Universidade Estadual
da Região Tocantina
do Maranhão

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, NATURAIS E TECNOLÓGICAS - CCENT
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

POTENCIALIZANDO O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE ATIVIDADES UTILIZANDO O GEOGEBRA

JOÃO WILLIAN FERREIRA BONFIM

Imperatriz-MA, 2024

JOÃO WILLIAN FERREIRA BONFIM

POTENCIALIZANDO O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE ATIVIDADES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, como requisito para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Weslley Jonh Barros Silva

Março de 2024

Resumo

Este trabalho teve como objetivo investigar o impacto do uso do software GeoGebra na compreensão dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas em estudantes do ensino médio. A justificativa para esse estudo se baseia na necessidade de explorar estratégias inovadoras de ensino que possam facilitar o aprendizado desses temas, que são frequentemente considerados desafiadores para os alunos. A metodologia utilizada consistiu na implementação de uma sequência didática, envolvendo o uso do software GeoGebra, em uma turma de primeiro ano do ensino médio. Os estudantes foram divididos em grupos e realizaram atividades práticas que exploraram as propriedades e comportamentos das funções exponenciais e logarítmicas, utilizando o software como uma ferramenta de apoio. Os principais resultados evidenciaram que o uso do GeoGebra teve um impacto positivo na compreensão dos conceitos pelos alunos. Eles demonstraram maior interesse, participação ativa e engajamento durante as atividades, além de uma melhoria significativa no desempenho em avaliações realizadas posteriormente. A partir desses resultados, conclui-se que o software GeoGebra é uma ferramenta eficaz para melhorar o aprendizado dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio. Portanto, seu uso é recomendado como uma estratégia complementar aos métodos tradicionais de ensino desses conteúdos.

Palavras-chave: GeoGebra. Funções exponenciais e logarítmicas. Sequência de atividades. Professores e alunos.

Abstract: This work aimed to investigate the impact of using the GeoGebra software on the understanding of the concepts of exponential and logarithmic functions in high school students. The justification for this study is based on the need to explore innovative teaching strategies that can facilitate the learning of these topics, which are often considered challenging for students. The methodology used consisted of implementing a didactic sequence, involving the use of GeoGebra software, in a first-year high school class. The students were divided into groups and carried out practical activities that explored the properties and behaviors of exponential and logarithmic functions, using the software as a support tool. The main results showed that the use of GeoGebra had a positive impact on the students' understanding of the concepts. They demonstrated greater interest, active participation and engagement during the activities, in addition to a significant improvement in performance in assessments carried out later. From these results, it is concluded that the GeoGebra software is an effective tool to improve the learning of the concepts of exponential and logarithmic functions in high school. Therefore, its use is recommended as a complementary strategy to traditional methods of teaching these contents.

Keywords: GeoGebra. Exponential and logarithmic functions. Sequence of activities. Teachers and students.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CCENT	Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas
GD	Geometria Dinâmica
UEMASUL	Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

SUMÁRIO

1 Introdução

No âmbito da educação matemática, o ensino de funções exponenciais e logarítmicas desempenha um papel essencial na formação dos estudantes, fornecendo bases fundamentais para o entendimento de fenômenos naturais, econômicos e científicos. Contudo, a complexidade intrínseca desses conceitos, aliada à abordagem muitas vezes tradicional, pode dificultar a compreensão dos alunos e prejudicar a construção de conhecimento sólido. Nesse contexto, a aplicação do GeoGebra no ensino tem sido defendida por pesquisadores da área de educação matemática, como Domingos (2003), que ressaltam a importância de ferramentas computacionais para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, especialmente quando se trata de tópicos mais abstratos e complexos.

O ensino de funções exponenciais e logarítmicas é um desafio recorrente em salas de aula de matemática. Essas funções são intrínsecas a diversos contextos da vida real, como crescimento populacional, decaimento radioativo e análise de dados financeiros. Como ressaltado por Rodrigues (2021, p.14), as funções exponenciais e logarítmicas “exibem muitas aplicações na vida cotidiana, em diversas áreas de conhecimento e que podem ser construídos de maneira simples, mas com aprendizagem participativa e efetiva". No entanto, a abstração dos conceitos matemáticos muitas vezes distancia os alunos da compreensão plena desses temas, resultando em dificuldades no desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas que envolvam funções exponenciais e logarítmicas.

A escolha deste tema se fundamenta na busca por estratégias pedagógicas que possam efetivamente contribuir para a superação das barreiras no ensino de funções exponenciais e logarítmicas. O GeoGebra, uma ferramenta dinâmica de matemática e geometria, permite a visualização, exploração e interação com representações gráficas dessas funções, potencializando a compreensão por meio de uma abordagem mais concreta e intuitiva. De acordo com Segurado e Ponte (1998), ressaltam os benefícios da utilização de tecnologias no ensino de matemática, especialmente quando associadas a atividades que encorajem os estudantes a investigar e concluir hipóteses. A integração dessa tecnologia ao processo de ensino pode oferecer uma oportunidade única de tornar o aprendizado mais significativo e envolvente.

No âmbito deste estudo, o propósito central é desenvolver, aplicar e avaliar uma sequência didática que empregue o GeoGebra como recurso pedagógico no ensino de funções exponenciais e logarítmicas, direcionado ao primeiro ano do ensino médio. Adicionalmente, objetiva-se investigar as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos ao abordar esses conceitos, elaborar uma sequência didática estruturada que englobe atividades exploratórias utilizando o GeoGebra, avaliar a eficácia dessa sequência didática na promoção da compreensão conceitual e no aprimoramento do desempenho estudantil, e por fim, identificar a percepção dos alunos em relação ao emprego do GeoGebra como ferramenta coadjuvante no processo de aprendizagem.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: após esta introdução, a seção de Fundamentação Teórica explora os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, apresenta o GeoGebra como ferramenta educacional e discute abordagens pedagógicas que sustentam a sequência didática proposta. Na seção de Metodologia, são detalhados o tipo de pesquisa, os participantes, os procedimentos de coleta e análise de dados. A seção de Desenvolvimento apresenta a sequência didática, descrevendo as atividades planejadas e a utilização do GeoGebra. Por fim, as Considerações Finais recapitulam os principais achados, ressaltam a relevância do uso do GeoGebra no ensino e indicam possíveis direções para futuras investigações.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Abordagens pedagógicas no ensino de Matemática

A abordagem tradicional no ensino de funções exponenciais e logarítmicas muitas vezes se baseia na exposição teórica e na resolução de exercícios de forma mecânica, sem uma real compreensão dos fenômenos envolvidos. No entanto, com o uso do GeoGebra, é possível adotar uma abordagem mais dinâmica e interativa, permitindo que os alunos explorem visualmente os conceitos matemáticos em um ambiente virtual e interativo.

Os estudantes podem manipular os parâmetros das funções e observar em tempo real as mudanças no gráfico, o que contribui para uma aprendizagem mais intuitiva e significativa. De acordo com Peres (2013, p.8):

> [...] O Geogebra é um software gratuito de Geometria Dinâmica que reúne conceitos da Geometria e da Álgebra em uma única plataforma. Foi criado por Markus Hohenwarterem 2001 para uso em sala de aula. É um software que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo. Dentre seus benefícios didáticos, oferta a possibilidades de duas representações diversificadas de um mesmo objeto que interagem entre si: a janela geométrica e a janela algébrica. A janela geométrica é o local onde se destina objetos construídos, sendo possível alterar e colorir os objetos, espessura de linhas, medir ângulos, medir distâncias, exibir cálculos, entre outros.

Além disso, o GeoGebra possibilita a construção de modelos matemáticos para representar situações-problemas que envolvam funções exponenciais e logarítmicas. Conforme destacado por Santos e Costa (2021, p.111), "os softwares são eficientes no momento em que o professor pretende estabelecer significados e aplicações dos conceitos matemáticos pelas possiblidades de manipulação e trabalho simultâneo com as representações semióticas". Essa abordagem contextualizada torna o aprendizado mais motivador, uma vez que os alunos percebem a relevância e a utilidade dos conceitos matemáticos estudados.

A criatividade é uma habilidade essencial no processo de aprendizagem e resolução de problemas em matemática. No entanto, muitos alunos têm dificuldade em desenvolver essa capacidade, principalmente quando percebem a matemática como uma disciplina rígida e estática. Nesse contexto, o GeoGebra surge como uma ferramenta pedagógica que desafia essa percepção.

A abordagem do GeoGebra baseia-se na ideia de que os estudantes aprendem melhor quando têm a oportunidade de serem ativos em sua própria aprendizagem. Por meio da manipulação dos objetos geométricos e funções matemáticas na interface do software, os alunos são convidados a construir conceitos e explorar relações matemáticas de forma prática e visual. Essa experiência imersiva incentiva a curiosidade e a experimentação, criando um ambiente propício para o desenvolvimento da criatividade matemática.

Ao explorar as funcionalidades do GeoGebra, os alunos têm a liberdade de modificar os parâmetros das construções e observar como essas mudanças afetam os resultados. Essa liberdade de exploração permite que os alunos sejam mais do que meros receptores de conhecimento, tornando-se participativos de sua processo ensino-aprendizagem.

Conforme destacado por Moraes (2020), a aprendizagem ocorre por meio da interação entre o indivíduo e o ambiente, e a criatividade surge quando esse ambiente oferece espaço para a expressão e o desenvolvimento do pensamento divergente. Nesse sentido, a interface dinâmica do GeoGebra atua como um ambiente propício para a criatividade, permitindo que os alunos expressem suas ideias de forma gráfica e visual.

A criatividade é também uma habilidade que está diretamente relacionada à resolução de problemas matemáticos. Ao usar o GeoGebra para investigar conceitos e explorar soluções, os alunos têm a oportunidade de desenvolver o pensamento criativo e a capacidade de encontrar abordagens inovadoras para desafios matemáticos.

Outro aspecto pertinente é o desenvolvimento do pensamento crítico e investigativo dos alunos. Com o GeoGebra, os estudantes podem formular conjecturas, testar hipóteses e explorar diferentes cenários para a resolução de problemas envolvendo funções. Como afirmam Carneiro (2022, p.37), "utilizar essa ferramenta dinâmica é proporcionar autonomia e liberdade para o estudo, no qual os envolvidos podem, por si próprios, conjecturar e chegar a determinadas conclusões pela simples observação dos invariantes".

A utilização do software de matemática dinâmica também pode auxiliar o professor na avaliação do desempenho dos alunos. Com as ferramentas disponíveis no software, é possível criar avaliações personalizadas, ou seja, “este software permite a construção e visualização de movimentos interativos que torna possível a aluno e professor fazer e ver coisas que dificilmente seriam feitas e vistas se utilizados somente quadro e pincel." (COSTA, 2017, p.32).

Contudo, é importante destacar que a implementação bem-sucedida do GeoGebra, que é uma Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), no ensino de funções deve ser conforme mencionado por Belloni (2003): é fundamental que o educador esteja capacitado para empregar adequadamente as TICs, uma vez que o desenvolvimento de habilidades específicas requer compreender os processos cognitivos envolvidos no uso dessas tecnologias. Dessa maneira, a integração das TICs deve estar associada à estimulação da criatividade, tanto por parte dos professores quanto dos alunos, criando uma relação de simultaneidade entre o uso dessas ferramentas e a produção criativa.

Em síntese, o software GeoGebra é uma ferramenta essencial e inovadora no ensino de funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio. Sua abordagem visual e interativa permite que os alunos explorem de forma concreta e significativa os conceitos matemáticos envolvidos, estabelecendo conexões entre a teoria e a prática. Além disso, estimula o pensamento crítico e investigativo dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais autônoma e reflexiva. No entanto, para que o potencial do GeoGebra seja plenamente aproveitado, é fundamental que os professores estejam preparados e capacitados para incorporar essa ferramenta em suas práticas pedagógicas de maneira eficiente e contextualizada.

2.2 Utilização do GeoGebra como recurso didático

Diante das reflexões e análises apresentadas acima, torna-se evidente que a utilização do GeoGebra como recurso didático no ensino de Matemática é uma abordagem relevante e eficaz para promover uma aprendizagem mais significativa e engajadora, especialmente no contexto das funções exponenciais e logarítmicas. Com base nas contribuições de diversos estudiosos e pesquisas na área de educação matemática, fica claro que essa ferramenta tecnológica oferece inúmeras vantagens para o processo de ensino-aprendizagem, tanto para os alunos quanto para os professores.

Ao possibilitar a exploração visual e interativa dos conceitos matemáticos, o GeoGebra oferece aos alunos uma experiência concreta e espotânea no estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Conforme ressaltado por Pádua (2010, p.113), "permite a interatividade entre os objetos matemáticos e a visualização dos conceitos, possibilitando, assim, a formulação de conjecturas". Essa abordagem permite que os estudantes compreendam as propriedades e comportamentos dessas funções de maneira mais profunda e expressiva, tornando o aprendizado mais palpável.

Nesse contexto, o GeoGebra se apresenta como uma ferramenta interessante para auxiliar os alunos a visualizarem e compreenderem o comportamento das funções exponenciais e logarítmicas. Ao permitir que os estudantes explorem graficamente diferentes valores de parâmetros, como a base e o expoente, eles podem observar como essas alterações afetam o formato do gráfico da função exponencial.

Além disso, possibilita a sobreposição de gráficos de diferentes funções, permitindo que os alunos comparem o comportamento dessas funções com diferentes bases e argumentos. Essa capacidade de comparação facilita a identificação de padrões e regularidades, auxiliando os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda do conteúdo.

Outro aspecto relevante é a possibilidade de investigar as propriedades de simetria e assimetria dos gráficos de funções exponenciais e logarítmicas por meio, visto que há a alternativa de manipular os parâmetros da função e observar como essas mudanças afetam os eixos de simetria e os pontos de interseção com os eixos coordenados, o que contribui para a consolidação dos conceitos envolvidos.

A interatividade oferecida pelo GeoGebra também permite que os alunos testem conjecturas e explorem cenários diversos, fomentando o pensamento investigativo e incentivando-os a formular perguntas e hipóteses sobre o comportamento dessas funções. Dessa forma, o aprendizado se torna mais dinâmico, uma vez que os estudantes têm a oportunidade de construir seu conhecimento por meio da experimentação e da análise gráfica.

Ao incorporar o GeoGebra na metodologia de ensino, proporciona-se a oportunidade de resolver problemas aplicados e contextualizar os conceitos matemáticos em situações do mundo real, já que segundo Crotteza (2023, p.110) o GeoGebra permite “representar graficamente funções, traçar curvas, explorar funções e estudar propriedades das mesmas, como domínio, imagem, raízes e comportamento assintótico”. Ao verem a matemática ganhar vida através de aplicações práticas e da resolução de problemas reais, os estudantes são incentivados a se envolverem de forma mais significativa e participativa no processo educacional.

Outro aspecto relevante é o papel do professor como mediador no processo de ensino-aprendizagem. Com o GeoGebra, o professor pode adotar uma postura mais orientadora e facilitadora, estimulando a curiosidade e a investigação dos alunos. Dassa forma, enxerga-se o software como uma ferramenta complementar no processo de aprendizagem, visto que:

> além de servir, de maneira clara, para a exploração de resultados e para o incentivo de investigações, os softwares educacionais podem sugerir caminhos à realização de demonstrações desconhecidas, propondo artifícios que, muitas vezes, em demonstrações formais são necessários e de difícil compreensão (LOURENÇO, 2002, p. 105).

Essa abordagem pedagógica contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos estudantes em sua trajetória escolar.

Como recurso didático no ensino de funções exponenciais e logarítmicas representa o GeoGebra traz uma abordagem contemporânea e eficaz para promover uma aprendizagem mais expressiva e engajadora. Através dessa ferramenta, os alunos têm a oportunidade de explorar visualmente os conceitos matemáticos, resolver problemas aplicados e desenvolver habilidades fundamentais para o enfrentamento de desafios acadêmicos e profissionais.

Vale destacar que a implementação bem-sucedida do GeoGebra requer uma preparação adequada dos professores. É fundamental que os docentes estejam familiarizados com a ferramenta e capacitados para integrá-la de forma coerente e efetiva em suas práticas pedagógicas. Nesse sentido, a buscar por novas metodologias e o investimento na formação são elementos essenciais para maximizar o aproveitamento pedagógico do GeoGebra no ensino de Matemática.

Diante do exposto, a adoção do GeoGebra como recurso didático se mostra como uma abordagem promissora e enriquecedora para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio. Essa ferramenta tecnológica pode contribuir significativamente para tornar o aprendizado mais envolvente, contextualizado e significativo, preparando os alunos para enfrentar os desafios matemáticos e aplicar seus conhecimentos de forma relevante em suas vidas dentro e fora do ambiente escolar.

3 Avaliação prévia do plano de aula

O objetivo desta sequência didática é introduzir os alunos da 1ª série do Ensino Médio aos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, proporcionando-lhes uma compreensão sólida desses tópicos, preparando-os para aplicações futuras em matemática e outras disciplinas. A análise a priori do plano de aula busca garantir que as atividades planejadas sejam adequadas para alcançar os objetivos educacionais definidos. A sequência didática está disponível nos apêndices.

Durante todo o processo, o professor deve estar disponível para responder a dúvidas, fornecer feedback e garantir que os alunos estejam acompanhando o conteúdo de forma eficaz. Além disso, a interação dos alunos e a participação ativa nas atividades em grupo são elementos essenciais para o sucesso da sequência didática.

As atividades foram planejadas para cinco horas-aula de 40 minutos cada, de acordo com a tabela 1.

Tabela 1 – Cronograma das atividades

Atividades	Duração
1ª atividade	1 hora-aula
2ª atividade	2 horas-aula
3ª atividade	1 hora-aula
4ª atividade	2 horas-aula
5ª atividade	1 hora-aula

Fonte: Construída pelo autor

PERFIL DA TURMA:

Objetivo: Identificar as características da turma

O objetivo desta atividade visa identificar o perfil de uma turma da primeira série do ensino médio, ou seja, obter informações essenciais sobre os alunos que compõem o grupo. Essas informações podem ser valiosas para professores, coordenadores escolares e demais profissionais da educação, pois ajudam a personalizar o processo de ensino e aprendizagem, promovendo um ambiente mais inclusivo e eficaz. Aqui estão alguns dos principais objetivos dessa atividade:

- Conhecer os alunos individualmente: O primeiro ano do ensino médio marca o início de uma nova fase na jornada educacional dos estudantes. Identificar seus interesses, habilidades, histórico acadêmico e aspirações pessoais ajuda os educadores a entender melhor cada aluno como indivíduo.
- Adaptar o ensino: Ao conhecer o perfil da turma, os professores podem adaptar suas abordagens pedagógicas para atender às necessidades específicas dos alunos. Isso inclui a escolha de estratégias de ensino, recursos educacionais e métodos de avaliação adequados ao grupo.

- Promover a inclusão: Identificar estudantes com necessidades especiais, dificuldades de aprendizagem ou habilidades excepcionais é fundamental para criar um ambiente inclusivo. Isso permite que a escola forneça o suporte adequado, como planos de ensino individualizados (PEIs) ou recursos de apoio, quando necessário.
- Planejar intervenções: A partir das informações coletadas, a escola pode identificar áreas de melhoria e planejar intervenções precoces. Por exemplo, se uma parcela significativa dos alunos está lutando em uma determinada disciplina, medidas adicionais de suporte podem ser implementadas antes que os problemas se agravem.
- Estabelecer metas educacionais: Ao entender o perfil da turma, os educadores podem estabelecer metas educacionais realistas e alinhadas com as expectativas dos alunos e de suas famílias. Isso ajuda a motivar os estudantes e a medir o progresso ao longo do ano letivo.
- Melhorar a gestão escolar: As informações sobre o perfil da turma também podem ser úteis para a gestão escolar, auxiliando na alocação de recursos, na identificação de necessidades de formação de professores e na avaliação da eficácia das políticas educacionais da escola.

Em resumo, o objetivo de identificar o perfil de uma turma da primeira série do ensino médio é promover a personalização da educação, facilitando a criação de um ambiente de aprendizagem que atenda às necessidades individuais dos alunos e os prepare para um futuro acadêmico e profissional bem-sucedido. É uma prática importante para a melhoria contínua do sistema educacional e o sucesso dos estudantes.

3.1 Função Exponencial

1ª ATIVIDADE:

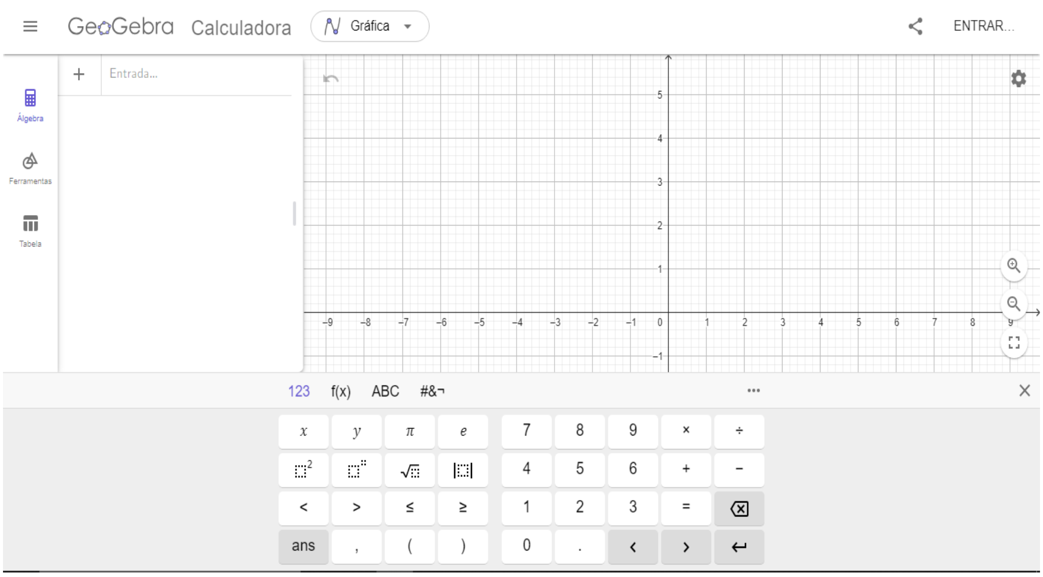
Objetivo: Conhecer o software GeoGebra.

A fim de promover um maior entendimento das características e construção gráfica das funções exponenciais e logarítmicas, foi planejada uma sequência didática com a inclusão do GeoGebra como ferramenta de apoio. Durante o processo de ensino, o software seria introduzido aos alunos, fornecendo explicações detalhadas sobre suas funcionalidades, incluindo a forma de navegar pelas janelas de álgebra e geometria, bem como o uso dos comandos disponíveis.

Essa etapa introdutória permitiria que os alunos adquirissem o conhecimento mínimo necessário para explorar e utilizar o GeoGebra em atividades posteriores da sequência didática. Ao interagir com o software, de acordo com a figura 1, pode-se criar suas próprias construções, os estudantes poderiam aprofundar seus conhecimentos de maneira mais efetiva.

No início do processo, a atenção seria direcionada para os comandos fundamentais, como Ponto, Segmento de Reta, Reta Perpendicular, Gráficos e a inserção de valores. O objetivo seria esclarecer aos alunos o propósito e o uso adequado de cada comando, além de guiar a construção dos objetos correspondentes. Importante mencionar que seria enfatizado o aproveitamento das duas formas de visualização disponíveis para cada objeto construído, ou seja, tanto nas janelas de álgebra quanto nas de geometria.

Figura 1 – Tela do GeoGebra



Fonte: Construída pelo autor

Após abordar os comandos da interface de geometria, o foco seria direcionado para o campo de entrada, onde os alunos poderiam explorar a construção de objetos digitando os comandos. Em seguida, o próximo passo consistiria na introdução dos controles deslizantes, com explicações detalhadas sobre como funcionam e sua relevância nas atividades propostas.

2ª ATIVIDADE:

Objetivo: Relembrar a definição de função exponencial e suas propriedades.

Considerando uma função matemática amplamente estudada e utilizada em diversas áreas, temos uma expressão que envolve a base elevada a um determinado expoente. Essa função apresenta propriedades especiais e é de grande importância em muitos contextos. No entanto, é essencial salientar que seu estudo e aplicação exigem uma compreensão sólida da matemática, especialmente dos conceitos de potenciação e das propriedades dos expoentes.

Chama-se **função exponencial** toda função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_+^*$, tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$, com $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}_+^*$ e $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$.

Propriedades da função exponencial

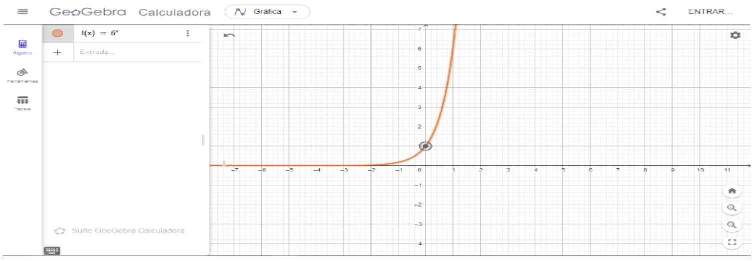
P1. Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que: $a^x = a^y \leftrightarrow x = y$

A propriedade P1 decorre do fato de a função exponencial ser uma correspondência biunívoca.

P2. A função exponencial $f(x) = a^x$ é **crescente** em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$

Como no gráfico da figura 2:

Figura 2 – Gráfico de $f(x) = 6^x$ no GeoGebra



Fonte: Construída pelo autor

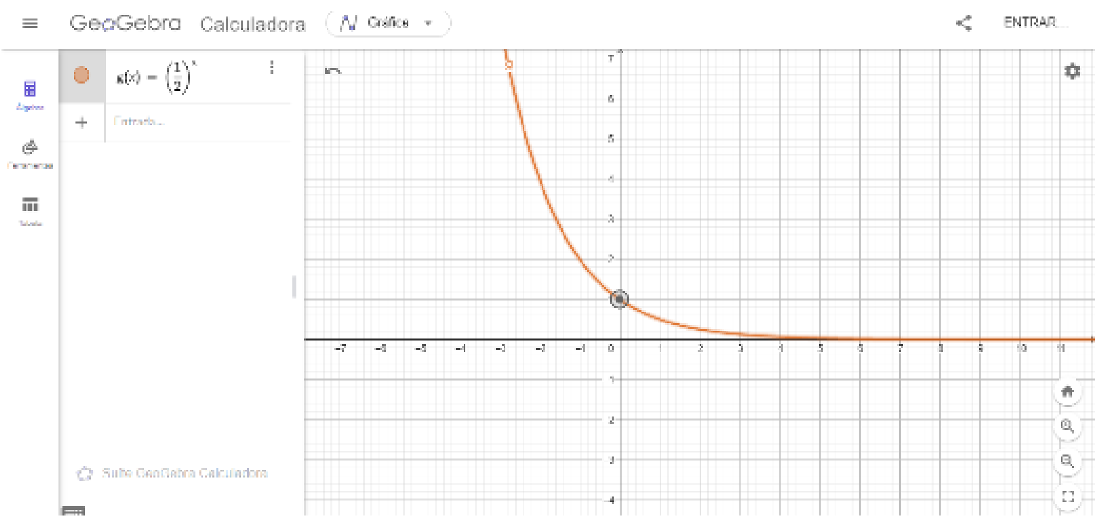
Tem-se, então $a^{x_2} > a^{x_1} \leftrightarrow x_2 > x_1$, para qualquer a real maior que 1.

P3. A função exponencial $f(x) = a^x$ é **decrescente** em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$.

Observe o gráfico da figura 3:

Figura 3 – Gráfico de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ no GeoGebra

:



Fonte: Construída pelo autor

Tem-se, então $a^{x_2} > a^{x_1} \leftrightarrow x_2 < x_1$, para qualquer a real com $0 < a < 1$.

3ª ATIVIDADE:

Objetivo: Plotar o gráfico de uma função exponencial com o auxílio de uma planinha utilizando o GeoGebra.

Questão: Vamos plotar o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$

Passo 1: Abra o GeoGebra e crie uma nova janela de planilha e uma nova janela de gráficos.

Passo 2: Na planilha 1, insira os valores para x e, em uma coluna ao lado, calcule os valores correspondentes para $f(x) = 2^x$. Por exemplo, você pode usar os valores de x de -5 a 5 (ou quaisquer outros valores que desejar).

Planilha 1 – Valores correspondentes

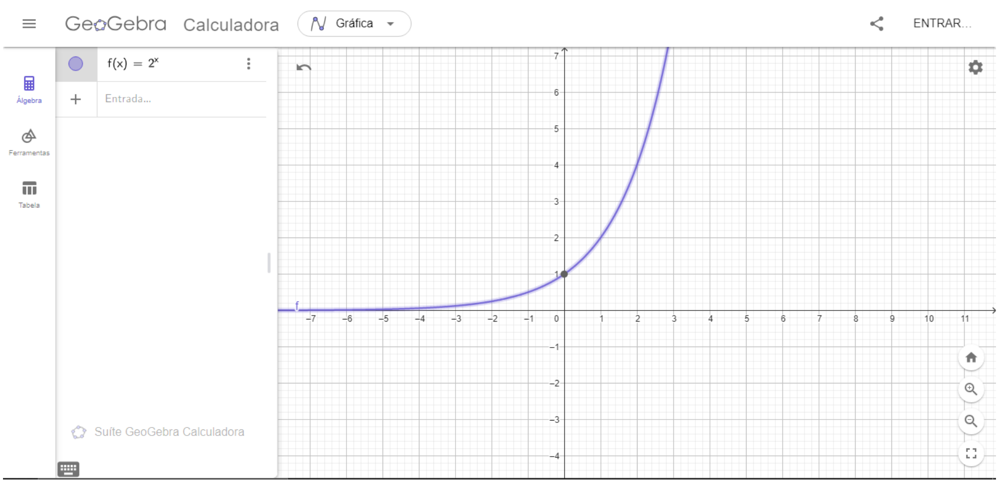
A	B
x	2^x
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Fonte: Construída pelo autor

Passo 3: Selecione os valores de f(x) na coluna B e, em seguida, clique na janela de gráficos.

Passo 4: Com os valores selecionados, clique no ícone "Gráfico de Dispersão" na barra de ferramentas da janela de gráficos. O gráfico na figura 4 da função exponencial $f(x) = 2^x$ será plotado.

Figura 4 – Gráfico de $f(x) = 6^x$ no GeoGebra



Fonte: Construída pelo autor

Observação: Pode-se usar a função exponencial do GeoGebra diretamente no campo de entrada da janela de gráficos. Basta digitar a expressão "2^x" no campo de entrada e pressionar Enter. O GeoGebra irá plotar automaticamente o gráfico da função exponencial.

4ª ATIVIDADE:

Objetivo: Praticar as equações exponenciais que estão intimamente ligadas a gráficos de funções exponenciais. Aprender sobre essas equações ajuda a interpretar gráficos de forma mais profunda, permitindo que se compreenda melhor a tendência dos dados e identifique comportamentos específicos, como taxas de crescimento ou decaimento.

A equação exponencial se caracteriza pela presença da incógnita no expoente. Para resolver essas equações, além das propriedades das potências utiliza-se a seguinte propriedade:

Se duas potências são iguais, tendo as bases iguais, então os expoentes são iguais:

$$a^m = a^n \leftrightarrow m = n, \text{ para } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

5ª ATIVIDADE:

Objetivo: Compreender as propriedades e o comportamento das funções exponenciais, incluindo sua taxa de crescimento, domínio, imagem, simetria, pontos notáveis e gráficos.

Questão: Resolva a equação exponencia $2^x = 8$ usando o GeoGebra.

Passo 1: Criar o gráfico da função exponencial

Para resolver a equação exponencial, primeiro, vamos criar o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e pressione Enter:

Você verá o gráfico da função exponencial no plano cartesiano.

Passo 2: Definir a função constante

Para representar a constante do lado direito da equação (8), vamos criar uma função constante no GeoGebra. Digite g(x) = 8 a seguinte expressão na barra de entrada e pressione Enter.

Você verá uma linha horizontal no gráfico, representando a constante y=8.

Passo 3: Encontrar a interseção

Para resolver a equação $2^x = 8$ precisamos encontrar o ponto de interseção entre as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 8$.

Para fazer isso, digite o comando ***Intersect(f, g)*** na barra de entrada e pressione Enter.

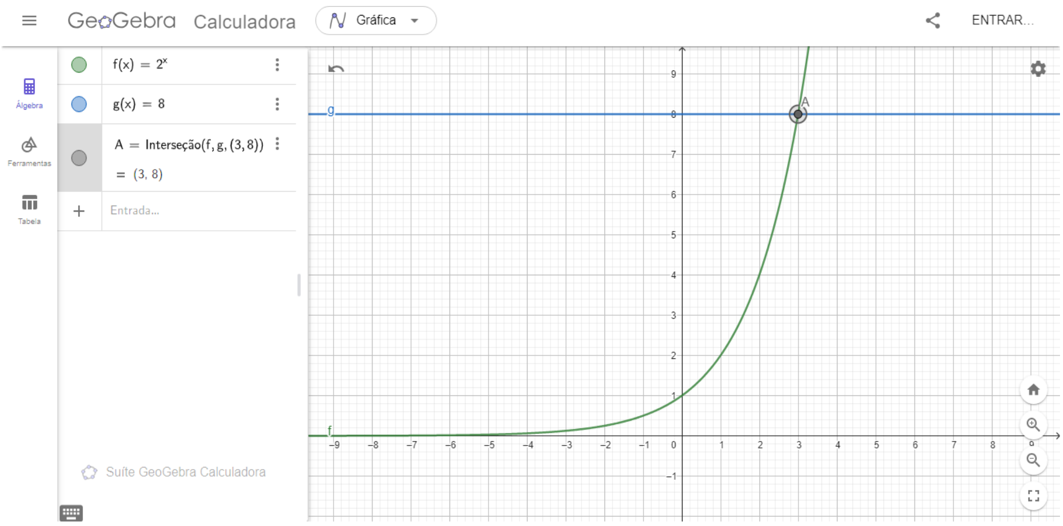
O GeoGebra calculará automaticamente o ponto de interseção entre as duas funções, que é a solução da equação exponencial.

Passo 4: Interpretar o resultado

Após o cálculo, o GeoGebra mostrará o ponto de interseção no gráfico dado na figura 5, que será o ponto onde a função exponencial 2^x assume o valor 8.

No caso dessa questão, a solução será exibida na forma de um ponto A(x,y), onde x é o valor da solução para a equação exponencial $2^x = 8$. Lembre-se de que a resolução analítica pode não ser sempre possível ou prática para algumas equações exponenciais mais complexas. Nesses casos, a abordagem gráfica pode ser uma alternativa útil.

Figura 5 – Interseção entre as duas funções



Fonte: Construída pelo autor

3.2 Função Logarítmica

1ª ATIVIDADE

Objetivo: Fazer com que compreendam que a função logarítmica é um tipo de função matemática que envolve o logaritmo de uma ou mais variáveis. O logaritmo é a operação inversa da exponenciação e é usado para responder à pergunta: "a que expoente eu devo elevar uma determinada base para obter um determinado número?" Em outras palavras, dado um número y, a função logarítmica nos fornece o expoente x que satisfaz a equação: $base^x = y$.

Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.

$$\log_b a = x \;\leftrightarrow\; b^x = a$$

Na sentença $\log_b a = x$;

• a é o **logaritmando;**

• b é a **base do logaritmo;**

• x é o **logaritmo de *a* na base *b*.**

É importante observar que:

1. A existência e unicidade de log, a é garantida pelas condições: $a > 0$, $b>0$ e $b \neq 1$. Ou seja, se alguma dessas restrições não for obedecida, não estará garantida a existência ou a unicidade do logaritmo. Por exemplo, de acordo com a definição:

• $\log_2(-4)$ deveria ser um único número x tal que $2^x = 4$, o que é impossível, pois qual- quer potência de base positiva é positiva.

• $\log_1 2$ deveria ser um único número x tal que $1^x = 2$, o que é impossível, pois qualquer potência de base 1 é igual a 1.

2ª ATIVIDADE

Objetivo: Compreender e dominar os conceitos trabalhados, os estudantes iram desenvolver habilidades matemáticas essenciais e que abrem portas para explorar campos mais avançados da matemática e suas aplicações práticas.

Indicamos:

Chama-se **função logarítmica** toda função $f: R_+^* \to R$ tal que $f(x) = \log_b x$, em que b é um número real, positivo e diferente de 1.

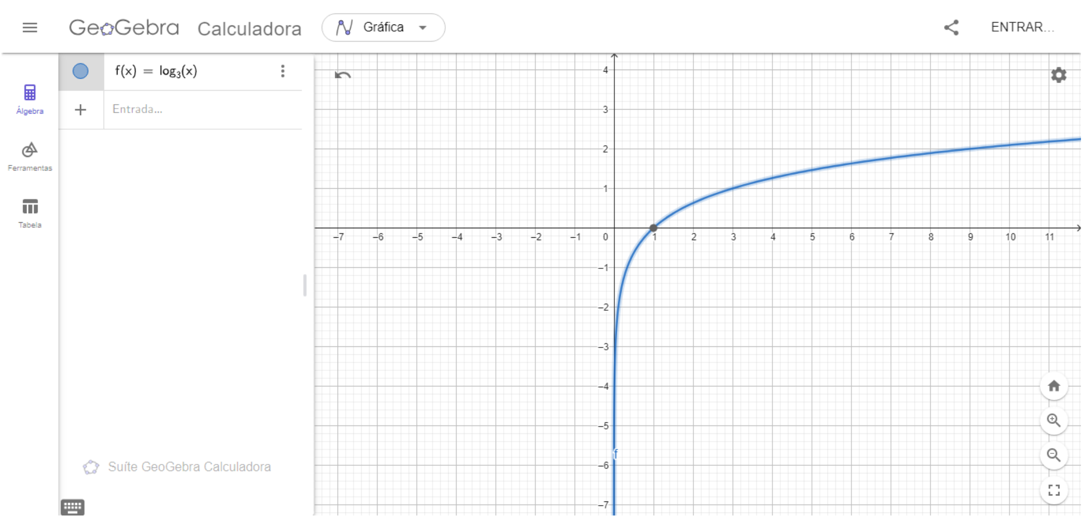
Propriedades da função logarítmica

P1. $\log_b x = \log_b y \leftrightarrow x = y$, para quaisquer números reais positivos x, y e b com $b \neq 1$.

P2. A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é **crescente** em todo seu domínio se, e somente se, b> 1.

Como pode ser visto na figura 6:

Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = log_3 x$



Fonte: Construída pelo autor

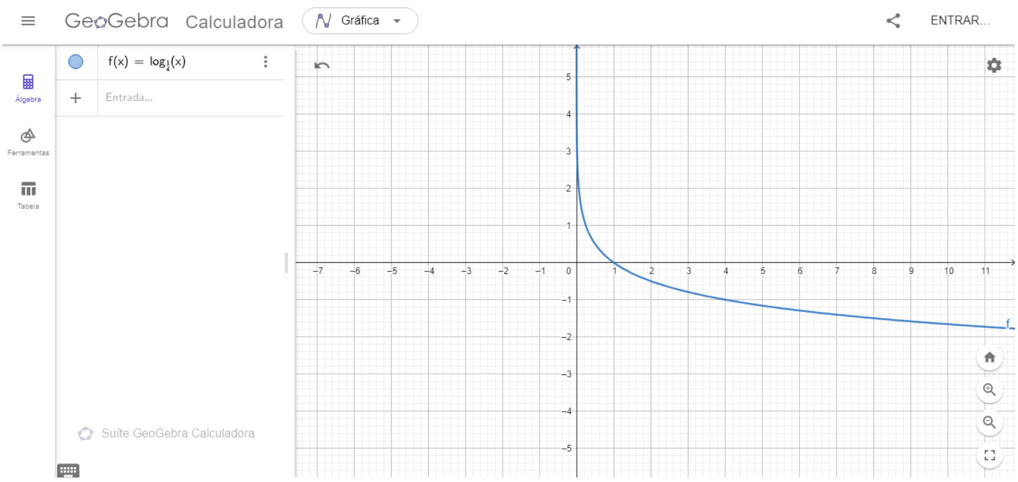
Tem-se, então:

$\log_b x_2 > \log_b x_1 \leftrightarrow x_2 > x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $b > 1$.

P3. A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é **decrescente** em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.

Como pode-se ver na figura 7:

Figura 7 – Gráfico da função $f(x) = log_{1/4}\, x$



Fonte: Construída pelo autor

Tem-se, então:

$\log_b x_2 < \log_b x_1 \leftrightarrow\ x_2 >\ x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $b < 1$.

3ª ATIVIDADE

Objetivo: Exercitar a correspondência biunívoca entre a função exponencial e a função logarítmica está relacionada ao fato de que elas são inversas uma da outra. Isso significa que, dada uma função exponencial e sua função logarítmica correspondente, aplicar uma delas após a outra resultará na identidade matemática.

Dado um número real b, positivo e diferente de 1, temos:

I. Para todo número real positivo x, existe um **único** número real **y** tal que $y = \log_b x$.
II. Para todo número real y existe um **único** real positivo x tal que $y = \log_b x$.

A condições (I) e (II) mostram que a função $y = \log_b x$ é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos R_+^* e R e, portanto, essa função admite inversa, que podemos encontrar substituindo x por y e y por x, obtendo:

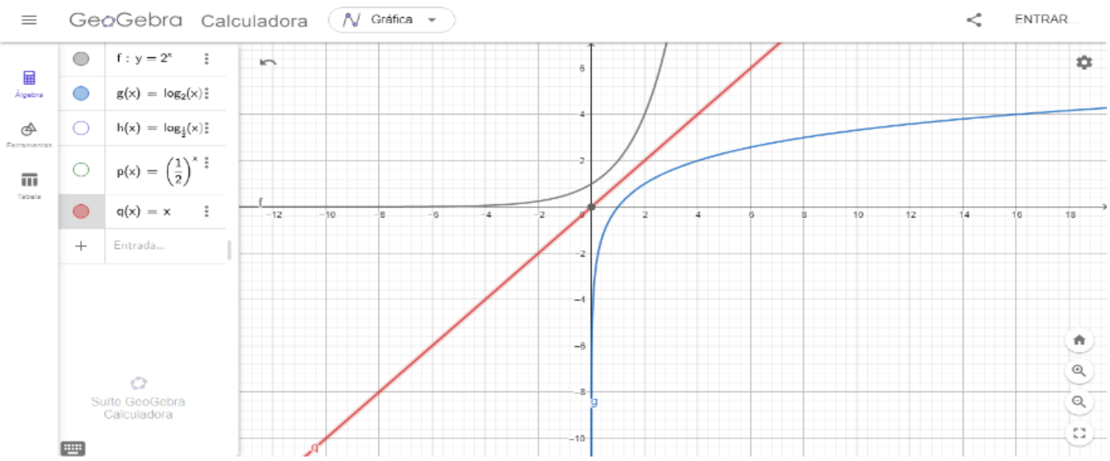
$$x = \log_b y$$

E, em seguida, isolamos a variável y, obtendo:

$$x = \log_b y \rightarrow y = b^x$$

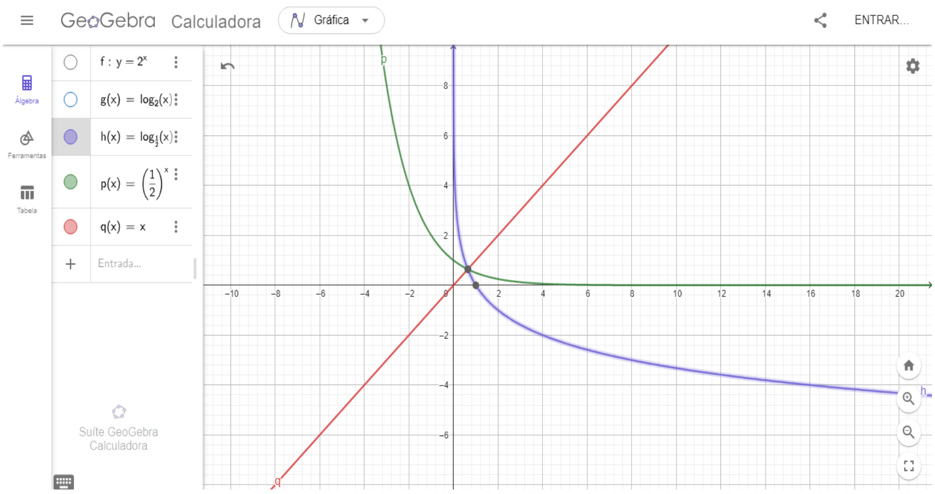
Façamos as seguintes observações depois que inseridas as funções no GeoGebra. Na figura 8, abaixo apresenta os gráficos das funções inversas $f(x) = \log_2 x$ e $f^{-1}(x) = 2^x$; e a figura 9, os gráficos das funções inversas $f(x) = \log_{1/2} x$ e $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Figura 9 – Gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $f^{-1}(x) = 2^x$



Fonte: Construída pelo autor

Figura 10 – Gráficos de $f(x) = log_{1/2}\, x\ e\ f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: Construída pelo autor

Note, em cada figura, a simetria dos gráficos em relação à reta *x*, bissetriz dos quadrantes ímpares.

4ª ATIVIDADE

Objetivo: Praticar que nas equações logarítmicas deve-se encontrar o valor desconhecido do argumento (ou variável) em uma expressão logarítmica. As equações logarítmicas são usadas para resolver problemas que envolvem crescimento e decaimento exponencial e também para simplificar cálculos.

Passo 1: Abra o GeoGebra

Inicie o GeoGebra em seu dispositivo. Após abrir, você verá a interface padrão com a área de trabalho e a barra de ferramentas.

Passo 2: Inserir a Equação

Na barra de entrada localizada na parte superior da área de trabalho, digite a equação logarítmica a ser resolvida. No nosso caso, digitaremos:

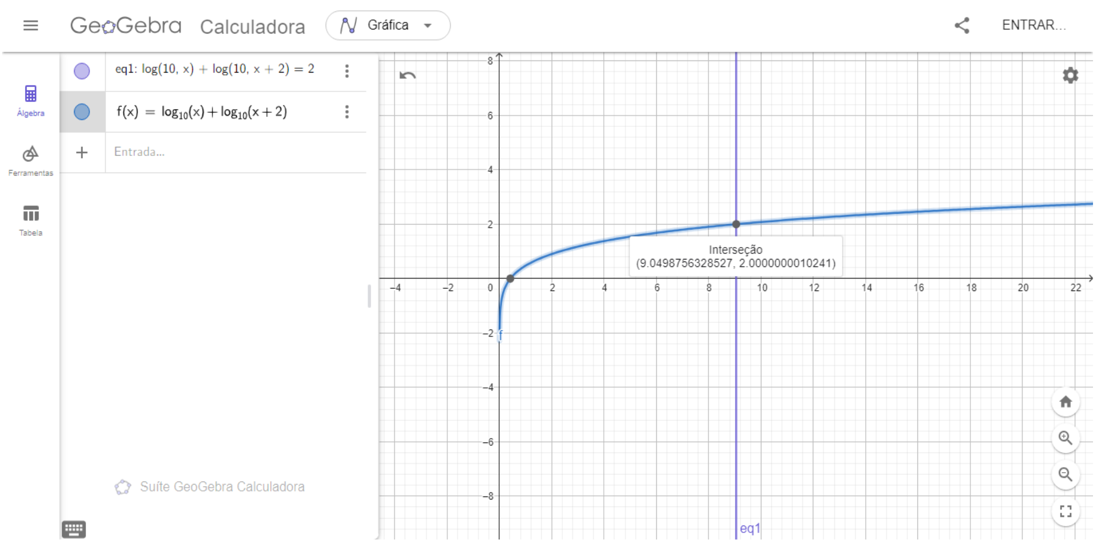
$\log x + \log(x - 2) = 2$

Pressione Enter após digitar a equação para que o GeoGebra processe a expressão.

Passo 3: Visualize a Solução

Após pressionar Enter, o GeoGebra mostrará automaticamente a equação no plano cartesiano. Depois insira a função logarítmica $\log x + \log(x - 2)$ e será exibido a interseção do gráfico da equação e da função que será a resposta, tal como na Figura 11.

Figura 11 – O gráfico da função logarítmica $log\, x + log(x - 2)$ e $log\, x + log(x - 2) = 2$



Fonte: Construída pelo autor

Passo 4: Localize as Soluções

Observe que a solução da equação logarítmica é representada graficamente pelas interseções da função com a linha horizontal *y=9*. Essas interseções representam os pontos onde $\log x + \log(x - 2)$ é igual a 2.

Passo 5: Interagir com a Solução

Agora que a solução está visível no gráfico, você pode interagir com ela. Por exemplo:

• Clique e arraste o gráfico para mover a visualização dos pontos de solução.

• Use a ferramenta "Pontos e Vetores" para clicar nos pontos de interseção e ver suas coordenadas exatas.

• Insira uma nova equação logarítmica na barra de entrada e pressione Enter para resolver outra equação.

Observação: A equação logarítmica que criamos é relativamente simples e pode ser resolvida graficamente. No entanto, para equações mais complexas, o GeoGebra pode ser usado para obter uma aproximação numérica da solução utilizando técnicas de iteração ou de gráficos.

Espero que esta demonstração tenha sido útil para mostrar como resolver uma equação logarítmica no GeoGebra. O GeoGebra é uma ferramenta poderosa para explorar conceitos matemáticos e resolver problemas de forma interativa.

4 Analise após a aplicação

Para conduzir as atividades relacionadas à sequência didática descrita na seção anterior, foram dedicados cinco períodos (horas-aula) com uma turma composta por 22 estudantes do 1º ano do Ensino Médio em um colégio da rede estadual do Maranhão. O processo teve início com a apresentação da sequência didática e a explicação sobre a razão pela qual um graduando de licenciatura em matemática ministraria algumas das aulas para o grupo.

As atividades ocorreram no ambiente do laboratório de informática da escola, garantindo assim que todos os alunos tivessem acesso a um computador para participar do processo. Após essa introdução, a primeira tarefa consistiu no preenchimento de um Questionário Inicial (ver Apêndice A), o qual foi completado pelos 22 alunos. Foi dito aos estudantes que não era necessário fornecer suas identificações no questionário.

Apresenta-se a síntese das respostas coletadas por meio do questionário.

A primeira indagação presente no questionário abordava a faixa etária dos estudantes da turma, a qual compreendia idades entre 15 e 17 anos.

Na segunda pergunta, indagou-se aos alunos sobre suas intenções de prestar vestibular e/ou ENEM, bem como os motivos subjacentes. Os alunos indicaram suas intenções de prestar os exames. Entre aqueles que se manifestaram, a maioria, expressou o desejo de ingressar no Ensino Superior como razão principal, enquanto três mencionaram a busca por oportunidades de emprego favoráveis no futuro como motivação para prestar os exames.

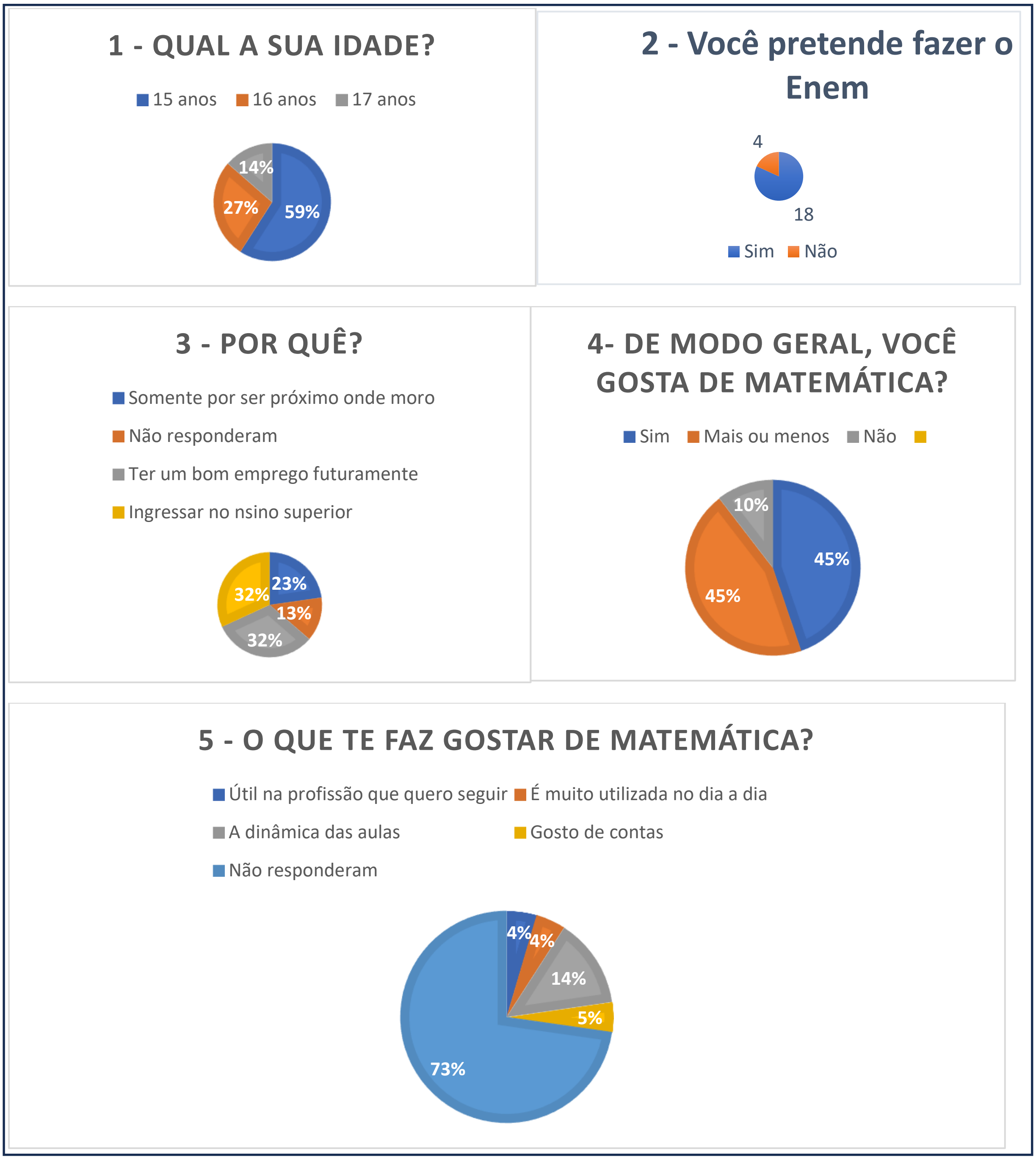
Na quarta pergunta, foi indagado aos alunos sobre seu nível de apreço pela disciplina de Matemática em termos gerais, e todos os estudantes responderam. Um total de dez alunos expressou seu apreço pela Matemática, dez afirmaram ter uma opinião "negativa" ou "mais ou menos" em relação à matéria, enquanto dois alunos relataram não gostar dela.

Quanto à quarta pergunta, que explorava os motivos por trás do gosto ou desgosto pela Matemática. Entre as razões mencionadas pelos que gostam da disciplina, sobressai a apreciação pelos cálculos. Por outro lado, entre os que não têm afinidade com a Matemática, destacam-se as menções à dificuldade na matéria e a simples falta de afinidade com cálculos.

As três últimas perguntas abordavam o nível de familiaridade dos alunos com o software GeoGebra. Todos os estudantes afirmaram não ter conhecimento prévio do GeoGebra e não terem utilizado o programa de forma independente. Além disso, foi mencionado que o GeoGebra nunca havia sido introduzido como parte das atividades em sala de aula.

Na Figura 12, encontram-se de maneira resumida as respostas dos estudantes ao Questionário Inicial.

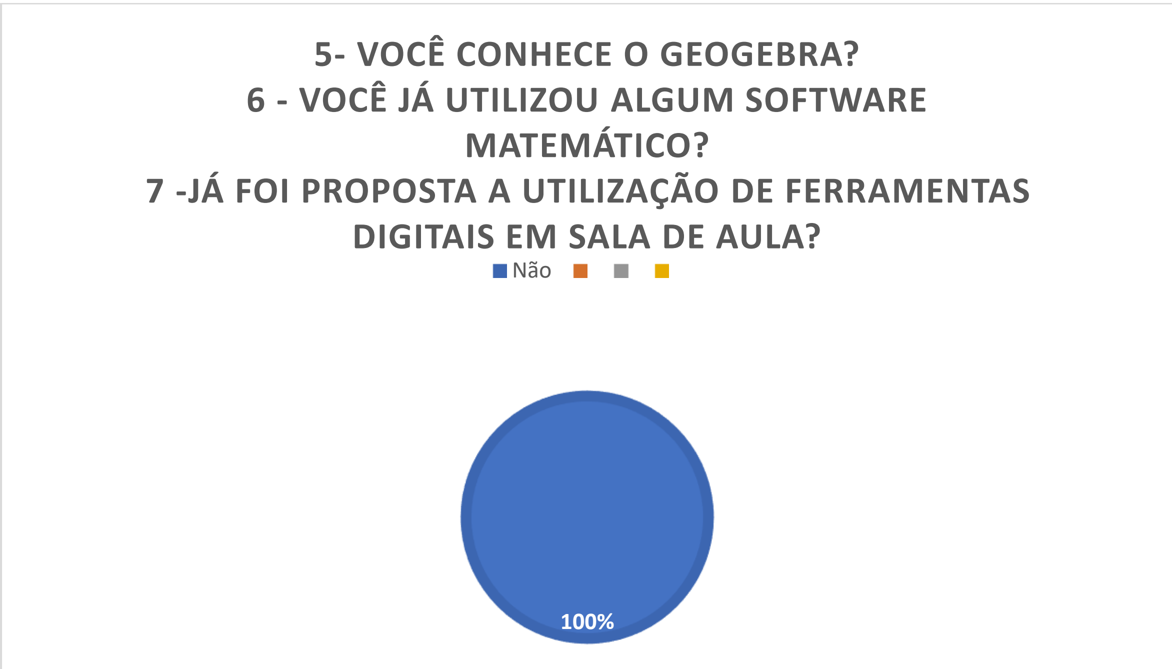
Figura 12 – Resumo das respostas do Questionário Inicial



Fonte: Elaborado pelo autor

Após a conclusão do questionário inicial, prosseguiu-se para a segunda etapa da atividade, cujo propósito era a apresentação do software de geometria dinâmica denominado GeoGebra (conforme demonstrado na Figura 13). Visto que nenhum dos alunos estava previamente familiarizado com o GeoGebra, todos demonstraram um alto nível de envolvimento e aderência aos objetivos propostos para a atividade. Eles se empenharam em explorar o software, fazendo perguntas e experimentando suas funcionalidades, incluindo a manipulação de janelas em duas e três dimensões, bem como a criação de uma variedade de elementos, tais como gráficos de funções, polígonos e poliedros. Com isso, a primeira aula foi concluída com sucesso.

Figura 13 – Resumo das outras respostas do Questionário Inicial



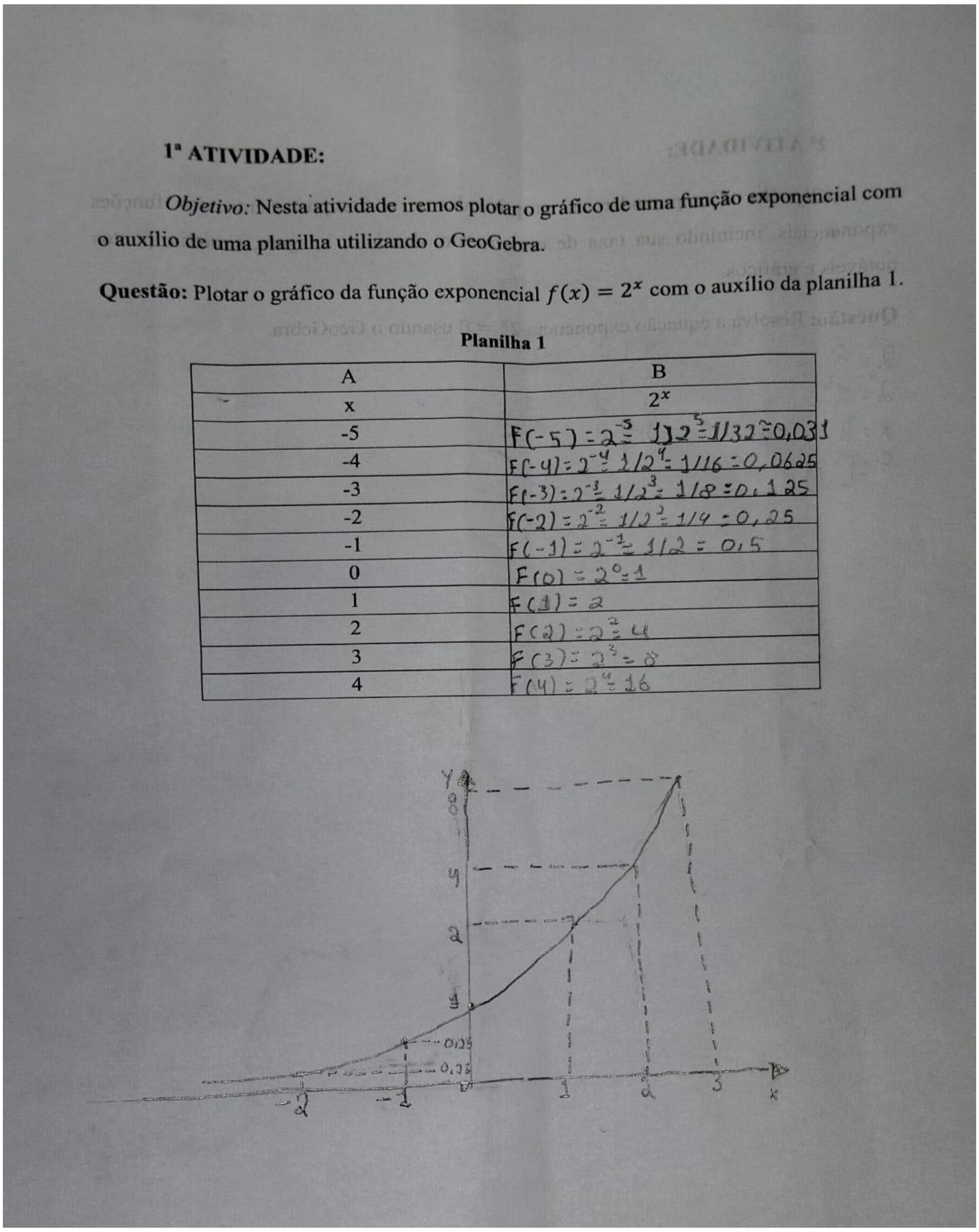
Fonte: Elaborado pelo autor

Em relação a aplicação das atividades 1ª, 2ª e 3ª da sequência didática referentes as funções exponenciais e logarítmicas foi feita uma aula de revisão da definição de função exponencial e suas propriedades conduzida de maneira interativa em sala de aula. Começou-se com uma introdução contextualizando a importância das funções exponenciais. Em seguida, revisitou-se a definição básica, destacando $f(x) = a^x$. As propriedades das funções exponenciais foram explicadas com exemplos práticos, incluindo multiplicação, divisão e leis dos expoentes. Os alunos resolveram exercícios e fizeram a resolução de questões nas folhas de atividades, como pode ser visto na figura 14.

A atividade no laboratório de matemática sobre a plotagem de gráficos de funções exponenciais e resolução de equações exponenciais no GeoGebra foi organizada de maneira abrangente. Os alunos foram orientados a se familiarizar com o software GeoGebra, recebendo instruções sobre suas principais ferramentas e recursos.

A fase prática da atividade começou com os alunos criando e plotando gráficos de funções exponenciais, experimentando diferentes valores de base *a* para compreender como ela afeta a forma do gráfico. Posteriormente, analisaram esses gráficos, identificando características importantes, como o crescimento ou decrescimento da função e pontos de interseção com os eixos *x* e *y*.

Figura 14 – Resolução feita por aluno da questão da primeira atividade



1ª ATIVIDADE:

Objetivo: Nesta atividade iremos plotar o gráfico de uma função exponencial com o auxílio de uma planilha utilizando o GeoGebra.

Questão: Plotar o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$ com o auxílio da planilha 1.

Planilha 1

A	B
x	2^x
-5	$F(-5) = 2^{-5} = 1/2^5 = 1/32 = 0{,}031$
-4	$F(-4) = 2^{-4} = 1/2^4 = 1/16 = 0{,}0625$
-3	$F(-3) = 2^{-3} = 1/2^3 = 1/8 = 0{,}125$
-2	$F(-2) = 2^{-2} = 1/2^2 = 1/4 = 0{,}25$
-1	$F(-1) = 2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$
0	$F(0) = 2^0 = 1$
1	$F(1) = 2$
2	$F(2) = 2^2 = 4$
3	$F(3) = 2^3 = 8$
4	$F(4) = 2^4 = 16$

Fonte: acervo do autor

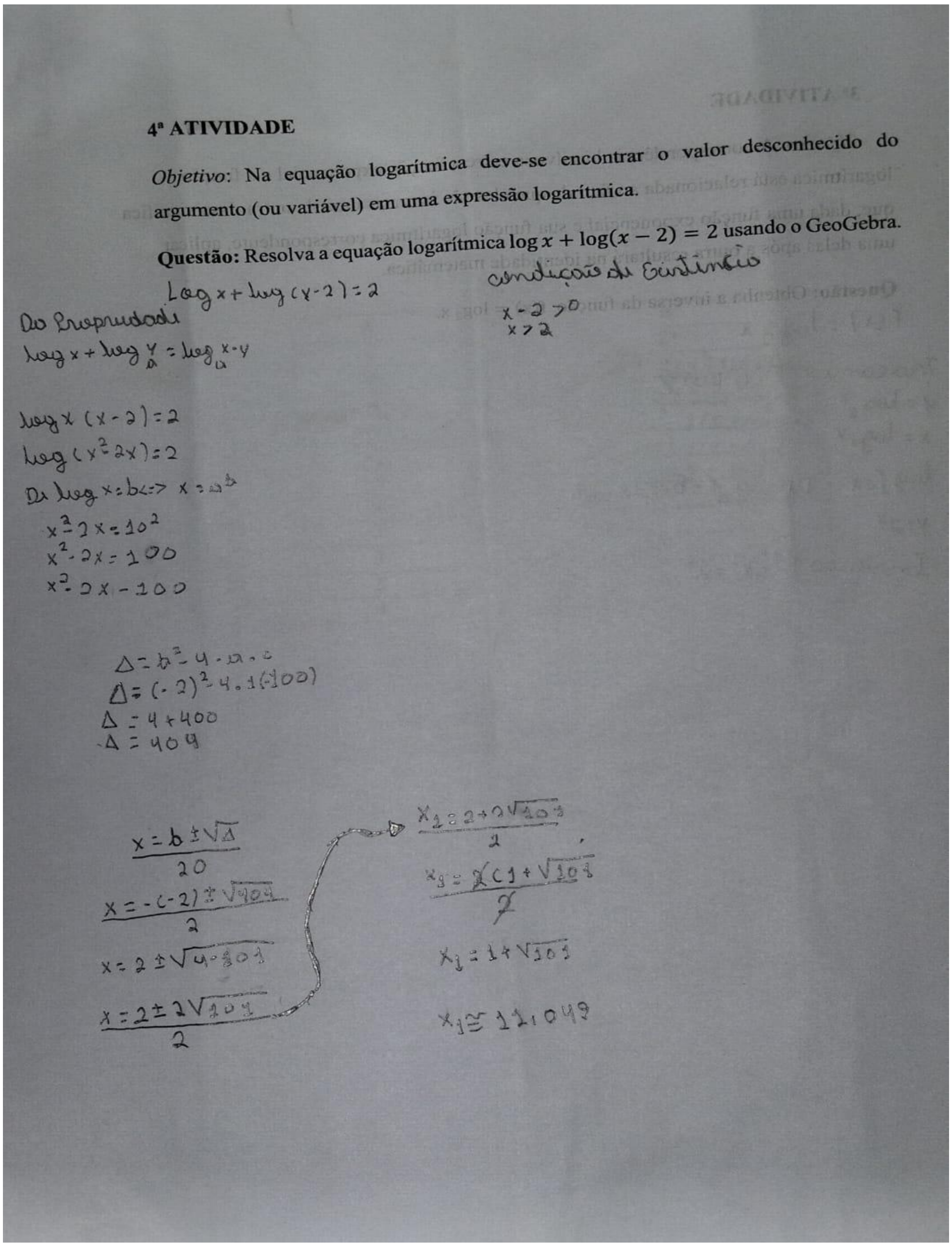
Na segunda parte da atividade, os alunos abordaram a resolução de equações exponenciais no GeoGebra. Eles criaram equações deste tipo e utilizaram as ferramentas do software para encontrar soluções numericamente, explorando diferentes equações e bases para observar variações nas soluções.

Após a fase prática, os alunos participaram de discussões em grupos, compartilhando suas descobertas e *insights* com a turma. O professor esteve disponível para esclarecer dúvidas e explicar conceitos mais complexos, se necessário. Finalmente, a atividade foi encerrada com os alunos tendo feito várias anotações em seus cadernos ao resolverem problemas relacionados à plotagem de gráficos e à resolução de equações no GeoGebra.

Essa abordagem combinou teoria e prática de maneira interativa, permitindo que os alunos aplicassem os conceitos de funções exponenciais de forma tangível e utilizassem o GeoGebra, para aprimorar sua compreensão. Além disso, o uso do software facilitou a visualização e a resolução de problemas relacionados a funções exponenciais e logarítmicas, tornando a aprendizagem mais envolvente e prática.

Foi explicado que as funções logarítmicas são usadas para entender relações exponenciais de maneira inversa. Logaritmo é uma operação que nos diz a que expoente uma base específica deve ser elevada para obter um número dado. Destacando a notação de logaritmo e suas propriedades, mostrou-se também como os gráficos das funções logarítmicas se comportam e como resolver equações logarítmicas. Na figura 15 pode-se ver a resposta feita por um aluno de uma equação logarítmica.

Figura 25 – Resolução feita por aluno da questão da atividade 4



4ª ATIVIDADE

Objetivo: Na equação logarítmica deve-se encontrar o valor desconhecido do argumento (ou variável) em uma expressão logarítmica.

Questão: Resolva a equação logarítmica $\log x + \log(x-2) = 2$ usando o GeoGebra.

Log x + log (x-2) = 2

condição de Existência

x - 2 > 0

x > 2

Da Propriedade

log x + log y = log x·y

log x (x-2) = 2

log (x² - 2x) = 2

Da log x = b <=> x = a^b

x² - 2x = 10²

x² - 2x = 100

x² - 2x - 100

Δ = b² - 4·a·c

Δ = (-2)² - 4·1·(-100)

Δ = 4 + 400

Δ = 404

x = (-b ± √Δ) / 2a

x = (-(-2) ± √404) / 2

x = 2 ± √(4·101)

x = (2 ± 2√101) / 2

x₁ = (2 + 2√101) / 2

x₁ = 2(1 + √101) / 2

x₁ = 1 + √101

x₁ ≅ 11,049

Fonte: acervo do autor

Já em relação a aplicação das atividades 4ª e 5ª referentes a sequência didática começou-se a aula no laboratório de matemática envolvendo a plotagem de funções logarítmicas no Geogebra. Explicou-se como inserir uma função logarítmica na forma $y = log_b(x)$, permitindo que os alunos experimentassem diferentes bases (b) e observassem instantaneamente as mudanças nos gráficos. Eles puderam interagir com o software, ajustando os parâmetros da função logarítmica e estudando como isso afetava a curvatura e a inclinação dos gráficos em relação à base.

Após explorar os gráficos, a aula passou para a resolução de equações logarítmicas. Demonstrou-se para os alunos como usar as ferramentas do Geogebra para resolver essas equações, isolando a variável e encontrando soluções precisas. Os alunos puderam praticar essa habilidade, verificando graficamente suas soluções e comparando-as com as soluções teóricas.

Durante toda a aula, sempre se encorajou a discussão em sala de aula, incentivando os alunos a compartilhar suas descobertas e dúvidas. Respondeu-se as perguntas e foi esclarecido os conceitos conforme surgiam.

A atividade no laboratório de matemática, usando o Geogebra para explorar funções exponenciais e logarítmicas, foi altamente eficaz. Os alunos se envolveram ativamente, visualizaram conceitos abstratos, resolveram equações em tempo real e participaram de discussões colaborativas. A aplicabilidade prática foi destacada, aumentando a relevância do conteúdo. Além disso, o uso do Geogebra fortaleceu a confiança dos alunos em suas habilidades matemáticas e os preparou para estudos futuros. Em resumo, essa abordagem prática enriqueceu o aprendizado e facilitou a compreensão desses conceitos matemáticos.

Figura 16 – Síntese das respostas do Questionário Final

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos desempenhos observados durante a implementação das tarefas propostas na sequência didática, ficou evidente que a incorporação do programa educacional GeoGebra se mostrou altamente eficaz, proporcionando uma experiência de aprendizado mais dinâmica e inspiradora para os estudantes ao longo da realização das atividades sugeridas.

5. Considerações Finais

Diante de um panorama cada vez mais tecnológico e de uma educação que precisa se adaptar rapidamente aos novos desafios, a utilização de recursos como o GeoGebra mostra-se promissora e eficiente no ensino de matemática. Neste Trabalho de Conclusão de Curso, foi realizada a implementação de uma sequência didática com o objetivo de auxiliar a compreensão e o domínio dos conceitos relacionados às funções exponenciais e logarítmicas por meio dessa ferramenta tecnológica.

Ao longo do estudo, foram observados resultados positivos quando da utilização do GeoGebra como um recurso complementar ao ensino dessas temáticas. Através da sequência didática elaborada, pudemos perceber que houve um maior envolvimento e interesse dos alunos na aprendizagem desses conceitos, uma vez que a interface do software oferece uma forma visual e interativa de explorar as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas.

Além disso, a utilização do GeoGebra proporcionou aos estudantes uma maior autonomia na construção do conhecimento, uma vez que eles puderam manipular as variáveis, fazer diferentes experimentações e explorar os gráficos, o que favoreceu uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos, isso está alinhado com o que Feitosa (2020) já havia trabalhado. Os alunos se sentiram mais motivados e engajados no processo de aprendizagem, pois puderam explorar as propriedades das funções em um ambiente virtual e visualmente estimulante.

A abordagem utilizada nesta pesquisa demonstrou sua efetividade, uma vez que foi possível identificar avanços significativos no desempenho dos estudantes na resolução de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. Eles conseguiram compreender as relações entre as funções, identificar suas propriedades e aplicá-las em contextos reais, evidenciando o impacto positivo da sequência didática aplicada.

Desta forma, concluímos que a utilização do GeoGebra, aliada a uma sequência didática bem elaborada, pode ser uma estratégia pedagógica eficiente para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas na primeira série do ensino médio. Essa ferramenta tecnológica permite uma maior interação entre estudantes, professores e conteúdos matemáticos, favorecendo a compreensão das propriedades das funções e a sua aplicação prática.

A partir dos resultados obtidos nesta pesquisa, recomendamos que o GeoGebra seja inserido de forma ainda mais sistemática e integrada no currículo escolar, a fim de oferecer aos estudantes uma experiência de aprendizado mais dinâmica, motivadora e significativa nas aulas de matemática. Além disso, sugerimos que novas pesquisas sejam realizadas, buscando aperfeiçoar e ampliar as possibilidades de utilização do GeoGebra como recurso didático e investigando seus impactos no aprendizado de outros conteúdos matemáticos.

Referências

BELLONI, M.L. A televisão como ferramenta pedagógica na formação de professores. Edição e Pesquisa, São Paulo, 2003.

CARNEIRO, Gabriele SIlva. Atividades investigativas com o Geogebra: contribuições de uma proposta para o ensino de matemática. 2013. Dissertação de Mestrado.

COSTA, Ivana Paula Lira da. A utilização do software Geogebra como ferramenta didática no processo de ensino e aprendizagem: uma aplicação para alunos e professores da rede pública de ensino. 2017. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará.

CROZETTA, Clademir Kaique. A formação de professores de matemática com tecnologias digitais na educação básica: propostas e discussões após 2020.

DOMINGOS, António Manuel Dias. Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A matemática no início do superior. 2003.

DOS SANTOS FERREIRA, Rodrigo; DA COSTA, André Pereira. Função exponencial e GeoGebra: o que vem sendo discutido na literatura brasileira? Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 10, n. 1, p. 108-128, 2021.

FEITOSA, Murilo Carvalho et al. O uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino de funções inversas e logarítmicas. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 2, p. e2003-e2003, 2020.

LOURENÇO, M. L. A Demonstração com Informática Aplicada à Educação. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 100-111, set. 2002.

MORAES, Maria Cândida. Pensamento ecossistêmico educação, aprendizagem e cidadania. EDUCAÇÃO TRANSDISCIPLINAR, p. 13, 2020.

PÁDUA, M. C. D. Utilizando o Software Geogebra como ferramenta auxiliar no ensino de função afim e função quadrática. 2010.

PERES, Emile Delfina. O uso do software educacional Geogebra na aprendizagem da Matemática. 2022.

RODRIGUES, Cristiano Santini. Aplicações das funções exponenciais e logarítmicas. 2021.

SEGURADO, Irene; DA PONTE, João Pedro. Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. Quadrante, v. 7, n. 2, p. 5-40, 1998.

APÊNDICE A – Questionário Inicial

Questionário Inicial
1 - Qual a sua idade? ( ) 15 anos ( ) 16 anos ( ) 17 anos
2 - Você pretende fazer o Enem? ( ) Sim ( ) Não
3 - Por quê? ( ) Somente por ser próximo onde moro ( ) Não responderam ( ) Ter um bom emprego futuramente ( ) Ingressar no Ensino Superior
4- De modo geral, você gosta de Matemática? ( ) Sim ( ) Mais ou menos ( ) Não
5 - O que te faz gostar de Matemática? ( ) Útil na profissão que eu quero seguir ( ) A dinâmica nas aulas ( ) Não responderam ( ) É muito utilizada no dia a dia ( ) Gosto de contas

6 - O que faz você não gostar de Matemática? ( ) Não tem relação com o que pretendo trabalhar ( ) Inútil ( ) Difícil ( ) Não responderam

5- Você conhece o GeoGebra? ( ) Sim ( ) Não
6 - Você já utilizou algum software matemático? ( ) Sim ( ) Não
7 -Já foi proposta a utilização de ferramentas digitais em sala de aula? ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE B – Questionário Final

Questionário Final
1 - COMO VOCÊ AVALIA O TRABALHO SOBRE AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS? ( ) Muito interessante ( ) Pouco interessante ( ) Não gostei
2- VOCÊ ACHA QUE O GEOGEBRA AJUDOU A COMPREENDER O ASSUNTO? ( ) Sim ( ) Não
3 - QUAL A SUA OPINIÃO SOBRE O TRABALHO FEITO NO LABORATÓRIO? ( ) Interessante aprender com o GeoGebra ( ) Diferente, me fez pensar em possibilidades de estudar matemática ( ) Apesar de não usarmos computador como ferrementa vimos que pode ser muito útil ( ) Não entendi o que era para fazer

APÊNDICE C – Sequência didática

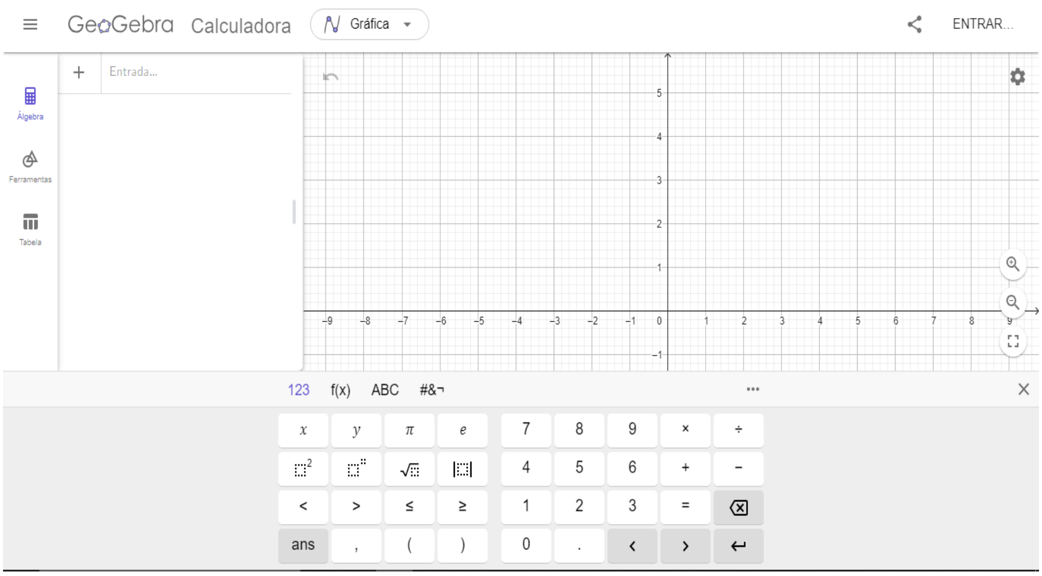
Função Exponencial

1ª ATIVIDADE:

Objetivo: Conhecer o software GeoGebra.

No início do processo, a atenção é direcionada para os comandos fundamentais, como Ponto, Segmento de Reta, Reta Perpendicular, Gráficos e a inserção de valores. O objetivo é esclarecer aos alunos o propósito e o uso adequado de cada comando, além de guiar a construção dos objetos correspondentes. Importante mencionar o aproveitamento das duas formas de visualização disponíveis para cada objeto construído, ou seja, tanto nas janelas de álgebra quanto nas de geometria.

Figura 1 – Tela do GeoGebra



Após abordar os comandos da interface de geometria, o é direcionado para o campo de entrada, onde os alunos podem explorar a construção de objetos digitando os comandos. Em seguida, o próximo passo consiste na introdução dos controles deslizantes, com explicações detalhadas sobre como funcionam e sua relevância nas atividades propostas.

2ª ATIVIDADE:

Objetivo: Relembrar a definição de função exponencial e suas propriedades.

Considerando uma função matemática amplamente estudada e utilizada em diversas áreas, temos uma expressão que envolve a base elevada a um determinado expoente. Essa função apresenta propriedades especiais e é de grande importância em muitos contextos. No entanto, é essencial salientar que seu estudo e aplicação exigem uma compreensão sólida da matemática, especialmente dos conceitos de potenciação e das propriedades dos expoentes.

Chama-se **função exponencial** toda função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_{+}^{*}$, tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$, com $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}_{+}^{*}$ e $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$.

Propriedades da função exponencial

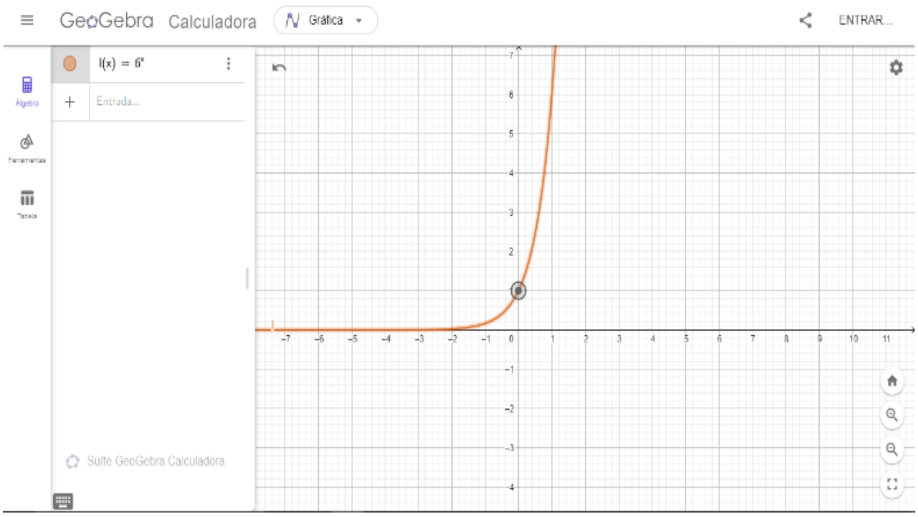
P1. Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que: $a^x = a^y \leftrightarrow x = y$

A propriedade P1 decorre do fato de a função exponencial ser uma correspondência biunívoca.

P2. A função exponencial $f(x) = a^x$ é **crescente** em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$

Como no gráfico da figura 2:

Figura 2 – Gráfico de $f(x) = 6^x$ no GeoGebra



Tem-se, então $a^{x_2} > a^{x_1} \leftrightarrow x_2 > x_1$, para qualquer a real maior que 1.

P3. A função exponencial $f(x) = a^x$ é **decrescente** em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$.

Observe o gráfico da figura 3:

Figura 3 – Gráfico de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ no GeoGebra

:

Tem-se, então $a^{x_2} > a^{x_1} \leftrightarrow x_2 < x_1$, para qualquer a real com $0 < a < 1$.

3ª ATIVIDADE:

Objetivo: Nesta atividade iremos plotar o gráfico de uma função exponencial com o auxílio de uma planinha utilizando o GeoGebra.

Questão: Vamos plotar o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$

Passo 1: Abra o GeoGebra e crie uma nova janela de planilha e uma nova janela de gráficos.

Passo 2: Na planilha 1, insira os valores para x e, em uma coluna ao lado, calcule os valores correspondentes para $f(x) = 2^x$. Por exemplo, você pode usar os valores de x de -5 a 5 (ou quaisquer outros valores que desejar).

Planilha 1 – Valores correspondentes.

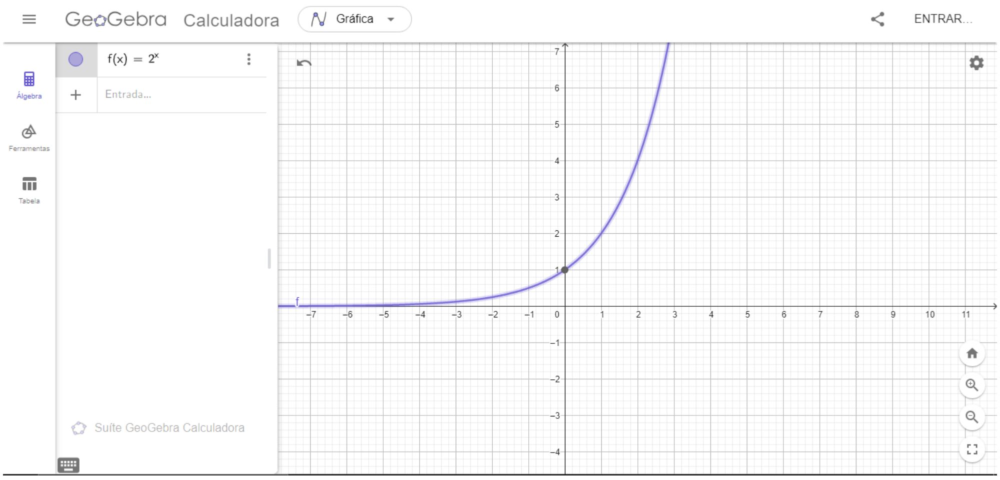
A	B
x	2^x
-5	
-4	
-3	
-2	

-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Passo 3: Selecione os valores de f(x) na coluna B e, em seguida, clique na janela de gráficos.

Passo 4: Com os valores selecionados, clique no ícone "Gráfico de Dispersão" na barra de ferramentas da janela de gráficos. O gráfico na figura 4 da função exponencial $f(x) = 2^x$ será plotado.

Figura 4 – Gráfico de $f(x) = 6^x$ no GeoGebra



Observação: Pode-se usar a função exponencial do GeoGebra diretamente no campo de entrada da janela de gráficos. Basta digitar a expressão "2^x" no campo de entrada e pressionar Enter. O GeoGebra irá plotar automaticamente o gráfico da função exponencial.

4ª ATIVIDADE:

Objetivo: Equações exponenciais estão intimamente ligadas a gráficos exponenciais. Aprender sobre essas equações ajuda a interpretar gráficos de forma mais profunda, permitindo que se compreenda melhor a tendência dos dados e identifique comportamentos específicos, como taxas de crescimento ou decaimento.

A equação exponencial se caracteriza pela presença da incógnita no expoente. Para resolver essas equações, além das propriedades das potências utiliza-se a seguinte propriedade:

Se duas potências são iguais, tendo as bases iguais, então os expoentes são iguais:

$$a^m = a^n \leftrightarrow m = n, \text{ para } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

5ª ATIVIDADE:

Objetivo: Compreender as propriedades e o comportamento das funções exponenciais, incluindo sua taxa de crescimento, domínio, imagem, simetria, pontos notáveis e gráficos.

Questão: Resolva a equação exponencia $2^x = 8$ usando o GeoGebra.

Passo 1: Criar o gráfico da função exponencial

Para resolver a equação exponencial, primeiro, vamos criar o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e pressione Enter:

Você verá o gráfico da função exponencial no plano cartesiano.

Passo 2: Definir a função constante

Para representar a constante do lado direito da equação (8), vamos criar uma função constante no GeoGebra. Digite g(x) = 8 a seguinte expressão na barra de entrada e pressione Enter.

Você verá uma linha horizontal no gráfico, representando a constante y=8.

Passo 3: Encontrar a interseção

Para resolver a equação $2^x = 8$ precisamos encontrar o ponto de interseção entre as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 8$.

Para fazer isso, digite o comando ***Intersect(f, g)*** na barra de entrada e pressione Enter.

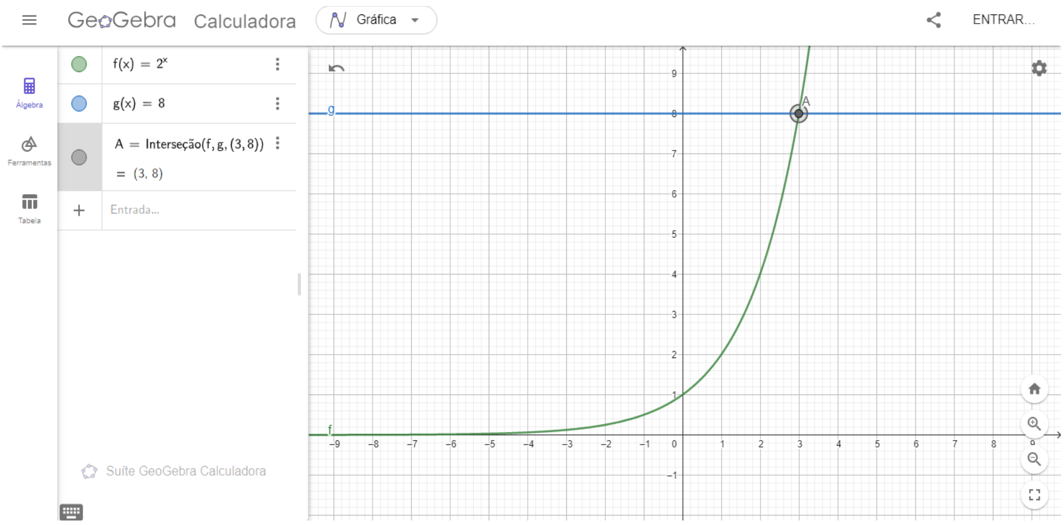
O GeoGebra calculará automaticamente o ponto de interseção entre as duas funções, que é a solução da equação exponencial.

Passo 4: Interpretar o resultado

Após o cálculo, o GeoGebra mostrará o ponto de interseção no gráfico dado na figura 5, que será o ponto onde a função exponencial 2^x assume o valor 8.

No caso dessa questão, a solução será exibida na forma de um ponto A(x,y), onde x é o valor da solução para a equação exponencial $2^x = 8$. Lembre-se de que a resolução analítica pode não ser sempre possível ou prática para algumas equações exponenciais mais complexas. Nesses casos, a abordagem gráfica pode ser uma alternativa útil.

Figura 5 – Interseção entre as duas funções.



7 Função Logarítmica

1ª ATIVIDADE

Objetivo: Fazer com que compreendam que a função logarítmica é um tipo de função matemática que envolve o logaritmo de uma ou mais variáveis. O logaritmo é a operação inversa da exponenciação e é usado para responder à pergunta: "a que expoente eu devo elevar uma determinada base para obter um determinado número?" Em outras palavras, dado um número y, a função logarítmica nos fornece o expoente x que satisfaz a equação: $base^x = y$.

Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.

$$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

Na sentença $\log_b a = x$;

• *a* é o **logaritmando;**

• *b* é a **base do logaritmo;**

• *x* é o **logaritmo de *a* na base *b*.**

É importante observar que:

1. A existência e unicidade de log, *a* é garantida pelas condições: *a* > 0, *b*>0 e *b*≠1. Ou seja, se alguma dessas restrições não for obedecida, não estará garantida a existência ou a unicidade do logaritmo. Por exemplo, de acordo com a definição:

• $\log_2(-4)$ deveria ser um único número *x* tal que $2^x = 4$, o que é impossível, pois qual- quer potência de base positiva é positiva.

• $\log_1 2$ deveria ser um único número *x* tal que $1^x = 2$, o que é impossível, pois qualquer potência de base 1 é igual a 1.

2ª ATIVIDADE

Objetivo: Ao compreender e dominar esses conceitos, os estudantes desenvolvem habilidades matemáticas essenciais e abrem portas para explorar campos mais avançados da matemática e suas aplicações práticas.

Indicamos:

Chama-se **função logarítmica** toda função $f: R_+^* \to R$ tal que $f(x) = \log_b x$, em que *b* é um número real, positivo e diferente de 1.

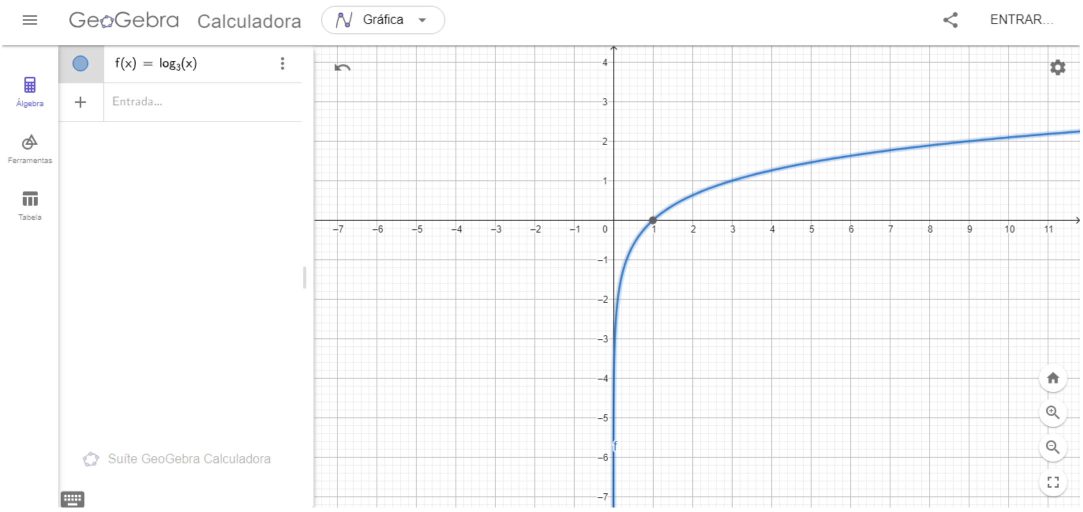
Propriedades da função logarítmica

P1. $\log_b x = \log_b y \leftrightarrow x = y$, para quaisquer números reais positivos *x*, *y* e *b* com *b*≠ 1.

P2. A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é **crescente** em todo seu domínio se, e somente se, b> 1.

Como pode ser visto na figura 6:

Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = log_3 x$.



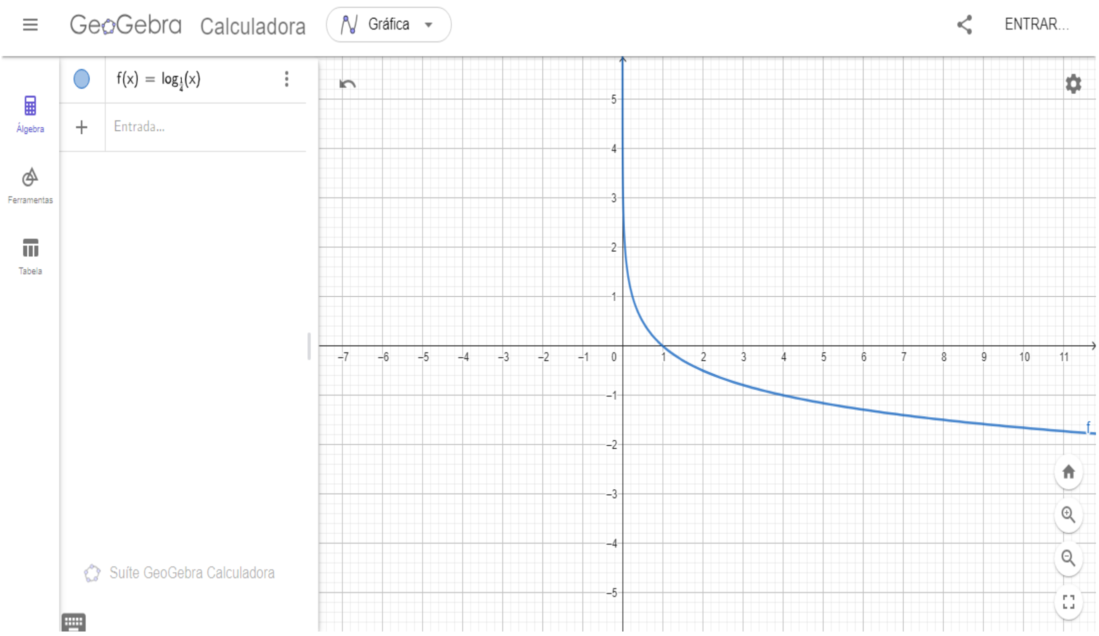
Tem-se, então:

$\log_b x_2 > \log_b x_1 \leftrightarrow x_2 > x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $b > 1$.

P3. A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é **decrescente** em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.

Como pode-se ver na figura 7:

Figura 7 – Gráfico da função $f(x) = log_{1/4} x$.



Tem-se, então:

$\log_b x_2 < \log_b x_1 \leftrightarrow x_2 > x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com b < 1.

3ª ATIVIDADE

Objetivo: A correspondência biunívoca entre a função exponencial e a função logarítmica está relacionada ao fato de que elas são inversas uma da outra. Isso significa que, dada uma função exponencial e sua função logarítmica correspondente, aplicar uma delas após a outra resultará na identidade matemática.

Dado um número real *b*, positivo e diferente de 1, temos:

I. Para todo número real positivo *x*, existe um **único** número real **y** tal que $y = \log_b x$.
II. Para todo número real *y* existe um **único** real positivo *x* tal que $y = \log_b x$.

A condições (I) e (II) mostram que a função $y = \log_b x$ é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos R_+^* e R e, portanto, essa função admite inversa, que podemos encontrar substituindo *x* por *y* e *y* por *x*, obtendo:

$$x = \log_b y$$

E, em seguida, isolamos a variável y, obtendo:

$$x = \log_b y \rightarrow y = b^x$$

Façamos as seguintes observações depois que inseridas as funções no GeoGebra. Na figura 8, abaixo apresenta os gráficos das funções inversas $f(x) = \log_2 x$ e $f^{-1}(x) = 2^x$; e a figura 9, os gráficos das funções inversas $f(x) = \log_{1/2} x$ e $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Figura 9 – Gráficos de $\mathrm{f(x) = log_2\,x}$ e $\mathrm{f^{-1}(x) = 2^x}$.

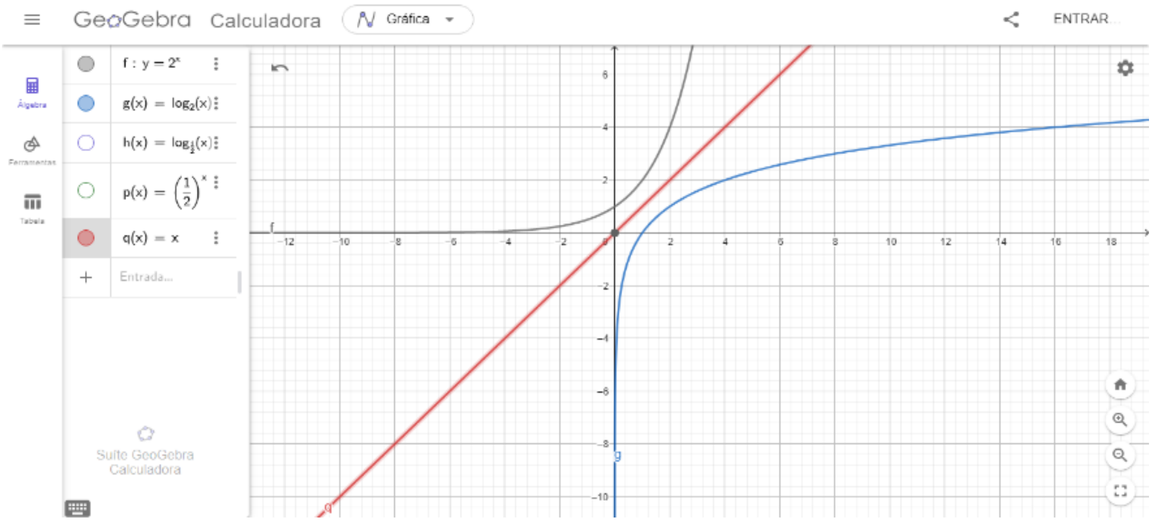
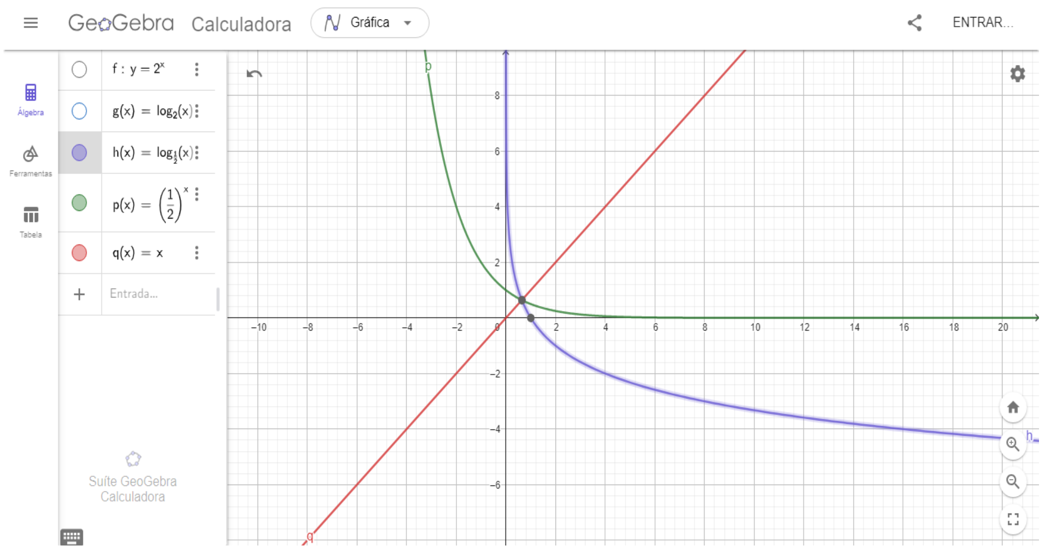


Figura 10 – Gráficos de $f(x) = log_{1/2}\,x\ e\ f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Note, em cada figura, a simetria dos gráficos em relação à reta *x*, bissetriz dos quadrantes ímpares.

4ª ATIVIDADE

Objetivo: Na equação logarítmica deve-se encontrar o valor desconhecido do argumento (ou variável) em uma expressão logarítmica. As equações logarítmicas são usadas para resolver problemas que envolvem crescimento e decaimento exponencial e também para simplificar cálculos.

Passo 1: Abra o GeoGebra

Inicie o GeoGebra em seu dispositivo. Após abrir, você verá a interface padrão com a área de trabalho e a barra de ferramentas.

Passo 2: Inserir a Equação

Na barra de entrada localizada na parte superior da área de trabalho, digite a equação logarítmica a ser resolvida. No nosso caso, digitaremos:

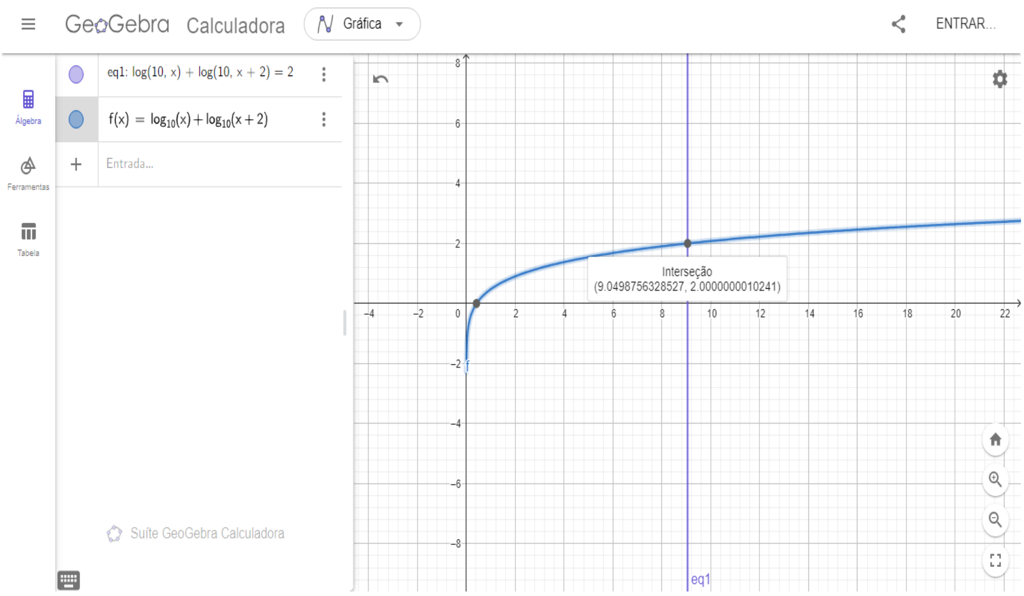
$$\log x + \log(x-2) = 2$$

Pressione Enter após digitar a equação para que o GeoGebra processe a expressão.

Passo 3: Visualize a Solução

Após pressionar Enter, o GeoGebra mostrará automaticamente a equação no plano cartesiano. Depois insira a função logarítmica $\log x + \log(x-2)$ e será exibido a interseção do gráfico da equação e da função que será a resposta, tal como na Figura 11.

Figura 11 – O gráfico da função logarítmica $log\, x + log(x-2)$ e $log\, x + log(x-2) = 2$.



Passo 4: Localize as Soluções

Observe que a solução da equação logarítmica é representada graficamente pelas interseções da função com a linha horizontal *y=9*. Essas interseções representam os pontos onde $\log x + \log(x - 2)$ é igual a 2.

Passo 5: Interagir com a Solução

Agora que a solução está visível no gráfico, você pode interagir com ela. Por exemplo:

• Clique e arraste o gráfico para mover a visualização dos pontos de solução.

• Use a ferramenta "Pontos e Vetores" para clicar nos pontos de interseção e ver suas coordenadas exatas.

• Insira uma nova equação logarítmica na barra de entrada e pressione Enter para resolver outra equação.

Observação: A equação logarítmica que criamos é relativamente simples e pode ser resolvida graficamente. No entanto, para equações mais complexas, o GeoGebra pode ser usado para obter uma aproximação numérica da solução utilizando técnicas de iteração ou de gráficos.

Espero que esta demonstração tenha sido útil para mostrar como resolver uma equação logarítmica no GeoGebra. O GeoGebra é uma ferramenta poderosa para explorar conceitos matemáticos e resolver problemas de forma interativa.