \cdot \sqrt{\frac{t-x}{x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sqrt{t-x} = \sqrt{xt-x^2}.$$

Substituindo em (3.14), temos

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{2}{\pi} \left[-\sqrt{xt-x^2} + t \cdot \arctg \sqrt{\frac{x}{t-x}} \right]_0^t \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\left(\sqrt{xt-x^2}\right)_0^t + t \cdot \arctg \left(\sqrt{\frac{x}{t-x}} \right)_0^t \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vamos calcular separadamente a expressão $\arctg \left(\sqrt{\frac{x}{t-x}} \right)_0^t$ usando limites, pois quando aplicarmos t diretamente na fração dentro da expressão, temos $\frac{t}{0}$, o que não é permitido. Portanto, temos

$$\lim_{k \rightarrow t} \frac{x}{t-x} = \lim_{k \rightarrow t} \frac{\frac{x}{\bar{x}}}{\frac{t}{\bar{x}} - \frac{x}{\bar{x}}} = \lim_{k \rightarrow t} \frac{1}{\frac{t}{\bar{x}} - 1} = +\infty.$$

Partindo disso, calculemos a expressão $\arctg \left(\sqrt{\frac{x}{t-x}} \right)_0^t$:

$$\begin{aligned} \arctg \left(\sqrt{\frac{x}{t-x}} \right)_0^t &= \lim_{x \rightarrow t} \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{x}{t-x}} \right) - \arctg \left(\sqrt{\frac{0}{t-0}} \right) \right] \\ &= \arctg \left(\lim_{x \rightarrow t} \sqrt{\frac{x}{t-x}} \right) - \arctg(0) \\ &= \arctg(+\infty) - 0 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Usando esse resultado em (3.11), obtemos

$$f_2(t) = \frac{2}{\pi} \left[\left(-\sqrt{t \cdot t - t^2} \right) - \left(-\sqrt{0t - 0^2} \right) + t \frac{\pi}{2} \right] = t.$$

Substituindo t por x , concluimos que

$$f_2(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} dx = x.$$

Diante disso, integrando este resultado utilizando o mesmo método e ordem, obtemos como resultado x . Ou seja, a integral usual de 1 é a integral fracionária dupla de ordem $\frac{1}{2}$.

Sabemos que a integral usual de x é $\frac{x^2}{2}$. Utilizando o método de integral fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ de x , mostraremos os seguintes resultados

$$x \xrightarrow{\frac{1}{2} \int x dx} \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \xrightarrow{\frac{1}{2} \int \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} dx} \frac{x^2}{2}.$$

Em outras palavras, devemos mostrar que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\int_{\frac{1}{2}}} x dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

3. Vamos calcular $f_3(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_2(x) dx$, para $f_2(x) = x$.

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^t x dx \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot x dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Aplicando a função $g_1(x)$ da proposição 3.1 em (3.16),

$$\begin{aligned}
f_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-2x(t-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-x)^{\frac{3}{2}} \right)_0^t \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left(-2t(t-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-t)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(-2 \cdot 0(t-0)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-0)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Substituindo t por x , concluímos que

$$f_3(x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$$

4. Vamos calcular $f_4(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_3(x) \, dx$, para $f_3(x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned}
f_4(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_0^t \frac{(\sqrt{x})^3}{\sqrt{t-x}} \, dx. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Vamos simplificar a seguinte expressão $\int \frac{(\sqrt{x})^3}{\sqrt{t-x}} \, dx$. Substituindo,

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2.$$

Derivando,

$$dx = 2u du.$$

Portanto,

$$\int \frac{(\sqrt{x})^3}{\sqrt{t-x}} dx = \int \frac{u^3}{\sqrt{t-u^2}} 2u du = 2 \int \frac{u^4}{\sqrt{t-u^2}} du. \quad (3.18)$$

Utilizando o método de integração trigonométrica e derivando, obtemos:

$$u = \sqrt{t} \cdot \sin(v) \Rightarrow du = \sqrt{t} \cdot \cos(v) dv.$$

Aplicando esse resultado em (3.17), deduzimos que

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{u^4}{\sqrt{t-u^2}} du &= 2 \int \frac{(\sqrt{t} \cdot \sin(v))^4}{\sqrt{t - (\sqrt{t} \cdot \sin(v))^2}} \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(v) dv \\ &= 2 \int \frac{t^2 \sqrt{t} \cdot \sin^4(v) \cdot \cos(v)}{\sqrt{t} \cdot (1 - \sin^2(v))} dv \\ &= 2 \int \frac{t^2 \sqrt{t} \cdot \sin^4(v) \cdot \cos(v)}{\sqrt{t} \cdot \cos^2(v)} dv \\ &= 2 \int \frac{t^2 \sqrt{t} \cdot \sin^4(v) \cdot \cos(v)}{\sqrt{t} \cdot \cos(v)} dv \\ &= 2t^2 \int \sin^4(v) dv. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aplicando a função h_2 da proposição 3.2, temos

$$2 \int \frac{u^4}{\sqrt{t-u^2}} du = 2t^2 \left(-\frac{1}{4} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{3v}{8} - \frac{3 \sin(2v)}{16} \right).$$

Usando o teorema fundamental da trigonometria, obtemos o $\cos(v)$

$$\sin(v) = \frac{u}{\sqrt{t}} \Rightarrow \cos(v) = \frac{\sqrt{t-u^2}}{\sqrt{t}},$$

aplicando arco-seno em $\sin(v) = \frac{u}{\sqrt{t}}$, temos

$$v = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

Usando esses resultados em (3.19)

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{u^4}{\sqrt{t-u^2}} du &= 2t^2 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right)^3 \frac{\sqrt{t-u^2}}{\sqrt{t}} + \frac{3}{8} \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) - \frac{3}{16} \cdot \frac{2u\sqrt{t-u^2}}{t} \right) \\ &= \left(\frac{-u^3\sqrt{t-u^2}}{4t^2} + \frac{3}{8} \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) - \frac{3u\sqrt{t-u^2}}{8t} \right). \end{aligned}$$

Usando esses calculos na equação (3.16) e substituindo $u = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \frac{4}{3\pi} \cdot 2t^2 \left(\frac{-u^3\sqrt{t-u^2}}{4t^2} + \frac{3}{8} \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) - \frac{3u\sqrt{t-u^2}}{8t} \right)_0^t \\ &= \frac{8}{3\pi} \left(\underbrace{\frac{-x^{\frac{3}{2}}\sqrt{t-x}}{4}}_{(*)} + \underbrace{\frac{3}{8} t^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right)}_{(**)} - \underbrace{\frac{3t\sqrt{x}\sqrt{t-x}}{8}}_{(***)} \right)_0^t. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Cada uma das expressões dentro dos parenteses serão resolvidas sepadamente, como mostra baixo

$$(*) \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{t-x}}{4} \right)_0^t = \left(\frac{-\sqrt{t^3} \cdot \sqrt{t-t}}{4} \right) - \left(\frac{-\sqrt{0^3} \cdot \sqrt{t-0}}{4} \right) = -\frac{\sqrt{t^3} \cdot 0}{4} + 0 = 0;$$

$$\begin{aligned} (**) \Rightarrow \frac{1}{8} \left(3t^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right) \right)_0^t &= \frac{3}{8} t^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right) - \frac{3}{8} t^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \frac{3t^2 \text{sen}^{-1}(1)}{8} - \frac{3t^2 \text{sen}^{-1}(0)}{8} = \frac{3t^2}{8} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3t^2}{8} \cdot 0 = \frac{3t^2\pi}{16}; \end{aligned}$$

$$(***) \Rightarrow \left(\frac{-3\sqrt{x}\sqrt{t-x}}{8} \right)_0^t = \left(\frac{-3\sqrt{t}\sqrt{t-t}}{8} \right) - \left(\frac{3\sqrt{0}\sqrt{t-0}}{8} \right) = 0.$$

Substituindo (*), (**) e (***) em (3.20), temos

$$f_4(t) = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{3t^2\pi}{16} \right) = \frac{1}{2} t^2.$$

Substituindo t por x , concluímos que

$$f_4(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Como resultado $\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$, integrando este resultado utilizando o mesmo método e ordem, temos como resultado $\frac{x^2}{2}$.

A integral usual de x^2 é

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Usando o método de integral fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ de x^2 duas vezes, obtemos

$$x^2 \xrightarrow{\frac{1}{2} \int x^2 dx} \frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \xrightarrow{\frac{1}{2} \int \frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} dx} \frac{x^3}{3},$$

ou seja, devemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \int x^2 dx = \int x dx = \frac{x^3}{3}.$$

5. Vamos calcular $f_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_0(x) dx$, para $f_0(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^t x^2 dx \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot x^2 dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2 dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Aplicando a função $g_2(x)$ da proposição 3.1 em (3.21),

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left[-2x^2\sqrt{t-x} + 4 \left(-\frac{2}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(t-x)^5} \right) \right]_0^t \\ &= \left[-2x^2\sqrt{t-x} - \frac{8}{3}x\sqrt{(t-x)^3} - \frac{16}{15}\sqrt{(t-x)^5} \right]_0^t. \end{aligned}$$

Resolvendo cada expressão de dentro dos cochetes separadamente,

$$(-2x^2\sqrt{t-x})_0^t = (-2t^2\sqrt{t-t}) - (-2 \cdot 0^2\sqrt{t-0}) = 0;$$

$$\left(-\frac{8}{3}x\sqrt{(t-x)^3} \right)_0^t = -\left(\frac{8}{3}t\sqrt{(t-t)^3} \right) - \left(-\frac{8}{3}0\sqrt{(t-0)^3} \right) = 0;$$

$$\left(-\frac{16}{15}\sqrt{(t-x)^5} \right)_0^t = \left(-\frac{16}{15}\sqrt{(t-t)^5} \right) - \left(-\frac{16}{15}\sqrt{(t-0)^5} \right) = \frac{16}{15}\sqrt{t^5} = \frac{16}{15}t^{\frac{5}{2}}.$$

Aplicando em $f_1(x)$ temos

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{16}{15} t^{\frac{5}{2}}.$$

Portanto,

$$f_1(x) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}.$$

6. Vamos calcular $f_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_1(x) dx$, para $f_1(x) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}$.

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{15\pi} \int_0^t \frac{(\sqrt{x})^5}{\sqrt{t-x}} dx. \quad (3.22)$$

Vamos simplificar a seguinte expressão $\int \frac{(\sqrt{x})^5}{\sqrt{t-x}} dx$. Substituindo e derivando

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du.$$

Aplicando o resultado em (3.22)

$$\int \frac{(\sqrt{x})^5}{\sqrt{t-x}} dx = \int \frac{u^5}{\sqrt{t-u^2}} 2u du = 2 \int \frac{u^6}{\sqrt{t-u^2}} du. \quad (3.23)$$

Utilizando o método de integração trigonométrica e derivando, obtemos:

$$u = \sqrt{t} \cdot \sin(v) \Rightarrow du = \sqrt{t} \cdot \cos(v) dv.$$

Aplicando o resultado em (3.23)

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{u^6}{\sqrt{t-u^2}} du &= 2 \int \frac{(\sqrt{t} \sin(v))^6}{\sqrt{t - (\sqrt{t} \sin(v))^2}} \sqrt{t} \cos(v) dv \\ &= 2 \int \frac{t^3 \sin^6(v) \sqrt{t} \cos(v)}{\sqrt{t(1 - \sin^2(v))}} dv \\ &= 2 \int \frac{t^3 \sin^6(v) \sqrt{t} \cos(v)}{\sqrt{t} \cos^2(v)} dv \\ &= 2 \int \frac{t^3 \sin^6(v) \sqrt{t} \cos(v)}{\sqrt{t} \cos(v)} dv \\ &= 2t^3 \int \sin^6(v) dv. \end{aligned}$$

Aplicando a função h_3 da proposição 3.2, temos

$$2 \int \frac{u^6}{\sqrt{t-u^2}} du = 2t^3 \left(-\frac{1}{6} \sin^5(v) \cos(v) - \frac{5}{24} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{5v}{16} - \frac{5 \sin(v) \cos(v)}{32} \right)$$

$$= t^3 \left(-\frac{1}{3} \sin^5(v) \cos(v) - \frac{5}{12} \sin^3(v) \cos(v) + \frac{5v}{8} - \frac{5 \sin(v) \cos(v)}{16} \right). \quad (3.24)$$

Como $\sin(v) = \frac{u}{\sqrt{t}}$ e pelo teorema fundamental da trigonometria, obtemos o $\cos(v)$

$$\cos(v) = \frac{\sqrt{t-u^2}}{\sqrt{t}}.$$

Aplicando arco-seno $\sin(v) = \frac{u}{\sqrt{t}}$, temos

$$v = \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right).$$

Usando esses resultados em (3.24), temos

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{u^6}{\sqrt{t-u^2}} du &= t^3 \left[-\left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right)^5 \frac{\sqrt{t-u^2}}{3\sqrt{t}} - \frac{5u^3\sqrt{t-u^2}}{12t^2} + \frac{5}{8} \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) - \frac{5u\sqrt{t-u^2}}{16t} \right] \\ &= t^3 \left[\frac{-u^5\sqrt{t-u^2}}{3t^3} - \frac{5u^3\sqrt{t-u^2}}{12t^2} + \frac{5}{8} \text{sen}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{t}} \right) - \frac{5u\sqrt{t-u^2}}{16t} \right] \\ &= \left[\frac{-\sqrt{x^5}\sqrt{t-x}}{3} - \frac{5t\sqrt{x^3}\sqrt{t-x}}{12} + \frac{5}{8} t^3 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right) - \frac{5t^2\sqrt{x}\sqrt{t-x}}{16} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando esse resultado na equação (3.22)

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{16}{15\pi} \int_0^t \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{t-x}} dx \\ &= \frac{16}{15\pi} \left[\underbrace{-\frac{\sqrt{x^5}\sqrt{t-x}}{3}}_{(1)} - \underbrace{\frac{5t\sqrt{x^3}\sqrt{t-x}}{12}}_{(2)} + \underbrace{\frac{5}{8} t^3 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right)}_{(3)} - \underbrace{\frac{5t^2\sqrt{x}\sqrt{t-x}}{16}}_{(4)} \right]_0^t. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Cada uma das expressões dentro do colchete serão resolvidas separadamente,

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{x^5}\sqrt{t-x}}{3} \right)_0^t = \left(\frac{-\sqrt{t^5}\sqrt{t-t}}{3} \right) + \left(\frac{-\sqrt{0^5}\sqrt{t-0}}{3} \right) = 0;$$

$$(2) \Rightarrow \left(-\frac{5t\sqrt{x^3}\sqrt{t-x}}{12} \right)_0^t = \left(-\frac{5t\sqrt{t^3}\sqrt{t-t}}{12} \right) - \left(-\frac{5t\sqrt{0^3}\sqrt{t-0}}{12} \right) = 0;$$

$$(3) \Rightarrow \left(\frac{5}{8} t^3 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right) \right)_0^t = \left(\frac{5}{8} t^3 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right) \right) - \left(\frac{5}{8} t^3 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{t}} \right) \right) \\ = \frac{5t^3}{8} \operatorname{sen}^{-1}(1) - \frac{5t^3}{8} \operatorname{sen}^{-1}(0) = \frac{5t^3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5t^3\pi}{16};$$

$$(4) \Rightarrow \left(\frac{5t^2\sqrt{x}\sqrt{t-x}}{16} \right)_0^t = \left(\frac{5t^2\sqrt{t}\sqrt{t-t}}{16} \right) - \left(\frac{5t^2\sqrt{0}\sqrt{t-0}}{16} \right) = 0.$$

Substituindo (1), (2), (3) e (4) em (3.25), temos

$$f_2(t) = \frac{16}{15\pi} \cdot \left(\frac{5t^3\pi}{16} \right) = \frac{t^3}{3}.$$

Substituindo t por x , concluímos que

$$f_2(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Com isso, compreendemos que a integral usual de x^2 é a integral dupla de ordem $\frac{1}{2}$,

$$\int x^2 dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \\ = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}} dx \\ = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \cdot \frac{15\pi x^3}{48} = \frac{x^3}{3},$$

ou seja,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} \int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Da mesma forma a integral usual x^3 será a integral dupla de ordem $\frac{1}{2}$, usando o método de integral fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ teremos o seguinte resultado:

$$x^3 \xrightarrow{\int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} x^3 dx} \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{35\sqrt{\pi}} \xrightarrow{\int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{35\sqrt{\pi}} dx} \frac{x^4}{4},$$

$$\int x^3 dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} \int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} x^2 dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{35\sqrt{\pi}} dx$$

$$= \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{35\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^4}{4}.$$

Assim como as anteriores, vamos calcular as duas integrais fracionárias.

7. Vamos calcular $f_3(t) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_2(x) dx$, para $f_2(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$f_3(t) = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^3 dx. \quad (3.26)$$

Aplicando a função $g_2(x)$ da proposição 3.1 em (3.26),

$$f_3(x) = \left[-2x^3\sqrt{t-x} - 4x^2\sqrt{(t-x)^3} - \frac{16}{5}x(t-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{32}{35}(t-x)^{\frac{7}{2}} \right]_0^t.$$

Resolvendo separadamente cada expressão do colchete,

$$(-2x^3\sqrt{t-x})_0^t = (-2t^3\sqrt{t-t}) - (-2 \cdot 0^3\sqrt{t-0}) = 0;$$

$$(-4x^2\sqrt{(t-x)^3})_0^t = (-4t^2\sqrt{(t-t)^3}) - (-4 \cdot 0^2\sqrt{(t-0)^3}) = 0;$$

$$\left(-\frac{16}{5}x\sqrt{(t-x)^5}\right)_0^t = \left(-\frac{16}{5}t \cdot \sqrt{(t-t)^5}\right) - \left(-\frac{16}{5} \cdot 0 \cdot \sqrt{(t-0)^5}\right) = 0;$$

$$\left(-\frac{32}{35}\sqrt{(t-x)^7}\right)_0^t = \left(-\frac{32}{35}\sqrt{(t-t)^7}\right) - \left(-\frac{32}{35}\sqrt{(t-0)^7}\right) = \frac{32}{35}\sqrt{t^7}.$$

Portanto,

$$f_3(t) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{32}{35}\sqrt{t^7} = \frac{32\sqrt{t^7}}{105\sqrt{\pi}}.$$

Substituindo t por x , concluímos que

$$f_3(x) = \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{\pi}}.$$

8 Vamos calcular $f_4(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_3(x) dx$, para $f_3(x) = \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{\pi}}$.

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)!} \int_0^t (t-x)^{\frac{1}{2}-1} \frac{32x^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{32}{105\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}} dx \\ &= \frac{32}{105\pi} \int_0^t \frac{(\sqrt{x})^7}{\sqrt{t-x}} dx. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Vamos simplificar a expressão $\int \frac{(\sqrt{x})^7}{\sqrt{t-x}} dx$. Substituindo e derivando,

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u du.$$

Aplicando o resultado na integral de (3.27)

$$\int \frac{(\sqrt{x})^7}{\sqrt{t-x}} dx = \int \frac{u^7}{\sqrt{t-u^2}} 2u du = 2 \int \frac{u^8}{\sqrt{t-u^2}} du. \tag{3.28}$$

Utilizando o método de integração trigonométrica e derivando, obtemos:

$$u = \sqrt{t} \cdot \sin(v) \Rightarrow du = \sqrt{t} \cdot \cos(v) dv.$$

Aplicando o resultado em (3.28)

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x})^7}{\sqrt{t-x}} dx &= 2 \int \frac{((\sqrt{t} \sin(v))^8}{\sqrt{t - (\sqrt{t} \sin(v))^2}} \sqrt{t} \cos(v) dv \\ &= 2 \int \frac{t^4 \sqrt{t} \cos(v) \sin^8(v)}{\sqrt{t(1 - \sin^2(v))}} dv \\ &= 2 \int \frac{t^4 \sqrt{t} \cos(v) \sin^8(v)}{\sqrt{t} \cos^2(v)} dv \\ &= 2 \int \frac{t^4 \sqrt{t} \cos(v) \sin^8(v)}{\sqrt{t} \cos(v)} dv \\ &= 2t^4 \int \sin^8(v) dv. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para resolver essa integral, usaremos a função h_4 da proposição 3.2,

$$\int \sin^8(v) dv = \frac{35v}{128} - \left(\frac{1}{8} \sin^6(v) + \frac{7}{48} \sin^5(v) + \frac{35}{192} \sin^3(v) + \frac{35 \sin(v)}{256} \right) \cos(v).$$

Como $\sin(v) = \frac{u}{\sqrt{t}}$ e pelo teorema fundamental da trigonometria, obtemos o $\cos(v)$

$$\cos(v) = \frac{\sqrt{t-u^2}}{\sqrt{t}}.$$

Aplicando arco-seno em $\sin(v) = \frac{u}{\sqrt{t}}$, temos $v = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)$. Invertendo as substituições introgonométricas, obtemos

$$\begin{aligned} \int \sin^8(v) dv &= \frac{35}{128} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{1}{8} \left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^7 + \frac{7}{48} \left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^5 + \frac{35}{192} \left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^3 + \frac{35u}{256\sqrt{t}} \right) \frac{\sqrt{t-u^2}}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{35}{128} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{u^7}{8t^4} + \frac{7u^5}{48t^3} + \frac{35u^3}{192t^2} + \frac{5u}{256t} \right) \sqrt{t-u^2}. \end{aligned}$$

Aplicando na equação (3,29),

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x})^7}{\sqrt{t-x}} dx &= 2t^4 \left(\frac{35}{128} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{u^7}{8t^4} + \frac{7u^5}{48t^3} + \frac{35u^3}{192t^2} + \frac{35u}{256t} \right) \sqrt{t-u^2} \right) \\ &= \frac{35t^4}{64} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{u^7}{4} + \frac{7tu^5}{24} + \frac{35t^2u^3}{96} + \frac{35t^3u}{128} \right) \sqrt{t-u^2}. \end{aligned}$$

Invertendo a seguinte substituição $u = \sqrt{x}$ e substituindo na equação (3.27)

$$\begin{aligned}
 f_4(t) &= \frac{32}{105\pi} \int_0^t \frac{(\sqrt{x})^7}{\sqrt{t-x}} dx \\
 &= \frac{32}{105\pi} \left(\frac{35t^4}{64} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right) - \left(\frac{(\sqrt{x})^7}{4} + \frac{7t(\sqrt{x})^5}{24} + \frac{35t^2(\sqrt{x})^3}{96} + \frac{35t^3\sqrt{x}}{128} \right) \sqrt{t-x} \right)_0^t \\
 &= \left(\frac{t^4}{6\pi} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} \right) - \frac{32}{105\pi} \left(\frac{(\sqrt{x})^7}{4} + \frac{7t(\sqrt{x})^5}{24} + \frac{35t^2(\sqrt{x})^3}{96} + \frac{35t^3\sqrt{x}}{128} \right) \sqrt{t-x} \right)_0^t.
 \end{aligned}$$

A expressão

$$\frac{32}{105\pi} \left(\frac{(\sqrt{x})^7}{4} + \frac{7t(\sqrt{x})^5}{24} + \frac{35t^2(\sqrt{x})^3}{96} + \frac{35t^3\sqrt{x}}{128} \right) \sqrt{t-x}.$$

vai zerar em t e em 0 . Portanto,

$$\begin{aligned}
 f_4(t) &= \frac{t^4}{6\pi} \left[\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right) - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{t}} \right) \right] \\
 &= \frac{t^4}{6\pi} [\operatorname{sen}^{-1}(1) - \operatorname{sen}^{-1}(0)] \\
 &= \frac{t^4}{6\pi} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] \\
 &= \frac{t^4}{12}.
 \end{aligned}$$

Substituindo t por x , concluímos que

$$f_4(x) = \frac{x^4}{12}.$$

Logo em seguida será apresentado um resumo de todos os cálculos para melhor compreender a ideia para o caso em que $f_0(x) = 1$ e $f_0(x) = x^2$.

Tabela 2: Resultados das integrais fracionárias

$f_0(x) = 1$	$f_0(x) = x^2$
$f_1(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_0(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t 1 dx = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$	$f_1(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_0(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t x^2 dx = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}}$
$f_2(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_1(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} dx = x$	$f_2(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_1(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^3}{3}$
$f_3(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_2(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t x dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$	$f_3(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_2(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{x^3}{3} dx = \frac{32}{105\sqrt{\pi}} x^{\frac{7}{2}}$

$f_4(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_3(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^2}{2}$	$f_4(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_3(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{32}{105\sqrt{\pi}} x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^4}{12}$
---	---

Observamos que na tabela 2, contém os resultados das integrais fracionárias de ordem meio das seguintes funções: $f_1(x) = \int_0^t f(x) dx$, $f_2(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_1(x) dx$, $f_3(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_2(x) dx$ e $f_4(x) = \int_{\frac{1}{2}}^t f_3(x) dx$, para $f(x) = 1$ e $f(x) = x^2$.

4. DERIVADA FRACIONÁRIA

A construção da derivada fracionária está intimamente relacionada à função gama. Como diferentes definições desse operador foram desenvolvidas ao longo do tempo, faz-se necessário adotar condições que permitam identificar e validar os operadores que podem ser classificados como derivadas fracionárias (Teodoro; Oliveira, 2017).

4.1 Derivada fracionária de potência de x

A derivada fracionária é uma ampliação das derivadas de ordem inteira definida por:

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

com $n \geq k$, $n, k \in \mathbb{N}$, a ideia principal é substituir fatoriais por valores de função gama, temos que $n!$ e $(n-k)!$ podem ser substituídos por

$$n! = \Gamma(n+1) \quad e \quad (n-k)! = \Gamma(n-k+1).$$

Sabemos que n e k são números inteiros positivos, então devemos substituir k por α ,

$$k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1.$$

De forma que, será considerado como um número real entre 0 e 1. Fazendo essas substituições, obtemos a fórmula para derivada fracionária de ordem α para potência básica de x^n , ou seja,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

Fazendo a demonstração para derivada fracionária de x , com $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2} + 1\right)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}.$$

O resultado da expressão $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ na página 20. Agora devemos verificar se a primeira derivada de x é 1, para isso derivamos esse valor encontrado novamente,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x \right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1)} x^0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} 1 = 1.$$

Esse resultado nos mostra que a derivada fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ duas vezes nos fornece a primeira derivada, confirmando que a fórmula funciona corretamente. A seguir fazemos um apanhado de exemplos que satisfazem os conceitos já vistos nesse trabalho.

1. Para $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{3}$.

Primeira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} x = \frac{\Gamma(1 + 1)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{3} + 1\right)} x^{1 - \frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}.$$

Segunda derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} x \right) = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 1\right)} x^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} x^{\frac{1}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}.$$

Terceira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} x \right) \right] = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1\right)} x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma(1)} x^0 = 1.$$

2. Para $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{4}$.

Primeira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} x = \frac{\Gamma(1 + 1)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{4} + 1\right)} x^{1 - \frac{1}{4}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}.$$

Segunda derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} x \right) = \frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + 1\right)} x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{4}\right)} x^{\frac{2}{4}} = \frac{x^{\frac{2}{4}}}{\Gamma\left(\frac{6}{4}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Terceira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} x \right) \right] = \frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right] = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1) x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) x^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{5}{4})} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$

Quarta derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left\{ \frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} x \right) \right] \right\} = \frac{d^{\frac{1}{4}}}{dx^{\frac{1}{4}}} \left\{ \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{5}{4})} \right\} = \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{4})} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + 1) x^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{4})} \frac{\Gamma(\frac{5}{4}) x^0}{\Gamma(1)} = 1.$$

3. Para $n = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

Primeira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 = \frac{\Gamma(2 + 1)}{\Gamma(2 - \frac{1}{2} + 1)} x^{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.$$

Segunda derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 \right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} \right) = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 1) x^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1)} = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} x = 2x.$$

4. Para $n = 2$ e $\alpha = \frac{1}{3}$.

Primeira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} x^2 = \frac{\Gamma(2 + 1)}{\Gamma(2 - \frac{1}{3} + 1)} x^{2 - \frac{1}{3}} = \frac{\Gamma(3) x^{\frac{5}{3}}}{\Gamma(\frac{8}{3})} = \frac{2x^{\frac{5}{3}}}{\Gamma(\frac{8}{3})}.$$

Segunda derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} x^2 \right) = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2x^{\frac{5}{3}}}{\Gamma(\frac{8}{3})} \right) = \frac{2}{\Gamma(\frac{8}{3})} \frac{\Gamma(\frac{5}{3} + 1)}{\Gamma(\frac{5}{3} - \frac{1}{3} + 1)} = \frac{2}{\Gamma(\frac{8}{3})} \frac{\Gamma(\frac{8}{3}) x^{\frac{4}{3}}}{\Gamma(\frac{7}{3})} = \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{\Gamma(\frac{7}{3})}.$$

Terceira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} x^2 \right) \right] = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{2x^{\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} \right] = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} + 1\right) x^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1\right)} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) x}{\Gamma(2)} = 2x.$$

5. Para $n = -1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

Primeira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^{-1} = \frac{\Gamma(-1 + 1)}{\Gamma\left(-1 - \frac{1}{2} + 1\right)} x^{n-\alpha} = \frac{\Gamma(0)x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^{-1} \right) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\Gamma(0)x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \right) = \frac{\Gamma(0)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2} + 1\right) x^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{\Gamma(0)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-2}}{\Gamma(-2 + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(0)x^{-2}}{\Gamma(-1)}. \end{aligned}$$

Como $\Gamma(0)$ e $\Gamma(-1)$ não possuem valores finitos, não é possível utilizar diretamente a identidade $\Gamma(n) = (n - 1)!$, válida apenas para inteiros positivos. Entretanto, pela relação de recorrência da função gama

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$$

tomando $z = -1$

$$\Gamma(0) = (-1)\Gamma(-1).$$

Portanto,

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-1)} = \frac{(-1)\Gamma(-1)}{\Gamma(-1)} = -1.$$

Consequentemente,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^{-1} \right) = \frac{\Gamma(0)x^{-2}}{\Gamma(-1)} = -x^{-2},$$

como esperado, o resultado coincide com a derivada de primeira ordem de x^{-1} , isto é

$$\frac{d}{dx}x^{-1} = -x^{-2}.$$

6. Para $n = -2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$

Primeira derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^{-2} = \frac{\Gamma(-2+1)}{\Gamma(-2-\frac{1}{2}+1)}x^{-2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(-1)x^{-\frac{5}{2}}}{\Gamma(-\frac{3}{2})}.$$

Segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^{-2}\right) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\Gamma(-1)x^{-\frac{5}{2}}}{\Gamma(-\frac{3}{2})}\right) = \frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(-\frac{5}{2}+1)}{\Gamma(-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1)}x^{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{\Gamma(-2)}x^{-3} = \frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-2)}x^{-3}. \end{aligned}$$

Utilizando a relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

e tomando $z = -2$, obtemos

$$\Gamma(-1) = (-2)\Gamma(-2).$$

Portanto,

$$\frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-2)} = \frac{(-2)\Gamma(-2)}{\Gamma(-2)} = -2.$$

Ou seja,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^{-2} \right) = \frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-2)} x^{-3} = -2x^{-3}.$$

Dessa forma, o resultado coincide com a derivada de primeira ordem de x^{-2} . Isso evidencia a validade da propriedade

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) \right) = \frac{d}{dx} f(x),$$

para os exemplos demonstrados.

4.2 Derivadas fracionárias das funções seno e cosseno

Por exemplo, qual a derivada fracionária de ordem meio da função seno?

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \text{sen} x = ?$$

Para chegar ao resultado, vamos ver as derivadas de ordem 1, 2, 3 e 4.

Tabela 3. Demonstração de derivadas de ordem 1,2,3 e 4.

$\frac{d}{dx} \text{sen} x = \text{cos} x$	$\frac{d^2}{dx^2} \text{sen} x = -\text{sen} x$	$\frac{d^3}{dx^3} \text{sen} x = -\text{cos} x$	$\frac{d^4}{dx^4} \text{sen} x = \text{sen} x$
--	---	---	--

Esses resultados cos , $-\text{sen} x$, $-\text{cos} x$ e $\text{sen} x$, através da fórmula soma de arcos podem ser reescritos como:

Tabela 4. Reformulação dos resultados de derivadas de ordem 1,2,3 e 4, através da soma de arcos

$\text{cos} x = \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$	$-\text{sen} x = \text{sen}(x + \pi)$	$-\text{cos} x = \text{sen} \left(x + \frac{3\pi}{2} \right)$	$\text{sen} x = \text{sen}(x + 2\pi)$
--	---------------------------------------	--	---------------------------------------

Com isso, podemos observar que existe um padrão da ordem da derivada com a função seno, isto é

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} n \right), \quad (4.1)$$

onde n é a ordem da derivada. Usando a fórmula (4.1), fazemos a derivada fracionária de ordem meio duas vezes.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right).$$

Essa é a primeira derivada de $\operatorname{sen} x$ de ordem meio, agora fazendo a segunda derivada fracionária de ordem meio

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen} x \right] = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x.$$

Para compreender a última desigualdade, ver a tabela 4. Portanto,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen} x \right] = \cos x = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x.$$

A derivada fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ duas vezes é igual a derivada de 1ª ordem.

Para derivada fracionária de ordem um terço da função $\operatorname{sen} x$ obtemos a partir da fórmula (4.1) o seguinte resultado

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Usando a fórmula de soma de arcos

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x.$$

Dessa forma, temos a primeira derivada de $\operatorname{sen} x$ de ordem um terço, utilizando a mesma ordem fazemos a segunda derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \operatorname{sen} x \right] = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Usando a fórmula de soma de arcos

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x.$$

Fazendo a terceira derivada fracionária de ordem um terço, obtemos

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \operatorname{sen} x \right) \right] = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x.$$

Como $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, então deduzindo pelo resultado que

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} = \frac{d}{dx},$$

ou seja, três derivadas fracionárias sucessiva de ordem $\frac{1}{3}$ é equivalente a uma derivada de ordem 1. Para $\cos x$, reescrevemos os resultados das derivadas de ordem 1, 2, 3 e 4 através da fórmula de soma de arcos, obtemos

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos x = -\cos x = \cos(x + \pi);$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \cos x = \operatorname{sen} x = \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \cos x = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

A partir disso, temos a seguinte fórmula,

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} n \right). \quad (4.2)$$

Usando a fórmula (4.2), obtemos a derivada fracionária de ordem meio da função $\cos x$ derivando duas vezes, fazendo a primeira derivada,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Usando a formula de soma de arcos temos,

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x).$$

Agora fazemos a segunda derivada fracionária de ordem meio,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \cos x \right] = -\sin x.$$

Fazendo a derivada fracionária de um terço da função $\cos x$, temos o seguinte resultado:

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \cos x = \cos x \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Usando a fórmula de soma de arcos, temos o resultado da primeira derivada fracionária de ordem $\frac{1}{3}$,

$$\cos x \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

Utilizando o mesmo método temos a segunda derivada,

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \cos x \right] = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

Fazendo a terceira derivada fracionária, temos

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}} \cos x \right) \right] = -\sin x.$$

Com isso três derivadas fracionárias sucessivas de ordem $\frac{1}{3}$ é equivalente a uma derivada de ordem 1.

Os exemplos apresentados evidenciam a consistência da definição de derivada fracionária empregada neste trabalho. Em particular, verificou-se que a aplicação sucessiva de duas derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ produz o mesmo resultado que uma derivada de ordem 1, validando a propriedade $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) \right) = \frac{d}{dx} f(x)$ e reforçando a consistência da generalização proposta pelo cálculo fracionário (Lustosa, 2022).

Mesmo nos casos em que surgem expressões envolvendo a função gama avaliada em inteiros não positivos, como $\Gamma(0)$, $\Gamma(-1)$ e $\Gamma(-2)$, a utilização da relação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ permite simplificar adequadamente as razões entre esses termos e obter resultados coerentes com o cálculo diferencial clássico. Dessa forma, os resultados obtidos reforçam a compatibilidade entre o cálculo fracionário e o cálculo usual, mostrando que as derivadas de ordem não inteira constituem uma extensão natural do conceito tradicional de derivação.

Os resultados obtidos para as funções seno e cosseno mostram que o conceito de derivada pode ser naturalmente estendido para ordens não inteiras. A partir dos padrões observados nas derivadas usuais dessas funções, foi possível estabelecer expressões gerais para derivadas de ordem arbitrária por meio da soma de arcos. Os exemplos desenvolvidos para as ordens $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ evidenciaram que a aplicação sucessiva de derivadas fracionárias conduz ao mesmo resultado obtidos pela derivação clássica quando a soma das ordens fracionárias é igual a um inteiro.

Dessa forma, o estudo das funções trigonométricas confirma que as derivadas de ordem não inteira preservam importantes propriedades do cálculo diferencial clássico, ao mesmo tempo em que ampliam suas possibilidades de aplicação e interpretação matemática.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para calcular uma integral de ordem não inteira utilizamos os métodos de integral fracionária segundo Riemann-Liouville, apesar de não estar totalmente explicitado, presenciamos a partir desse estudo que a integral dupla de ordem $\frac{1}{2}$ de uma função será a integral usual dessa mesma função.

Levando em consideração a definição apresentada sobre derivada fracionária, verificamos que ela atende uma das propriedades de uma semiderivada, que seria obter o mesmo efeito de uma derivada simples e regular se a aplicarmos n -vezes seguidas. Ou seja, derivada fracionária de ordem meio duas vezes tem que ser igual a derivada de primeira ordem ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$).

O mesmo vale para derivada fracionária das funções seno e cosseno. Verificamos através da fórmula da soma de arcos, um padrão de ordem, para derivada de ordem não inteira das funções seno e cosseno, o qual nos permite calcular derivadas de ordem n , em que n pode ser uma fração. Isto nos mostra que, se a ordem for um terço $\frac{1}{3}$, ou seja, três derivadas fracionárias sucessiva dessa ordem será equivalente a uma derivada de ordem 1. Concluído que a fórmula apresentada para derivadas fracionárias funciona como esperado.

Ressalta-se também que a função gama fornece conexões que ajudam a solucionar questões que poderiam ser complexas, com o auxílio dessa função é possível estabelecer um formato para derivadas e integrais de ordem não inteira para funções potências. Permitindo entender a necessidade de expandir estudos sobre cálculo fracionário, mostrando que questões que parecem ser complexas podem se tornar simples.

Dessa forma, conclui-se que o cálculo fracionário não substitui o cálculo diferencial e integral tradicional, mas o amplia, preservando propriedades fundamentais e introduzindo operadores intermediários entre integrar e derivar uma vez. Essa característica torna a teoria uma ferramenta matemática robusta e adequada para a descrição de fenômenos que não podem ser representados satisfatoriamente por modelos de ordem inteira.

Como perspectivas para trabalhos futuros, sugere-se a investigação de integrais e

derivadas fracionárias de outras ordens e ordens irracionais, bem como o estudo de outras funções elementares, incluindo a função exponencial, o logaritmo natural, a tangente e as funções hiperbólicas. Além disso, recomenda-se aprofundar pesquisas envolvendo equações diferenciais fracionárias e suas aplicações em problemas físicos e de engenharia, como na modelagem de sistemas viscoelásticos, na difusão anômala e no processamento de sinais.

Por fim, espera-se que este trabalho contribua para a compreensão e divulgação do cálculo fracionário, evidenciando sua consistência matemática, sua relação com o cálculo clássico e seu potencial para o desenvolvimento de novas pesquisas e aplicações científicas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cérvulo Augusto Ferreira de. **Cálculo fracionário: as diferenças entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, Ouro Branco, 2023.

CALLAN, David. **A combinatorial survey of identities for the double factorial**. Madison: University of Wisconsin-Madison, 2009. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0906.1317>. Acesso em: 7 jun. 2026

FERREIRA, Walison Arruda. **Cálculo fracionário: noções básicas e aplicação**. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campus Cajazeiras, Cajazeiras, 2024. Orientador: José Ivelton Siqueira Lustosa.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 5. ISBN 978-85-357-1750-1.

LEITHOLD, Luís. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LUSTOSA, J. I. S. **Cálculo fracionário aplicado à avaliação de efeitos estruturais na deflexão de vigas biapoçadas**. Tese (Doutorado). Unicamp, 2022.

MELO, Simone Mylena. de. **Continuação Analítica das Funções Gama e Zeta de Riemann**. Tese (Doutorado) Universidade Federal de São João del-Rei, 2021

MORILLO, Esteban; RIERA, Lenin; YANGARI, Miguel. **Introducción al cálculo fraccionario**. *Revista de Divulgación Amarun*, Quito, v. 1, n. 1, p. 27–45, 2022

MORPHOCULAR. **What Lies Between a Function and Its Derivative? Fractional Calculus**. YouTube, 11 de ago. de 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2dwQUUDt5Is&t=997s>. Acesso em: 19/03/2024.

OLDHAM, K.; SPANIER, J. **The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**. ACADEMIC PRESS New York and London: Elsevier, 1974.

OLIVEIRA, Altenize dos Santos Cordeiro: **Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2018.

TIEPPO, Sandra Maria & GUZZO Sandro Marcos. **Elementos do Cálculo Fracionário**. *Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática (1s.)* v. 21 (2018): 45–79. ISSN-2594-6323.

TEODORO, G. Sales ; OLIVEIRA, E. Capelas. de. **Derivadas fracionárias: critérios para classificação**. CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 10, 2017. Disponível em: . Acesso em: 14 maio de 2026

TEODORO, G. Sales; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. Capelas de. **Sobre derivadas fracionárias**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 40, n. 2, e2307, 2018. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0213.

VCUBINGX. **The Fractional Derivative, what is it? Introduction to Fractional Calculus**. YouTube, 25 de jul. de 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=A4sTAKN6yFA&list=WL&index=41&t=486s>. Acesso em: 19/03/2024.

ZEISER, Mateus Henrique. **Introdução ao Cálculo Fracionário com Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Licenciatura em Matemática, Chapecó, SC, 2023.