

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, NATURAIS E TECNOLÓGICAS - CCENT
LICENCIATURA EM FÍSICA

**Descrição Quântica da Luz e da Interação
Luz–Matéria: Uma Introdução à Óptica Quântica**

Beatriz Silva Sousa

Imperatriz - MA, 2026

Beatriz Silva Sousa

Descrição Quântica da Luz e da Interação Luz–Matéria: Uma Introdução à Óptica Quântica

Monografia apresentada ao curso Licenciatura em Física do Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Gisele Bosso de Freitas

SOUSA, Beatriz Silva.

Descrição Quântica da Luz e da Interação Luz–Matéria: Uma Introdução à Óptica Quântica / Beatriz Silva Sousa. - Imperatriz, Maranhão, 2026.

31 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientadora: Prof. Dra. Gisele Bosso de Freitas.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL), Imperatriz, 2026.

1. Interação luz-matéria. 2. Emissão estimulada. 3. Coerência quântica. 4. Mecânica quântica. I. Freitas, Gisele Bosso de. II. Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão.

CCENT- Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Física intitulado **Descrição Quântica da Luz e da Interação Luz–Matéria: Uma Introdução à Óptica Quântica** de autoria de Beatriz Silva Sousa, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Profa. Dra Gisele Bosso de Freitas
Orientadora

Prof. Dr. Wemerson de Carvalho Gonçalves
Universidade Estadual da Região Tocantina do
Maranhão

Prof. Me. Gabriel Fernandez Ferrari Melo
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Imperatriz - MA, 2026

Dedicatória

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, que me capacitou para chegar até aqui, e a todos que caminharam comigo ao longo desta jornada, especialmente à minha família, aos meus professores e aos meus amigos, cujo apoio, incentivo e confiança foram fundamentais para esta conquista.

Estendo esta dedicatória àqueles que tiveram seus sonhos interrompidos pelas dificuldades e desigualdades da vida. Que esta conquista seja uma prova de que a persistência e o conhecimento podem abrir caminhos mesmo diante das maiores dificuldades.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por me conceder força, sabedoria e coragem para superar os desafios encontrados ao longo desta caminhada.

À minha família, em especial às minhas mães, Rosângela e Maria de Fátima, por nunca terem deixado faltar nada e por sempre fazerem o possível e o impossível para que eu pudesse alcançar meus objetivos. Todo o amor, apoio e dedicação de vocês foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

À família acadêmica que construí durante esses anos, agradeço pela amizade, companheirismo e por tudo o que compartilhamos. Levo comigo memórias, aprendizados e momentos que marcarão minha vida para sempre.

À minha orientadora, professora Dra. Gisele Bosso de Freitas, por todo o apoio, paciência, dedicação e compromisso ao longo desta trajetória. Agradeço pela confiança depositada em mim, pelos valiosos conselhos, pela disposição em compartilhar seus conhecimentos e por me guiar nos momentos de dúvida.

Agradeço ao Gabriel, que acompanhou este trabalho com dedicação, generosidade intelectual e disponibilidade constante. Sua contribuição foi determinante para o desenvolvimento desta pesquisa, e sua presença ao longo desse processo fez toda a diferença.

Ao professor Dr. Wemerson de Carvalho Gonçalves, pelos ensinamentos, pelas conversas, pelas brincadeiras e por todos os momentos de descontração ao longo desses anos. Obrigada por sempre acreditar no meu potencial, pelos conselhos e pelo incentivo em diferentes momentos da minha trajetória. Sempre Rubro-Negro!

Registro aqui meu reconhecimento e gratidão a todos os demais docentes que contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal, seja por meio das aulas, das discussões ou das experiências compartilhadas.

Aos meus amigos e colegas, em particular, ao meu amigo Ramon, por todas as vezes em que não desistimos um do outro, mesmo diante das dificuldades e do desgaste que enfrentamos. Seu apoio e amizade foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Ao meu amor, por todo o incentivo, compreensão e paciência nos momentos mais difíceis. Obrigada por estar ao meu lado e por acreditar em mim mesmo quando eu duvidei das minhas próprias capacidades.

Por fim, deixo registrado meu sincero agradecimento a todos que, de maneira direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho e para a minha formação acadêmica e pessoal.

"O medo sempre me guiou para o que eu quero; e, porque eu quero, temo. Muitas vezes foi o medo quem me tomou pela mão e me levou. O medo me leva ao perigo. E tudo o que eu amo é arriscado."

Clarice Lispector
A descoberta do mundo. Rio de Janeiro: Rocco, 1999.

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução à descrição quântica da luz e da interação luz-matéria, fundamentada nos princípios da Mecânica Quântica e da Óptica Quântica. Inicialmente, são revisados os postulados da Mecânica Quântica, com ênfase nos sistemas de dois níveis e nos sistemas compostos, que constituem modelos fundamentais para o estudo da interação entre átomos e radiação eletromagnética. Em seguida, desenvolve-se a teoria de perturbações dependentes do tempo, introduzindo a representação de interação, a série de Dyson e a Regra de Ouro de Fermi, ferramentas essenciais para a análise de processos de transição quântica induzidos por campos externos. Posteriormente, é apresentada a quantização do campo eletromagnético, destacando-se a descrição dos modos do campo e a importância dos estados coerentes na caracterização quântica da radiação. A partir desses conceitos, é derivado e analisado o modelo de Jaynes-Cummings, um dos principais modelos da Óptica Quântica para descrever a interação entre um sistema de dois níveis e um único modo quantizado do campo eletromagnético. São investigadas as oscilações de Rabi, bem como os fenômenos de colapso e ressurgimento das oscilações atômicas quando o campo se encontra em um estado coerente. Por fim, são apresentados resultados numéricos que ilustram a dinâmica temporal do sistema e permitem interpretar os principais fenômenos físicos previstos pelo modelo. O texto fornece uma visão integrada dos conceitos fundamentais da interação luz-matéria.

Palavras-chave: Sistemas de dois níveis; Quantização do campo eletromagnético; Estados coerentes; Oscilações de Rabi; Modelo de Jaynes-Cummings.

Abstract

This work presents an introduction to the quantum description of light and light–matter interaction, grounded in the principles of Quantum Mechanics and Quantum Optics. Initially, the postulates of Quantum Mechanics are reviewed, with an emphasis on two-level systems and composite systems, which constitute fundamental models for studying the interaction between atoms and electromagnetic radiation. Subsequently, time-dependent perturbation theory is developed, introducing the interaction picture, the Dyson series, and Fermi’s Golden Rule—essential tools for analyzing quantum transition processes induced by external fields. Following this, the quantization of the electromagnetic field is presented, highlighting the description of field modes and the significance of coherent states in the quantum characterization of radiation. Based on these concepts, the Jaynes–Cummings model is derived and analyzed, standing as one of the primary models in Quantum Optics for describing the interaction between a two-level system and a single quantized mode of the electromagnetic field. Rabi oscillations are investigated, alongside the phenomena of collapse and revival of atomic oscillations when the field is in a coherent state. Finally, numerical results are presented to illustrate the temporal dynamics of the system, enabling the interpretation of the main physical phenomena predicted by the model. This text provides an integrated overview of the foundational concepts governing light–matter interaction.

Key-words: Two-level systems; Quantization of the electromagnetic field; Coherent states; Rabi oscillations; Jaynes–Cummings model.

Lista de Figuras

1	No experimento de Stern–Gerlach, um campo magnético não uniforme se-para partículas de acordo com a componente de seu spin ao longo da direção do campo.	18
2	Filtros paralelos (Mesmo eixo)	18
3	Superposição (Eixos Ortogonais).	18
4	Observáveis Incompatíveis.	19
5	Recombinação de Feixes.	19
6	Diagrama esquemático do interferômetro de Mach–Zehnder utilizado para demonstrar interferência e superposição quântica.	20
7	Representação da Precessão de Larmor.	21
8	Probabilidades de ocupação dos estados $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ para um sistema de dois níveis em ressonância ($\Delta = 0$).	39
9	Transição entre estado fundamental e excitado.	53
10	Comparação entre a solução exata e a aproximação perturbativa para a probabilidade de transição.	84
11	Oscilações de Rabi para um sistema de dois níveis em ressonância	85
12	Efeito da dessintonia (Δ) sobre as oscilações de Rabi.	86
13	Inversão atômica para diferentes estados de Fock.	87
14	Estado coerente para diferentes números médios de fótons: (a) $N = 5$, (b) $N = 10$, (c) $N = 20$	89
15	Revivals da inversão atômica para diferentes números médios de fótons: (a) $N = 8$, (b) $N = 35$, (c) $N = 65$	90
16	Comparação da inversão atômica nos modelos semiclássico e de Jaynes-Cummings para $\bar{n} = 1$	92
17	Comparação da inversão atômica nos modelos semiclássico e de Jaynes-Cummings para $\bar{n} = 50$ e $\bar{n} = 100$	93

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	11
2	NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE MECÂNICA QUÂNTICA	13
2.0.1	Primeiro Postulado: Estados Quânticos e Espaço de Hilbert	13
2.0.2	Segundo Postulado: Operadores e Observáveis	13
2.0.3	Terceiro Postulado: Medida e Probabilidades	15
2.0.4	Quarto Postulado: Evolução Temporal	15
2.1	Sistemas de Dois Níveis	16
2.2	Sistemas Compostos	21
2.2.1	Operadores em Sistemas Compostos	23
3	TEORIA DE PERTURBAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO	26
3.1	Equação de Movimento na Mecânica Quântica	27
3.1.1	Expansão do Estado Quântico	28
3.1.2	Evolução Temporal dos Estados Estacionários	28
3.2	Representação de Interação	29
3.2.1	Equação de Movimento na Representação de Interação	31
3.2.2	Expansão em Coeficientes Dependentes do Tempo	32
3.3	Sistema de Dois Níveis com Perturbação Dependente do Tempo	35
3.3.1	Evolução Temporal das Amplitudes de Probabilidade	36
3.3.2	Oscilações de Rabi em Sistema de Dois Níveis	37
3.4	Série de Dyson	41
3.4.1	Amplitudes de Transição na Representação de Interação	43
3.4.2	Probabilidades de Transição	45
3.4.3	Transições Induzidas por uma Perturbação Dependente do Tempo	45
3.4.4	Regra de Ouro de Fermi	47
3.4.5	Perturbação Harmônica	51
4	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	56
4.1	Potenciais Eletromagnéticos	56
4.2	Quantização dos Modos do Campo	59
4.3	Estados Coerentes	61
5	MODELO DE JAYNES-CUMMINGS	64
5.1	Derivação do Modelo de Jaynes-Cummings	64
5.2	O Modelo de Jaynes-Cummings no Setor $n \leftrightarrow n + 1$	67
5.2.1	Dinâmica do modelo e Oscilações de Rabi	70
5.3	Modelo de Jaynes-Cummings com o campo em um estado coerente	76
5.3.1	Colapso e Ressurgimento das Oscilações Atômicas	76

6	ANÁLISE NUMÉRICA E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS	84
6.1	Resultados Numéricos para as Oscilações de Rabi	84
6.2	Colapso e Ressurgimento das Oscilações Atômicas - Resultados Numéricos	88
6.3	Comparação entre a descrição Semiclássica e o modelo de Jaynes-Cummings	92
7	CONCLUSÕES	95
	REFERÊNCIAS	97
A	ALGORITMOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA	99

1 INTRODUÇÃO

O laser constitui um dos exemplos mais representativos da física moderna, tanto do ponto de vista conceitual quanto tecnológico. Definido como um dispositivo de amplificação de luz por emissão estimulada de radiação, seu funcionamento está fundamentado em processos quânticos associados à interação entre a radiação eletromagnética e a matéria, conforme estabelecido por Einstein em sua formulação dos coeficientes de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada (EINSTEIN, 1917). Desde sua concepção teórica até sua realização experimental, o laser consolidou-se como uma das aplicações mais bem-sucedidas da mecânica quântica, com impactos significativos em áreas como telecomunicações, medicina, indústria e pesquisa científica.

Nos cursos introdutórios de óptica, o laser é frequentemente apresentado sob uma abordagem predominantemente clássica, enfatizando propriedades como monocromaticidade, direcionalidade e coerência temporal e espacial (HECHT, 2017; NUSSENZVEIG, 2015). Embora essa descrição seja suficiente para explicar diversos fenômenos macroscópicos e aplicações tecnológicas, ela não esclarece a origem física dessas propriedades, que somente podem ser compreendidas por meio da óptica quântica. Em particular, a coerência, característica fundamental da radiação laser, exige uma interpretação baseada na natureza quântica da luz e na interação entre o campo eletromagnético e os sistemas atômicos.

O tratamento rigoroso das transições entre níveis de energia requer, contudo, ferramentas além da mecânica quântica estacionária. A teoria de perturbações dependentes do tempo, com o formalismo da representação de interação, a expansão em séries de Dyson e a Regra de Ouro de Fermi, permite descrever como um sistema quântico evolui sob a ação de uma perturbação variável no tempo (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017). No contexto do átomo de dois níveis sujeito a uma perturbação harmônica, esse aparato formal conduz naturalmente às oscilações de Rabi — a troca coerente e periódica de energia entre o átomo e o campo de radiação — e estabelece o elo conceitual entre a dinâmica quântica semiclássica e os fenômenos ópticos observáveis.

A quantização do campo eletromagnético amplia a descrição clássica da interação entre luz e matéria, permitindo explicar fenômenos genuinamente quânticos, como a emissão espontânea, os estados de fóton único e as correlações quânticas da radiação, inexistentes na óptica clássica (SCULLY; ZUBAIRY, 1997a). A partir dos potenciais eletromagnéticos e da quantização dos modos do campo, emerge uma descrição em termos de operadores de criação e aniquilação de fótons (MANDEL; WOLF, 1995). Nesse contexto, os estados coerentes, introduzidos por Glauber, apresentam distribuição de Poisson para o número de fótons e propriedades que se aproximam do comportamento clássico da radiação, constituindo a descrição adequada da luz laser (GLAUBER, 1963a).

A descrição da interação entre um átomo de dois níveis e um modo quantizado

do campo eletromagnético é estabelecida pelo modelo de Jaynes–Cummings (JAYNES; CUMMINGS, 1963). Esse modelo descreve a interação de um átomo de dois níveis acoplado a um único modo quantizado do campo eletromagnético, permitindo analisar as oscilações de Rabi no vácuo e o fenômeno de colapso e ressurgimento da inversão atômica quando o campo se encontra em um estado coerente (BONANI, 2020). Tais efeitos revelam aspectos fundamentais da dinâmica quântica da interação átomo-campo e fornecem evidências diretas da natureza quantizada da radiação.

Além disso, a coerência da luz laser pode ser interpretada a partir de estados quânticos específicos do campo eletromagnético, particularmente os estados coerentes. Introduzidos por Glauber no contexto da óptica quântica, esses estados apresentam distribuição de Poisson para o número de fótons e propriedades que se aproximam do comportamento clássico da radiação (GLAUBER, 1963a; MANDEL; WOLF, 1995).

Do ponto de vista da formação de professores de Física, o estudo do laser como sistema quântico possibilita integrar conteúdos de óptica, mecânica quântica e física moderna, favorecendo uma abordagem mais articulada e conceitualmente consistente. Tal integração contribui não apenas para a compreensão dos fundamentos teóricos envolvidos, mas também para o desenvolvimento de estratégias didáticas que aproximem conceitos abstratos da mecânica quântica de fenômenos presentes em tecnologias amplamente utilizadas na sociedade contemporânea.

Dessa forma, este trabalho propõe uma análise teórica da interação entre luz e matéria no contexto da óptica quântica, partindo dos postulados fundamentais da mecânica quântica, passando pela teoria de perturbações dependentes do tempo e pela quantização do campo eletromagnético, até a aplicação do modelo de Jaynes–Cummings para investigar os mecanismos microscópicos responsáveis pela coerência da radiação laser. Busca-se compreender como esse percurso formal permite explicar fenômenos como as oscilações de Rabi, as oscilações de Rabi no vácuo, o colapso e ressurgimento da inversão atômica e a emissão estimulada, fornecendo uma descrição fisicamente consistente dos fundamentos quânticos do laser, complementada por análise numérica dos principais resultados.

O trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta as noções fundamentais de mecânica quântica, com ênfase nos sistemas de dois níveis e sistemas compostos. O Capítulo 3 desenvolve a teoria de perturbações dependentes do tempo, incluindo a representação de interação, a série de Dyson, a Regra de Ouro de Fermi e as oscilações de Rabi em sistemas de dois níveis. O Capítulo 4 trata da quantização do campo eletromagnético e dos estados coerentes. O Capítulo 5 apresenta a derivação e análise do modelo de Jaynes–Cummings, incluindo a dinâmica das oscilações atômicas e o fenômeno de colapso e ressurgimento. O Capítulo 6 discute os resultados numéricos obtidos. Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho.

2 NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE MECÂNICA QUÂNTICA

Para que o leitor compreenda os fundamentos matemáticos e físicos que embasam o modelo de Jaynes-Cummings, esta seção apresenta os postulados da mecânica quântica de forma sucinta, acompanhados dos conceitos essenciais de espaço de Hilbert, operadores, estados e matriz densidade. Ao final, introduz-se os operadores de criação e aniquilação, que serão centrais na quantização do campo eletromagnético.

2.0.1 Primeiro Postulado: Estados Quânticos e Espaço de Hilbert

O estado de um sistema quântico é completamente descrito por um vetor $|\psi(t)\rangle$ pertencente a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial dado por um produto interno linear, definido positivo e completo. A notação utilizada para sua representação é dada pela notação de Dirac, onde:

- $|\psi\rangle$ é chamado de ket e representa um vetor no espaço de Hilbert.
- $\langle\phi|$ é chamado de bra e representa o dual de $|\phi\rangle$, um funcional linear que age sobre kets.

O produto interno entre dois estados $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ é denotado por $\langle\phi|\psi\rangle$ e satisfaz:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*, \quad \langle\psi|\psi\rangle \geq 0, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle = 0.$$

A norma de um estado é $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$, e estados físicos são normalizados, ou seja, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

A dimensão do espaço de Hilbert pode ser finita ou infinita, dependendo do sistema. Por exemplo, o spin de um elétron vive em um espaço bidimensional, enquanto uma partícula livre em uma dimensão vive em um espaço de dimensão infinita.

2.0.2 Segundo Postulado: Operadores e Observáveis

Toda grandeza física observável é representada por um operador linear Hermitiano $\hat{A}$ que atua no espaço de Hilbert. Os possíveis resultados de medida são os autovalores do operador.

Um operador $\hat{A}$ é Hermitiano se $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, onde $\hat{A}^\dagger$ é o adjunto Hermitiano. Consequentemente, o espectro de um operador hermitiano é sempre real, de fato veja que dado a equação de autovalores:

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle,$$

onde a_n são os autovalores e $|a_n\rangle$ são os autovetores do operador $\hat{A}$. Então, temos que:

$$\begin{cases} \hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \\ \langle a_n|\hat{A}^\dagger = (a_n)^* \langle a_n| \end{cases} \quad (2.0.2.1)$$

Mas, como $\hat{A}$ é Hermitiano segue que:

$$\begin{cases} \langle a_m|\hat{A}|a_n\rangle = a_n \langle a_m|a_n\rangle = a_n \delta_{mn} \\ \langle a_n|\hat{A}^\dagger|a_m\rangle = (a_n)^* \langle a_m|a_n\rangle = (a_n)^* \delta_{mn} \end{cases} \quad (2.0.2.2)$$

mas veja que:

$$\langle a_m|\hat{A}|a_n\rangle = \langle a_n|\hat{A}^\dagger|a_m\rangle \implies (a_n)^* = a_n \quad (2.0.2.3)$$

para todo n , ou seja, os autovalores do operador $\hat{A}$ são reais.

Os autovetores normalizados de um operador Hermitiano formam uma base ortonormal completa:

$$\langle a_m|a_n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_n |a_n\rangle\langle a_n| = \hat{I}.$$

Os exemplos básicos de operadores são dados a partir do operador de posição $\hat{x}$, operador de momento $\hat{p}$, operador hamiltoniano $\hat{H}$ e operadores de Pauli.

O operador de posição x , em uma dimensão, atua sobre funções de onda do tipo $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$, já o operador momento $\hat{p}$ como $\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)$.

O operador Hamiltoniano $\hat{H}$ representa a energia total do sistema, sendo representado em um átomo de dois níveis como $\hat{H}_A = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z$.

Em um sistema de dois níveis os operadores de Pauli são de suma importância e satisfazem as relações de comutação $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$. Seus operadores, são representados pelas seguintes matrizes:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Outra propriedade de operadores relevante para o segundo postulado, são os operadores de criação e aniquilação. Os operadores de criação $\hat{a}^\dagger$ e aniquilação $\hat{a}$ são fundamentais para descrever sistemas com excitações discretas, como o oscilador harmônico quântico e o campo eletromagnético quantizado. Eles atuam sobre os estados de Fock $|n\rangle$ (estados com número definido de quanta) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (n \geq 1), & \hat{a}|0\rangle &= 0, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (2.0.2.4)$$

O operador $\hat{a}$ aniquila um quantum de excitação (no caso particular do campo eletromagnético temos a aniquilação do fóton), enquanto $\hat{a}^\dagger$ cria um quantum. Eles obedecem à relação de comutação fundamental,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{I}.$$

O operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ conta o número de quanta, pois $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

2.0.3 Terceiro Postulado: Medida e Probabilidades

Se o sistema está em um estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade de se obter o autovalor a_n em uma medida do observável $\hat{A}$ é dado pela regra de Born ¹

$$P(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2,$$

onde $|a_n\rangle$ é o autovetor correspondente a a_n . Imediatamente após a medida, o estado colapsa para $|a_n\rangle$.

O valor esperado (média de muitas medidas) do observável $\hat{A}$ no estado $|\psi\rangle$ é dado como,

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_n a_n |\langle a_n | \psi \rangle|^2.$$

2.0.4 Quarto Postulado: Evolução Temporal

A evolução temporal de um sistema quântico é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano. Para um Hamiltoniano independente do tempo, a solução formal é,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle,$$

onde $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ é o operador de evolução temporal, que é unitário, garantindo a conservação da norma.

Outro caso particular deste postulado, são estados e matriz densidade. Vale destacar que nem todo sistema quântico pode ser descrito por um estado puro $|\psi\rangle$. Quando há incerteza estatística, por exemplo, conhecimento incompleto sobre o estado ou sistema em equilíbrio térmico, utiliza-se o formalismo da matriz densidade $\hat{\rho}$.

Para um estado puro $|\psi\rangle$, a matriz densidade é definida como

¹A regra de Born estabelece que as probabilidades dos possíveis resultados de uma medida quântica são obtidas pelo módulo ao quadrado das amplitudes de probabilidade associadas aos estados da base de medida.

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Para um estado misto, composto por uma mistura estatística de estados puros $|\psi_k\rangle$ com probabilidades p_k ($\sum_k p_k = 1$), a matriz densidade é,

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|.$$

A matriz densidade possui as seguintes propriedades:

- Hermiticidade: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$.
- Traço unitário: $\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_k p_k = 1$.
- Positividade: $\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0$ para todo $|\phi\rangle$.
- Critério de pureza: Para estados puros, $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ e $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$. Para estados mistos, $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$.

O valor esperado de um operador $\hat{A}$ no formalismo da matriz densidade é,

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}).$$

A evolução temporal da matriz densidade é dada pela equação de von Neumann²:

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}],$$

onde $[\hat{H}, \hat{\rho}]$ é o comutador. Este formalismo é essencial para descrever sistemas quânticos abertos, onde interações com o ambiente levam a decoerência e relaxação.

2.1 Sistemas de Dois Níveis

Um sistema de dois níveis é caracterizado por apenas dois estados quânticos considerados relevantes para a descrição do sistema. Embora em sistemas naturais é apresentado um número infinito de níveis de energia, em certas condições, como na interação de um átomo com uma radiação monocromática em ressonância com uma transição específica, apenas dois estados participam efetivamente do processo.

Esses sistemas podem ser descritos em um espaço de Hilbert bidimensional, simplificando o formalismo, pois todos os operadores lineares e a Hamiltoniana (H) podem ser representados por matrizes complexas (MAHON, 2011). Na notação de Dirac, os

²A equação de Liouville–von Neumann descreve a evolução temporal da matriz densidade $\hat{\rho}(t)$ em sistemas quânticos. Esta equação é o análogo quântico do teorema de Liouville da mecânica clássica, que descreve a evolução da densidade de probabilidade no espaço de fases.

estados de bases ortonormais são denotados como $|1\rangle$ e $|2\rangle$, satisfazendo a condição de ortonormalidade:

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (2.1.0.1)$$

O estado mais geral do sistema é uma superposição linear desses estados de base, escrita como,

$$|\psi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle \quad (2.1.0.2)$$

onde os coeficientes complexos c_1 e c_2 devem satisfazer a condição de normalização

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \quad (2.1.0.3)$$

Sob esta base, o operador Hamiltoniano que descreve as energias dos níveis e a interação do meio ativo com o campo eletromagnético é representado matricialmente conforme descrito posteriormente,

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & V_{12} \\ V_{21} & E_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.0.4)$$

O exemplo mais representativo de um sistema de dois níveis é o spin 1/2 do elétron. Nesta configuração, a partícula possui um momento magnético intrínseco que pode ser observado em apenas dois autovalores de projeção de spin: "para cima" ($|\uparrow\rangle$) ou "para baixo" ($|\downarrow\rangle$) em relação a um determinado eixo de quantização (NOVAES, 2016). Este comportamento é ilustrado pelo experimento de Stern-Gerlach, que revela a quantização do momento angular de spin através da deflexão de um feixe atômico em duas componentes distintas.

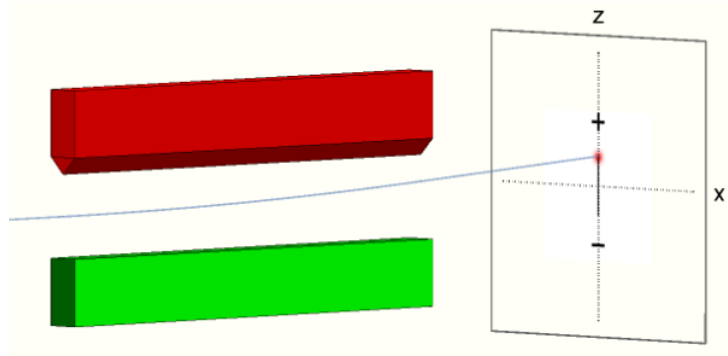
O experimento de Stern-Gerlach, realizado em 1922, constitui uma das demonstrações experimentais fundamental, fornecendo a evidência direta de que o momento angular intrínseco (spin) é uma grandeza quantizada. Em um sistema clássico, o momento magnético de uma partícula poderia assumir qualquer orientação espacial, contudo, este experimento revela que, para o elétron, existem apenas dois estados possíveis (Figura 1).

No experimento, um feixe de átomos é colimado e forçado a atravessar uma região contendo um campo magnético não homogêneo. Embora a força de Lorentz clássica ($\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$) possa ser compensada para garantir uma trajetória inicialmente retilínea, o gradiente do campo magnético interage com o momento magnético intrínseco do elétron ($\vec{\mu}$), que se comporta como um pequeno ímã. A força exercida sobre o elétron é proporcional à componente do spin na direção do gradiente do campo (geralmente o eixo z), demonstra-se,

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.1.0.5)$$

Classicamente, esperaríamos que o feixe se espalhasse continuamente, no entanto, o experimento revela que o feixe se divide em apenas duas componentes distintas, provando que a componente vertical do momento magnético é quantizada.

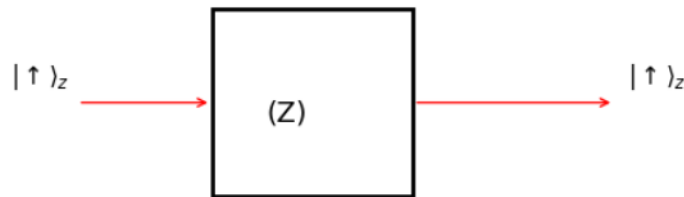
Figura 1: No experimento de Stern–Gerlach, um campo magnético não uniforme separa partículas de acordo com a componente de seu spin ao longo da direção do campo.



Fonte: Captura de tela da simulação *Quantum and classical uncertainties* do projeto QuVis (KOHNLÉ, 2026) (2026).

A natureza dos sistemas de dois níveis torna-se evidente ao analisarmos medidas sucessivas de spin em diferentes eixos, conforme ilustrado na Figura 1, 2, 3 e 4.

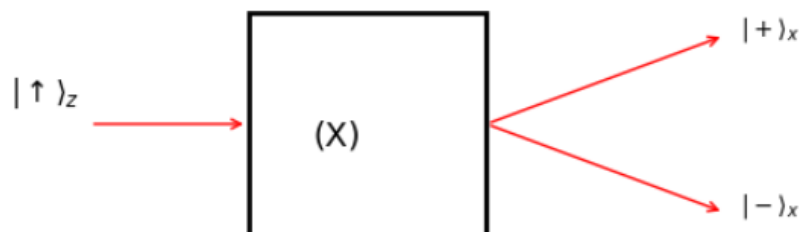
Figura 2: Filtros paralelos (Mesmo eixo)



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

A Figura 1 demonstra que um feixe preparado no estado $|\uparrow\rangle$ em z permanece inalterado ao passar por um segundo filtro alinhado no mesmo eixo (z). Fisicamente, isso ocorre porque o estado já é um autovetor do operador, não havendo nova deflexão.

Figura 3: Superposição (Eixos Ortogonais).



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

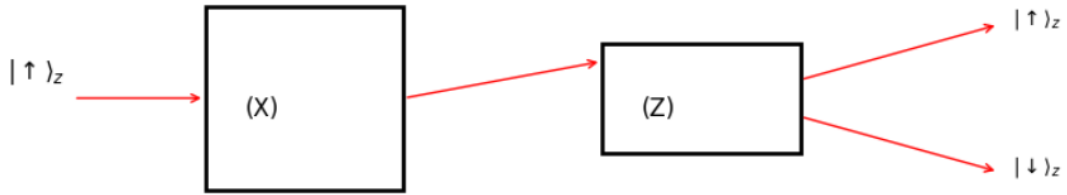
Na Figura 2 revela o fenômeno da superposição quântica. Um feixe z preparado em z

($|\uparrow\rangle$), ao ser medido no eixo x , divide-se em duas componentes ($+x$ e $-x$). Matematicamente, o estado em z é descrito como uma superposição de estados na base de x ,

$$|\uparrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle_x + |\leftarrow\rangle_x), \quad (2.1.0.6)$$

indicando que a informação sobre o spin em x é puramente probabilística antes da medição.

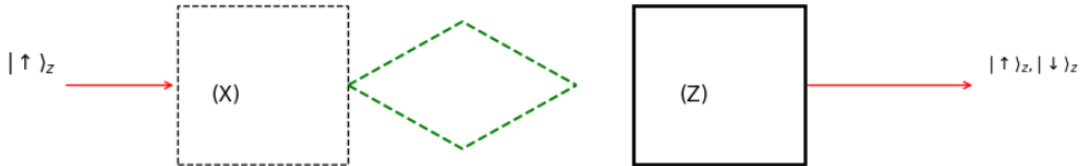
Figura 4: Observáveis Incompatíveis.



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

A medição do spin em x destrói a informação previamente obtida sobre o eixo z . Ao medir o feixe resultante novamente em z , observa-se uma nova divisão. Isso acontece porque os operadores S_z e S_x não comutam ($[S_z, S_x] \neq 0$ sendo caracterizados como observáveis incompatíveis).

Figura 5: Recombinação de Feixes.

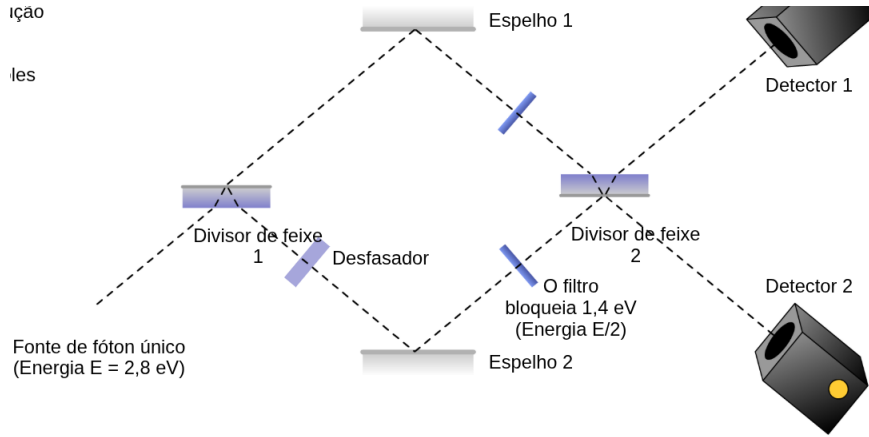


Fonte: Elaborado pela autora (2026).

Por fim, a Figura 5 representa a recombinação coerente de feixes, nela, observa-se a evolução da fase quântica do sistema antes de uma nova etapa de detecção, essencial para processos de interferometria e controle de estados em sistemas de dois níveis.

Paralelamente, outro exemplo fundamental é a polarização do fóton, onde um fóton pode ser descrito em termos de estados de polarização horizontal e vertical, sendo qualquer outro estado representável como uma superposição linear desses dois. De forma análoga, o interferômetro de Mach-Zehnder pode ser descrito como um sistema de dois níveis, correspondentes aos dois caminhos possíveis que o fóton pode percorrer, evidenciando efeitos de interferência quântica dependentes da fase relativa entre os estados (Figura 6).

Figura 6: Diagrama esquemático do interferômetro de Mach–Zehnder utilizado para demonstrar interferência e superposição quântica.



Fonte: Captura de tela da simulação *Mach–Zehnder Interferometer* do projeto QuVis (KOHNLÉ, 2026) (2026).

A evolução temporal de um sistema de dois níveis, como o spin $1/2$, torna-se evidente quando o sistema é submetido a um campo magnético externo constante $\vec{B}$. O elétron, ao possuir um momento magnético intrínseco $\vec{\mu}$ proporcional ao seu spin ($\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$), experimenta uma interação que não apenas define os níveis de energia do sistema, mas dita toda a sua dinâmica temporal.

Segundo (MAHON, 2011), considerando um campo magnético aplicado uniformemente na direção z , de modo que $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, o Hamiltoniano de interação é expresso por:

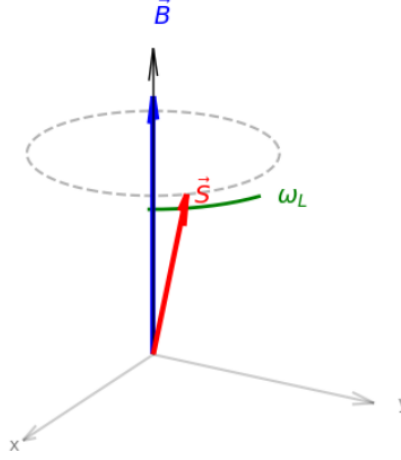
$$\hat{H} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \omega_L \hat{S}_z \quad (2.1.0.7)$$

onde ω_L representa a frequência de Larmor. Sob essa configuração, os autoestados de $\hat{S}_z$ ($|1\rangle$ e $|2\rangle$) são estados estacionários que adquirem apenas uma fase temporal diferenciada. Contudo, se o sistema inicia em uma superposição linear, como $|\psi(t)\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$, a evolução temporal impõe uma fase relativa entre os estados conforme a equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$|\Psi(t)\rangle = ae^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + be^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle.$$

Essa diferença de fase faz com que o valor esperado do spin no plano não permaneça estático, ele precessiona em torno do eixo do campo magnético, como mostrado na Figura 7.

Figura 7: Representação da Precessão de Larmor.



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

A compreensão da precessão de Larmor e da evolução temporal de sistemas de dois níveis é o que permite transitar da mecânica quântica fundamental para a física de dispositivos. No contexto de um laser quântico, os estados de spin (ou níveis de energia atômica) são estados que podem ser manipulados por campos eletromagnéticos externos.

Conforme estabelecido por (GRIFFITHS, 2011) e observado nos experimentos de Stern-Gerlach, a capacidade de preparar um sistema em uma superposição coerente e controlar sua evolução temporal é o que define a fase da radiação emitida.

2.2 Sistemas Compostos

Quando um sistema quântico é formado por dois ou mais subsistemas, como um átomo e o campo eletromagnético, ou múltiplos qubits, o espaço de Hilbert total não é a simples soma direta dos espaços individuais, mas sim o seu produto tensorial. O postulado seguinte descreve como o espaço de estados de um sistema composto deve ser construído a partir dos espaços de estados dos sistemas individuais.

No quarto postulado, o espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos individuais (NIELSEN; CHUANG, 2005).

Matematicamente, se o sistema é a união dos subsistemas A e B , temos

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B,$$

se o subsistema A está no estado $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e o subsistema B está no estado $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$, então o estado do sistema combinado (se não houver emaranhamento) é dado pelo produto

tensorial,

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

Por simplicidade notacional, o símbolo $\otimes$ é frequentemente omitido, escrevendo-se simplesmente $|\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$ ou $|\psi_A, \psi_B\rangle$.

Se os sistemas forem numerados de 1 até n , e o sistema i for preparado no estado $|\psi_i\rangle$, decorre que o estado do sistema composto será,

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle.$$

O produto tensorial possui as seguintes propriedades essenciais:

- Bilinearidade: Para $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_B$ e $a, b \in \mathbb{C}$:

$$(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) \otimes |\phi\rangle = a(|\psi_1\rangle \otimes |\phi\rangle) + b(|\psi_2\rangle \otimes |\phi\rangle)$$

- Dimensão: Se $\dim(\mathcal{H}_A) = m$ e $\dim(\mathcal{H}_B) = n$, então $\dim(\mathcal{H}_{\text{total}}) = m \cdot n$. A dimensão do espaço total cresce exponencialmente com o número de subsistemas.
- Base do espaço produto: Se $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_A$ e $\{|f_j\rangle\}_{j=1}^n$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_B$, então o conjunto

$$|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

forma uma base ortonormal de $\mathcal{H}_{\text{total}}$.

Um exemplo particularmente importante é o sistema formado por um átomo de dois níveis interagindo com um modo quantizado do campo eletromagnético. Nesse caso, o espaço de Hilbert total é dado pelo produto tensorial entre o espaço associado ao átomo e o espaço associado ao campo,

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_{\text{átomo}} \otimes \mathcal{H}_{\text{campo}}.$$

O espaço atômico é gerado pelos estados fundamental e excitado, $|g\rangle$ e $|e\rangle$, enquanto o espaço do campo é gerado pelos estados de número de fótons (estados de Fock) $|n\rangle$. Assim, os estados da base do sistema composto podem ser escritos como

$$|g, n\rangle \equiv |g\rangle \otimes |n\rangle, \quad |e, n\rangle \equiv |e\rangle \otimes |n\rangle.$$

Por exemplo, o estado $|e, 3\rangle$ representa um átomo no estado excitado acompanhado de um campo contendo três fótons, enquanto o estado $|g, 4\rangle$ representa o átomo no estado fundamental e o campo contendo quatro fótons.

A descrição do sistema por meio do produto tensorial permite representar adequadamente a troca de energia entre o átomo e o campo. Durante uma emissão estimulada, por exemplo, ocorre a transição

$$|e, n\rangle \longrightarrow |g, n+1\rangle,$$

na qual o átomo decai para o estado fundamental enquanto o número de fótons do campo aumenta em uma unidade.

2.2.1 Operadores em Sistemas Compostos

Operadores que atuam em apenas um dos subsistemas são estendidos ao espaço total via produto tensorial com o operador identidade no outro subsistema. Se $\hat{A}_A$ atua em $\mathcal{H}_A$ e $\hat{B}_B$ atua em $\mathcal{H}_B$, a ação conjunta sobre os estados produto é dada por:

$$(\hat{A}_A \otimes \hat{B}_B)(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) = (\hat{A}_A|\psi_A\rangle) \otimes (\hat{B}_B|\psi_B\rangle).$$

Por exemplo, o operador $(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{I})$ atuando sobre o estado $|01\rangle$:

$$(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{I})|01\rangle = (\hat{\sigma}_z|0\rangle) \otimes (\hat{I}|1\rangle) = (+1)|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle.$$

De maneira análoga, operadores que atuam exclusivamente sobre o campo eletromagnético são escritos como o produto tensorial entre o operador correspondente e a identidade no espaço atômico. Por exemplo, o operador número de fótons assume a forma

$$\hat{N} = \hat{I} \otimes \hat{a}^\dagger \hat{a},$$

onde $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ são os operadores de criação e aniquilação do campo. Sua ação sobre os estados do sistema composto é dada por

$$(\hat{I} \otimes \hat{a}^\dagger \hat{a})|e, n\rangle = |e\rangle \otimes (\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle) = n|e, n\rangle,$$

mostrando que o operador atua apenas sobre o estado do campo, sem alterar o estado atômico.

Uma propriedade relevante do produto tensorial é a dimensão do espaço de Hilbert, é dada pelo produto da dimensão dos espaços individuais, por exemplo, se um sistema atômico possui dimensão d_A e o campo possui dimensão d_B , então

$$\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = d_A d_B.$$

Além dos estados do produto, o espaço composto admite estados que não podem ser escritos como um produto tensorial de estados pertencentes aos subsistemas individuais,

e esses estados são denominados estados emaranhados.

Podemos definir este estado de maneira formal, seja

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B,$$

o espaço de Hilbert de um sistema composto por dois subsistemas A e B . Um estado puro $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ é dito como produto se existem

$$|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A, |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B,$$

da mesma maneira que

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

Caso contrário, $|\Psi\rangle$ é dito como emaranhado.

A estrutura do espaço de Hilbert de sistemas compostos permite a existência de estados com propriedades que não encontram equivalente na Física clássica. Em particular, alguns estados podem ser escritos como produtos tensoriais de estados pertencentes a cada subsistema, sendo denominados estados separáveis. Outros, entretanto, não podem ser fatorados dessa forma, exibindo correlações quânticas conhecidas como emaranhamento.

Para ilustrar essas duas classes de estados, consideremos inicialmente um estado separável, o estado $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ é trivialmente separável, pois é o produto dos estados $|0\rangle$, no primeiro subsistema e $|0\rangle$ no segundo subsistema.

Para exemplificar a descrição de sistemas compostos, consideremos um sistema formado por dois qubits. Um qubit é um sistema quântico de dois níveis, descrito pelos estados de base $|0\rangle$ e $|1\rangle$. O espaço de estados do sistema composto é construído por meio do produto tensorial desses espaços individuais. A partir dessa construção surgem estados separáveis e estados emaranhados, conforme ilustrado a seguir.

Para um estado emaranhado considere o seguinte estado de dois qubits, conhecido como estado de Bell ³

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle).$$

Afim de mostrar que ele é emaranhado, supomos que existam coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que,

$$|\Phi^+\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle).$$

Expandindo o produto tensorial, vamos obter

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle.$$

³Os estados de Bell representam os exemplos mais simples de emaranhamento quântico. Eles correspondem a estados de dois qubits que não podem ser escritos como o produto de estados individuais, evidenciando correlações quânticas fundamentais entre as partículas.

Comparando com a expressão de $|\Phi^+\rangle$, obtemos o sistema,

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Se $ad = 0$, temos $a = 0$ ou $d = 0$. Se $a = 0$, então $ac = 0$, contradizendo $ac = 1/\sqrt{2}$. Se $d = 0$, então $bd = 0$, contradizendo $bd = 1/\sqrt{2}$. Portanto, não existem tais coeficientes, e $|\Phi^+\rangle$ é emaranhado.

A relevância desse resultado para a Computação Quântica, por exemplo, reside no fato de que estados emaranhados não podem ser descritos como combinações independentes dos estados de seus constituintes. Consequentemente, a informação quântica passa a ser armazenada de forma distribuída entre os qubits, gerando correlações que não possuem equivalente clássico. Estados de Bell, como $|\Phi^+\rangle$, constituem recursos fundamentais em diversos protocolos de informação quântica, incluindo teleporte quântico, codificação superdensa, distribuição quântica de chaves criptográficas e algoritmos quânticos (SENA et al., 2025). Dessa forma, o emaranhamento é frequentemente considerado um dos elementos centrais responsáveis pelas vantagens oferecidas pelas tecnologias quânticas em relação às suas contrapartes clássicas.

3 TEORIA DE PERTURBAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO

Na Mecânica Quântica, o comportamento temporal de um sistema físico é governado pela Equação de Schrödinger dependente do tempo. Entretanto, para muitos sistemas físicos submetidos a influências externas, a obtenção de soluções exatas torna-se inviável, motivando o uso de métodos aproximativos. Nesse contexto, a Teoria das Perturbações Dependentes do Tempo constitui uma ferramenta fundamental para descrever sistemas quânticos sujeitos a esses potenciais externos. Sua principal ideia consiste em decompor a Hamiltoniana total como a soma de uma Hamiltoniana não perturbada e um termo de perturbação temporal:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t). \quad (3.0.0.1)$$

Nessa expressão, $\hat{H}_0$ representa a Hamiltoniana do sistema isolado, isto é, sem a presença de interações externas. Já o termo $\hat{V}(t)$ descreve uma perturbação externa dependente do tempo, responsável por modificar a dinâmica do sistema quântico (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013).

Fisicamente, a Hamiltoniana não perturbada descreve os estados estacionários do sistema. Esses estados satisfazem a equação de autovalores caracterizada por:

$$\hat{H}_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad (3.0.0.2)$$

onde $|\psi_n\rangle$ representa os autoestados do sistema e E_n corresponde aos respectivos autovalores de energia. Como a Hamiltoniana não perturbada $\hat{H}_0$ é considerada conhecida, seus autoestados e autovalores podem ser determinados previamente pela solução da equação de autovalores. Esses autoestados formam uma base completa do espaço de Hilbert, permitindo que qualquer estado quântico do sistema seja escrito como uma combinação linear dos estados $|\psi_n\rangle$ (MAHON, 2011).

Diferentemente dos sistemas estacionários, nos quais o Hamiltoniano permanece constante e os estados quânticos evoluem apenas por fatores de fase temporal, diversos fenômenos físicos reais envolvem interações externas capazes de modificar continuamente a dinâmica do sistema. Entre esses fenômenos destacam-se a interação entre matéria e radiação eletromagnética, os processos de absorção e emissão de fótons, a espectroscopia atômica e molecular, a ressonância magnética, a interação de átomos com campos eletromagnéticos oscilantes e os fenômenos relacionados à óptica quântica (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018a; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

A presença de uma perturbação dependente do tempo pode alterar a dinâmica do sistema, fazendo com que ele deixe de permanecer em um único estado estacionário da Hamiltoniana não perturbada. Como consequência, podem ocorrer transições quânticas

entre diferentes níveis de energia, caracterizando processos de troca de energia entre o sistema e o agente externo. Essas transições constituem um dos aspectos centrais da teoria de perturbações dependentes do tempo e estão na base da descrição de fenômenos como absorção e emissão de radiação; contudo, nem toda perturbação temporal induz transições. Quando a variação da Hamiltoniana ocorre de forma suficientemente lenta em comparação com as escalas características do sistema, o Teorema Adiabático estabelece que o estado quântico permanece associado ao autoestado instantâneo correspondente, suprimindo transições entre níveis de energia (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018b). Assim, a ocorrência de transições depende não apenas da presença da perturbação, mas também da forma como ela evolui no tempo (GRIFFITHS, 2011).

3.1 Equação de Movimento na Mecânica Quântica

Diferentemente da Mecânica Clássica, em que a dinâmica é descrita pelas equações de Newton ou pelas equações de Hamilton, na Mecânica Quântica a evolução temporal dos estados é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo. A Hamiltoniana, por sua vez, representa o operador de energia do sistema e determina sua evolução por meio dessa equação.

A Equação de Schrödinger dependente do tempo é descrita por:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (3.1.0.1)$$

Nessa expressão, $|\psi(t)\rangle$ representa o vetor de estado do sistema, $\hat{H}$ corresponde à Hamiltoniana total e $\hbar$ representa a constante de Planck reduzida.

Quando o sistema sofre influência de uma perturbação dependente do tempo, substitui-se a Hamiltoniana total pela decomposição da eq. (3.0.0.1) obtendo-se:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle. \quad (3.1.0.2)$$

Essa equação descreve a evolução temporal completa do sistema sob influência da perturbação externa. Em um sistema descrito por um estado puro, o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ caracteriza completamente seu estado quântico, permitindo, por meio da regra de Born, determinar as probabilidades associadas aos resultados das medidas de observáveis. A partir dele podem ser determinadas probabilidades, valores médios de observáveis físicos, amplitudes de transição e propriedades dinâmicas.

É importante destacar que na Mecânica Quântica o estado do sistema não evolui como uma trajetória clássica bem definida; em vez disso, a evolução ocorre em termos de amplitudes de probabilidade, fazendo com que os resultados das medições sejam intrinsecamente probabilísticos.

A solução da Equação de Schrödinger depende diretamente da forma da Hamiltoni-

ana do sistema. Em situações nas quais a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, os estados estacionários podem ser determinados por meio da equação independente do tempo. Entretanto, quando existe uma perturbação temporal, a análise torna-se significativamente mais complexa. Para resolver esse problema, utiliza-se a expansão do estado quântico em termos dos autoestados da Hamiltoniana não perturbada (MAHON, 2011; GRIFFITHS; FREITAS, 2011).

3.1.1 Expansão do Estado Quântico

Como os autoestados da Hamiltoniana não perturbada $\hat{H}_0$ formam uma base completa do espaço de Hilbert, o estado quântico geral do sistema em um instante qualquer, $|\psi(t)\rangle$, pode ser expandido inicialmente como uma combinação linear desses vetores:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |\psi_n\rangle. \quad (3.1.1.1)$$

Nessa primeira abordagem, os coeficientes dependentes do tempo $C_n(t)$ absorvem toda a dinâmica do sistema, descrevendo a contribuição de cada autoestado $|\psi_n\rangle$ para o estado global em um instante t . Alternativamente, para isolar a dinâmica de transição da evolução temporal natural do sistema livre, essa dependência pode ser explicitada inserindo-se uma função temporal genérica $f_n(t)$ acoplada a cada termo da somatória, resultando em:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) f_n(t) |\psi_n\rangle. \quad (3.1.1.2)$$

No formalismo da Teoria das Perturbações Dependentes do Tempo, a determinação da forma explícita desse fator temporal constitui o passo fundamental para estabelecer a representação de interação.

3.1.2 Evolução Temporal dos Estados Estacionários

Para determinar a forma do fator temporal $f_n(t)$, considera-se o comportamento do sistema na ausência de perturbações externas ($\hat{V}(t) = 0$). Substituindo a expansão da Eq. (3.1.1.2) na Equação de Schrödinger dependente do tempo e utilizando a relação de autovalores da Hamiltoniana não perturbada apresentada na Eq. (3.0.0.2), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$i\hbar \frac{df_n(t)}{dt} = E_n f_n(t). \quad (3.1.2.1)$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem que pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, sendo reescrita como:

$$\frac{df_n}{f_n} = -\frac{iE_n}{\hbar} dt.$$

Integrando ambos os lados da igualdade, encontra-se:

$$\ln(f_n) = -\frac{iE_nt}{\hbar} + C',$$

onde C' é uma constante de integração. Ao aplicar a função exponencial em ambos os membros e absorver a constante na normalização do estado, a evolução temporal associada aos estados estacionários passa a ser denotada por:

$$f_n(t) = e^{-iE_nt/\hbar}. \quad (3.1.2.2)$$

Desse modo, ao substituir a Eq. (3.1.2.2) de volta na Eq. (3.1.1.2), a expansão do estado quântico na representação de interação assume a sua forma final:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-iE_nt/\hbar} |\psi_n\rangle. \quad (3.1.2.3)$$

A interpretação física desses novos coeficientes surge naturalmente a partir dessa construção: o módulo quadrado $|C_n(t)|^2$ fornece a probabilidade de encontrar o sistema no autoestado $|\psi_n\rangle$ no instante t . Assim, o problema dinâmico passa a consistir na determinação da evolução temporal dessas amplitudes de probabilidade.

Na ausência de potenciais externos, os coeficientes $C_n(t)$ permanecem constantes, e o sistema evolui apenas por meio dos fatores de fase temporal associados aos seus estados estacionários. Entretanto, sob a influência de uma perturbação, esses coeficientes passam a variar no tempo, indicando a ocorrência de transições quânticas entre os diferentes níveis de energia. A dinâmica precisa dessa evolução pode ser obtida substituindo a Eq. (3.1.2.3) na Equação de Schrödinger dependente do tempo e utilizando a propriedade de ortonormalidade dos autoestados.

3.2 Representação de Interação

Nos problemas de interação entre um sistema quântico e agentes externos, a Hamiltoniana total pode ser escrita como a soma de uma parte não perturbada, $\hat{H}_0$, e de um termo de interação dependente do tempo, $\hat{V}(t)$. Como os autoestados e autovalores de $\hat{H}_0$ são conhecidos, a dinâmica associada ao sistema isolado pode ser tratada exatamente. Nessa situação, torna-se conveniente separar a evolução temporal produzida por $\hat{H}_0$ daquela induzida pela interação externa. A representação de interação é particularmente adequada para esse propósito, pois combina características das representações de Schrödinger e Heisenberg.

Nesse formalismo, a evolução associada à Hamiltoniana não perturbada é incorporada aos operadores, enquanto os estados evoluem apenas sob a ação do termo de interação. Como consequência, a equação de movimento passa a depender diretamente da interação

responsável pelas transições entre os estados do sistema, simplificando significativamente o tratamento de perturbações dependentes do tempo (MAHON, 2011).

Na representação de Schrödinger, os estados evoluem no tempo enquanto os operadores permanecem constantes. Já na representação de Heisenberg, os estados são fixos e a evolução temporal é transferida para os operadores. Embora ambas sejam equivalentes do ponto de vista físico, a estrutura da Hamiltoniana do problema em estudo sugere a adoção de uma descrição alternativa.

As diferenças entre as representações de Schrödinger, Heisenberg e Interação podem ser resumidas conforme apresentado na tabela abaixo.

Tabela 1: Comparação entre as representações de Heisenberg, Interação e Schrödinger.

	Representação de Heisenberg	Representação de Interação	Representação de Schrödinger
Vetor de estado	Não evolui	Evolução determinada por $\hat{V}_I$	Evolução determinada por $\hat{H}$
Observáveis	Evolução determinada por $\hat{H}$	Evolução determinada por $\hat{H}_0$	Não evoluem

Fonte: Elaborado pela autora baseado em (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017) (2026).

Nessa abordagem, a evolução associada à Hamiltoniana não perturbada é tratada separadamente, enquanto a dinâmica induzida pela perturbação é considerada explicitamente. Essa separação simplifica o desenvolvimento da teoria de perturbações dependente do tempo e o cálculo das probabilidades de transição entre estados quânticos. Na representação de Schrödinger, os estados evoluem segundo a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle_S, \quad (3.2.0.1)$$

e os operadores (como posição e momento) permanecem, em geral, constantes no tempo, exceto quando possuem dependência temporal explícita. Na representação de interação, o estado é definido por:

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S, \quad (3.2.0.2)$$

ou seja, remove-se a evolução temporal devido à Hamiltoniana não perturbada do estado quântico, inserindo explicitamente no operador exponencial. Dessa forma, o operador de evolução temporal livre, definido por:

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar},$$

permanecendo apenas a dinâmica associada à perturbação externa.

3.2.1 Equação de Movimento na Representação de Interação

Para determinar a equação de movimento dos estados na representação de interação, realiza-se a diferenciação temporal do vetor de estado em relação ao tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S \right). \quad (3.2.1.1)$$

Aplicando-se a regra do produto para a derivada do membro direito, obtém-se:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \left(i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S \right).$$

Substituindo a dinâmica da representação de Schrödinger, expressa pela Eq. (3.2.0.1), no último termo da igualdade anterior, a expressão torna-se:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle_S.$$

Ao distribuir os operadores no segundo termo do membro direito, resulta em:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_0 |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle_S.$$

Visto que a Hamiltoniana não perturbada $\hat{H}_0$ comuta com sua própria função exponencial, a ordem desses operadores pode ser invertida, fazendo com que os dois primeiros termos do membro direito se cancelem mutuamente. Desse modo, a expressão reduz-se a:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle_S.$$

Para eliminar completamente a dependência do estado de Schrödinger, utiliza-se a relação inversa de transformação, dada por $|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_I$. Substituindo essa relação no termo restante, encontra-se:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V}(t) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_I.$$

Define-se, então, o operador de perturbação na representação de interação por meio da seguinte transformação de similaridade:

$$\hat{V}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V}(t) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (3.2.1.2)$$

A partir desta definição, estabelece-se formalmente a equação de movimento para os estados na representação de interação:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I. \quad (3.2.1.3)$$

Essa equação demonstra que, na representação de interação, a evolução temporal dos estados quânticos é dada pela perturbação externa, representada pelo operador $\hat{V}_I(t)$. A contribuição associada à Hamiltoniana livre $\hat{H}_0$ deixa de aparecer explicitamente na equação de movimento dos estados, uma vez que sua dinâmica natural já foi incorporada na definição dos vetores de estado.

A fim de obter uma descrição completa desse formalismo, torna-se necessário analisar também a evolução temporal dos operadores. Considere um observável arbitrário $\hat{A}_S$ definido na representação de Schrödinger. Na representação de interação, esse operador é construído analogamente à Eq. (3.2.1.2):

$$\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (3.2.1.4)$$

Derivando essa expressão em relação ao tempo e empregando as propriedades algébricas dos operadores exponenciais, obtém-se a equação de movimento para o observável:

$$\frac{d\hat{A}_I}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{A}_I]. \quad (3.2.1.5)$$

Caso o operador original apresente uma dependência temporal explícita ainda na representação de Schrödinger, a diferenciação total assume a sua forma mais geral:

$$\frac{d\hat{A}_I}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{A}_I] + \left(\frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \right)_I. \quad (3.2.1.6)$$

Observa-se, portanto, que os operadores na representação de interação evoluem no tempo sob a ação estrita da Hamiltoniana não perturbada $\hat{H}_0$, enquanto os estados quânticos têm sua dinâmica ditada apenas pela perturbação $\hat{V}_I(t)$. Essa distribuição de papéis evidencia com clareza a natureza intermediária desta representação, na qual a dinâmica total do sistema é elegantemente compartilhada entre estados e operadores.

3.2.2 Expansão em Coeficientes Dependentes do Tempo

Como visto anteriormente, na representação de interação, o estado quântico pode ser expandido na base completa dos autoestados da Hamiltoniana não perturbada. Como esses estados formam uma base ortonormal e são independentes do tempo, o vetor de estado pode ser escrito como:

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_m C_m(t) |\phi_m\rangle, \quad (3.2.2.1)$$

onde os coeficientes $C_m(t)$ contêm toda a informação sobre a evolução temporal do

sistema. Os estados $|\phi_m\rangle$ são definidos como autoestados de $\hat{H}_0$:

$$H_0|\phi_m\rangle = E_m|\phi_m\rangle, \quad (3.2.2.2)$$

e satisfazem a condição de ortonormalidade:

$$\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{nm}. \quad (3.2.2.3)$$

Essa expansão é particularmente útil porque permite determinar a evolução temporal das amplitudes $C_m(t)$, a partir das quais podem ser obtidas as probabilidades de transição entre os diferentes estados quânticos do sistema.

É importante destacar que o produto interno é sempre escrito como bra-ket, assim, o bra é representado por $\langle\phi_n|$ e o ket por $|\phi_m\rangle$ resultando no produto interno $\langle\phi_n|\phi_m\rangle$. Quando $n = m$, o resultado é igual a 1, indicando normalização do estado. Já quando $n \neq m$, o produto interno é igual a 0, indicando ortogonalidade entre os estados.

Os coeficientes $C_m(t)$, são funções complexas dependentes do tempo e carregam toda a informação referente à evolução induzida pela perturbação $V(t)$. Para um instante $t = 0$, temos:

$$|\psi(0)\rangle_I = |\psi(0)\rangle_S = \sum_m C_m(0)|\phi_m\rangle, \quad (3.2.2.4)$$

em que os coeficientes iniciais $C_m(0)$ são determinados pelas condições iniciais do problema. Por exemplo, se o sistema encontra-se inicialmente em um estado específico $|\phi_i\rangle$, então:

$$C_m(0) = \delta_{mi}.$$

Para obter as equações de movimento dos coeficientes temporais, substituímos a expansão do estado na equação de Schrödinger da representação de interação, dada na Eq.(3.2.1.3). Substituindo a expansão:

$$i\hbar \sum_m \dot{C}_m(t)|\phi_m\rangle = \sum_m C_m(t)\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle, \quad (3.2.2.5)$$

Agora, aplicamos o bra $\langle\phi_n|$ na Eq. (3.2.2.5) e usando a relação de ortonormalidade dada pela Eq. (3.2.2.3), obtêm-se o seguinte desenvolvimento,

$$\begin{aligned} \sum_m C_m(t)\langle\phi_n|\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle &= i\hbar \sum_m \dot{C}_m(t)\langle\phi_n|\phi_m\rangle \\ &= i\hbar \sum_m \dot{C}_m(t)\delta_{nm} \\ &= i\hbar \dot{C}_n(t). \end{aligned} \quad (3.2.2.6)$$

Perceba que no lado esquerdo da Eq. (3.2.2.6), os termos $\langle\phi_n|\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle$ correspondem

aos elementos de matriz do operador de perturbação externa, na representação de interação e na base de autoestados do hamiltoniano não perturbado. Tendo isso em vista, podemos explicitar esses elementos de matriz em termos das quantidades inicialmente conhecidas do hamiltoniano não perturbado. Para tanto, usamos a Eq. (3.2.1.2), bem como as relações de autovalores dos estados $|\phi_m\rangle$ dadas pela Eq. (3.2.2.2) que nos leva a seguinte resolução:

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle &= \langle\phi_n|e^{i\hat{H}_0t/\hbar}\hat{V}(t)e^{-i\hat{H}_0t/\hbar}|\phi_m\rangle \\ &= e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\langle\phi_n|\hat{V}(t)|\phi_m\rangle.\end{aligned}\quad (3.2.2.7)$$

Notemos que a partir da Eq.(3.2.2.7), somos motivados a definir o seguinte termo:

$$\omega_{nm} \equiv \frac{E_n - E_m}{\hbar}, \quad (3.2.2.8)$$

o qual corresponde as frequências de Bohr associadas as transições entre os níveis de energias do sistema não perturbado. De posse disso, conseguimos então explicitar os elemento de matriz do operador de perturbação externa, na representação de Interação:

$$\langle\phi_n|\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle = e^{i\omega_{nm}t}\langle\phi_n|\hat{V}(t)|\phi_m\rangle. \quad (3.2.2.9)$$

De posse disso, conseguimos então escrever a equação diferencial para os coeficientes $C_n(t)$, da expansão do estado $|\psi(t)\rangle$ feita na Eq. (3.1.1.2), como:

$$i\hbar\dot{C}_n(t) = \sum_m C_m(t)e^{i\omega_{nm}t}\langle\phi_n|\hat{V}(t)|\phi_m\rangle, \quad (3.2.2.10)$$

em que os coeficientes $C_n(0)$ são conhecidos, já que representam os coeficientes de expansão do estado inicial que, a priori, é conhecido. Com isso, o problema de valor inicial dado pela Eq. (3.2.2.10) fica bem posto, de modo que seja possível determinarmos de forma unívoca esses coeficientes para cada instante de tempo t . Assim, é possível obter:

$$i\hbar\dot{C}_n(t) = \sum_m C_m(t)\langle\phi_n|\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle \quad (3.2.2.11)$$

em que os termos:

$$\langle\phi_n|\hat{V}_I(t)|\phi_m\rangle \quad (3.2.2.12)$$

correspondem aos elementos de matriz do operador de perturbação na representação de interação. Recordando a definição do operador $\hat{V}_I(t)$:

$$\hat{V}_I(t) = e^{i\hat{H}_0t/\hbar}\hat{V}(t)e^{-i\hat{H}_0t/\hbar}$$

e utilizando a Eq. (3.2.2.2) e a relação:

$$\langle \phi_n | \hat{H}_0 = E_n \langle \phi_n |$$

será obtido:

$$\langle \phi_n | \hat{V}_I(t) | \phi_m \rangle = e^{iE_n t/\hbar} \langle \phi_n | \hat{V}(t) | \phi_m \rangle e^{-iE_m t/\hbar} = e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle \phi_n | \hat{V}(t) | \phi_m \rangle$$

Com isso, os elementos de matriz podem ser denotados como:

$$\langle \phi_n | \hat{V}_I(t) | \phi_m \rangle = e^{i\omega_{nm}t} \langle \phi_n | \hat{V}(t) | \phi_m \rangle \quad (3.2.2.13)$$

Após definir-se os elementos, o sistema de equações acopladas para os coeficientes dependentes do tempo define-se por:

$$i\hbar \dot{C}_n(t) = \sum_m C_m(t) e^{i\omega_{nm}t} \langle \phi_n | \hat{V}(t) | \phi_m \rangle \quad (3.2.2.14)$$

A equação obtida descreve completamente a evolução temporal das amplitudes de probabilidade induzidas pela perturbação externa.

3.3 Sistema de Dois Níveis com Perturbação Dependente do Tempo

O sistema quântico de dois níveis descreve adequadamente diversos fenômenos físicos fundamentais relacionados à interação entre a radiação eletromagnética e a matéria ⁴. Nesse modelo, considera-se que apenas dois estados quânticos são relevantes para a dinâmica temporal: o estado fundamental $|1\rangle$ e o estado excitado $|2\rangle$, com as suas respectivas energias E_1 e E_2 , sendo $E_2 > E_1$ (MAHON, 2011; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017). Na ausência de agentes externos, a Hamiltoniana não perturbada do sistema é expressa por:

$$\hat{H}_0 = E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2|. \quad (3.3.0.1)$$

Os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ constituem uma base ortonormal do espaço de Hilbert bidimensional ($\mathcal{H}$) e representam os autoestados de energia do sistema isolado. Sob a base desses autovetores, a Hamiltoniana livre assume uma representação matricial diagonal:

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3.0.2)$$

⁴Um átomo interagindo com um laser quase ressonante pode ser tratado como um sistema de dois níveis quando apenas um estado fundamental e um estado excitado são significativamente acoplados pela radiação, enquanto as demais transições permanecem desprezíveis.

o que evidencia a ausência de acoplamento entre os níveis de energia quando o sistema permanece isolado. Consequentemente, os estados evoluem temporalmente de maneira independente.

Entretanto, em aplicações físicas de grande interesse, como na interação de um átomo com um campo eletromagnético oscilante, torna-se necessário incluir o termo de interação dependente do tempo no operador Hamiltoniano total do sistema. Considerando uma perturbação harmônica clássica que acopla os níveis de energia, a Hamiltoniana total pode ser representada explicitamente na base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ por meio da matriz:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} E_1 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & E_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3.0.3)$$

onde E_1 e E_2 são as energias dos estados não perturbados, γ caracteriza a intensidade do acoplamento e ω denota a frequência angular do campo externo. Os elementos não diagonais dessa matriz desempenham o papel de conectar os estados quânticos, viabilizando a transferência de população por meio de processos induzidos de absorção e emissão de energia.

3.3.1 Evolução Temporal das Amplitudes de Probabilidade

Na representação de Schrödinger, o estado quântico do sistema de dois níveis pode ser escrito como uma superposição linear de seus estados estacionários de energia:

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle, \quad (3.3.1.1)$$

em que $C_1(t)$ e $C_2(t)$ são as amplitudes de probabilidade complexas dependentes do tempo. A dinâmica temporal desse vetor é regida pela equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle.$$

Ao substituir a expansão do estado na equação de movimento, obtém-se um sistema de equações diferenciais lineares acopladas para os coeficientes $C_1(t)$ e $C_2(t)$, cuja solução descreve detalhadamente a transferência de população entre os dois níveis energéticos induzida pelo campo externo.

Do ponto de vista físico, a interpretação dessas amplitudes está intimamente vinculada ao princípio de conservação de probabilidade. Os módulos ao quadrado, $|C_1(t)|^2$ e $|C_2(t)|^2$, representam, respectivamente, as probabilidades de se encontrar o sistema no estado fundamental ou no estado excitado em um dado instante t . Visto que o sistema deve se encontrar necessariamente em um dos dois estados quânticos disponíveis, a soma

dessas probabilidades deve permanecer constante e unitária ao longo de toda a evolução:

$$|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 = 1.$$

Essa condição assegura a normalização contínua do vetor de estado no espaço de Hilbert, constituindo uma consequência direta da natureza unitária do operador de evolução temporal.

Para completar a descrição do problema de valor inicial, assume-se como hipótese convencional que o sistema encontra-se inicialmente colapsado no menor nível de energia. Essa configuração fundamental é traduzida pelas condições iniciais:

$$C_1(0) = 1 \quad \text{e} \quad C_2(0) = 0,$$

o que implica diretamente em:

$$|C_1(0)|^2 = 1 \quad \text{e} \quad |C_2(0)|^2 = 0.$$

A partir desse cenário, a ação da perturbação externa quebra o regime estacionário do sistema isolado, provocando uma transferência sucessiva de população quântica em direção ao estado excitado. Esse mecanismo caracteriza dinamicamente o processo de excitação induzida por campos de radiação eletromagnética.

3.3.2 Oscilações de Rabi em Sistema de Dois Níveis

Quando o campo aplicado possui frequência próxima da frequência natural de transição do sistema, ocorre um acoplamento entre os estados de energia, permitindo a transferência periódica de população entre eles.

Considerando inicialmente o sistema preparado no estado fundamental, a evolução temporal das amplitudes de probabilidade é obtida pela solução da equação de Schrödinger dependente do tempo. A partir da aproximação da onda girante⁵, obtêm-se duas equações diferenciais acopladas para os coeficientes $C_1(t)$ e $C_2(t)$,

$$i\dot{C}_1(t) = \frac{\gamma}{2\hbar} e^{i\Delta t} C_2(t), \tag{3.3.2.1}$$

$$i\dot{C}_2(t) = \frac{\gamma}{2\hbar} e^{-i\Delta t} C_1(t), \tag{3.3.2.2}$$

onde $\Delta = \omega - \omega_0$ representa a dessintonia entre a frequência do campo aplicado e a frequência natural da transição.

⁵Na aproximação de onda girante (*Rotating Wave Approximation* – RWA), desprezam-se os termos oscilantes rápidos da interação, mantendo apenas aqueles que contribuem significativamente para a dinâmica próxima da ressonância (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

Derivando a segunda equação em relação ao tempo e utilizando a primeira para eliminar $C_1(t)$, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para a amplitude do estado excitado,

$$\ddot{C}_2 + i\Delta\dot{C}_2 + \frac{\gamma^2}{4\hbar^2}C_2 = 0. \quad (3.3.2.3)$$

Buscando soluções da forma

$$C_2(t) \propto e^{\lambda t}, \quad (3.3.2.4)$$

obtém-se a equação característica

$$\lambda^2 + i\Delta\lambda + \frac{\gamma^2}{4\hbar^2} = 0, \quad (3.3.2.5)$$

cujas raízes são

$$\lambda_{\pm} = -\frac{i\Delta}{2} \pm i\Omega, \quad (3.3.2.6)$$

onde foi definida a frequência generalizada de Rabi,

$$\Omega = \left(\frac{\gamma^2}{4\hbar^2} + \frac{\Delta^2}{4} \right)^{1/2}. \quad (3.3.2.7)$$

Aplicando as condições iniciais $C_1(0) = 1$ e $C_2(0) = 0$, encontra-se a solução para a amplitude associada ao estado excitado,

$$C_2(t) = -i \frac{\gamma/(2\hbar)}{\Omega} e^{-i\Delta t/2} \sin(\Omega t). \quad (3.3.2.8)$$

O módulo quadrado dessa amplitude fornece a probabilidade de encontrar o sistema no estado excitado em um instante t ,

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2. \quad (3.3.2.9)$$

Como o fator exponencial possui módulo unitário, a probabilidade depende apenas do termo oscilatório. Assim, obtém-se a equação,

$$P_2(t) = \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + \Delta^2/4} \sin^2 \left[\left(\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{\Delta^2}{4} \right)^{1/2} t \right], \quad (3.3.2.10)$$

conhecida como fórmula de Rabi.

Essa expressão descreve o comportamento oscilatório da população entre os dois estados quânticos. Em vez de permanecer permanentemente em um único nível de energia, o sistema alterna periodicamente entre os estados fundamental e excitado devido à interação com o campo externo.

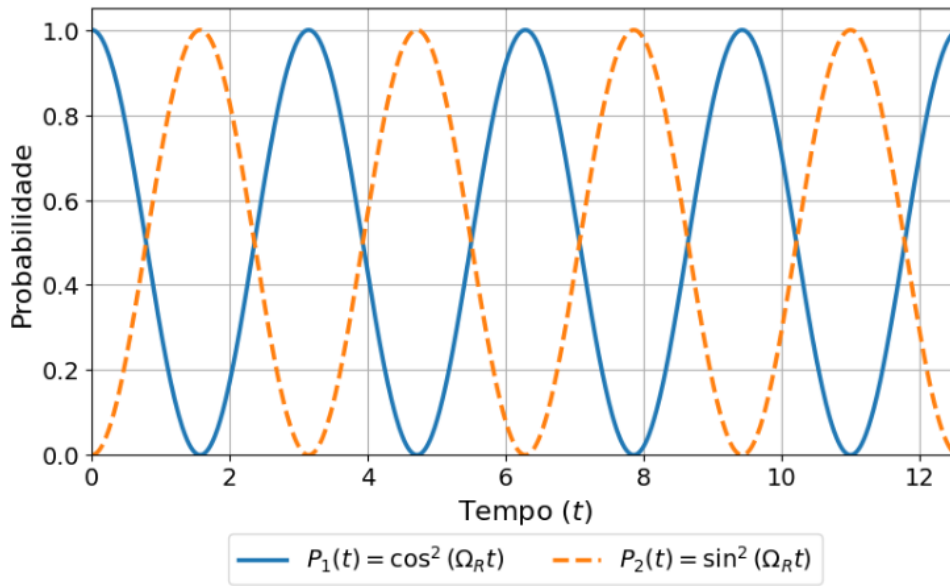
O parâmetro γ caracteriza a intensidade do acoplamento entre o campo eletromagnético e o sistema quântico, enquanto o parâmetro Δ *detuning*, mede a diferença entre a frequência do campo aplicado e a frequência natural da transição atômica. A presença de Δ modifica tanto a frequência quanto a amplitude das oscilações observadas.

Um caso particular de relevância ocorre quando o sistema se encontra em condição de ressonância, isto é, quando a frequência do campo coincide exatamente com a frequência de transição do sistema. Nessa situação, $\Delta = 0$, e a expressão (3.3.2.10) simplifica-se para

$$P_2(t) = \sin^2\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right), \quad (3.3.2.11)$$

No gráfico abaixo, observa-se que a probabilidade de excitação pode atingir o valor máximo $P_2 = 1$, evidenciando que, em condição de ressonância, ocorre transferência completa de população do estado fundamental para o estado excitado.

Figura 8: Probabilidades de ocupação dos estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ para um sistema de dois níveis em ressonância ($\Delta = 0$).



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

Demonstra como a interação coerente entre luz e matéria pode controlar a ocupação dos níveis energéticos de um sistema quântico.

A condição de ressonância corresponde à situação em que a energia dos fótons incidentes coincide exatamente com a diferença de energia entre os níveis do sistema,

$$\hbar\omega = E_1 - E_2 \quad (3.3.2.12)$$

nessas condições, a troca de energia entre o campo eletromagnético e o sistema quântico torna-se máxima, o que favorece a ocorrência de transições induzidas.

Quando o sistema encontra-se inicialmente no estado fundamental, a ação do campo eletromagnético pode promover a absorção de um fóton, transferindo a população para o estado excitado. Por outro lado, caso o sistema esteja inicialmente no estado excitado, o mesmo campo eletromagnético pode induzir uma transição para o estado fundamental. Durante esse processo ocorre a emissão de um fóton com a mesma frequência, fase, direção de propagação e polarização do campo incidente. Esse fenômeno é conhecido como emissão estimulada (MAHON, 2011).

A emissão estimulada possui uma importância particular porque o fóton emitido apresenta as mesmas características do fóton incidente. Como consequência, a radiação produzida mantém elevado grau de coerência, propriedade essencial para o funcionamento dos dispositivos laser (SCULLY; ZUBAIRY, 1997b).

Quando um sistema está sujeito a um campo magnético estático é perturbado por um campo magnético oscilante, assim, podendo ocorrer transições entre os níveis de energia que estão de forma estacionária.

Considerando inicialmente um sistema submetido a um campo magnético estático B_0 responsável pela definição dos níveis energéticos da interação de Zeeman. Sobre este campo, aplica-se uma perturbação magnética oscilante de amplitude B_1 ,

$$B(t) = 2B_1\hat{x}\cos(\omega t) \quad (3.3.2.13)$$

Uma perspectiva útil é decompor esse campo linearmente polarizado em duas componentes circularmente polarizadas que giram em sentidos opostos. Utilizando identidades trigonométrica, obtém-se

$$B_1(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t) + B_1(\hat{x}\cos\omega t - \hat{y}\sin\omega t) \quad (3.3.2.14)$$

A primeira componente descreve uma rotação anti-horária, enquanto a segunda corresponde a uma rotação horária. Apenas uma dessas componentes pode sincronizar-se com o movimento de precessão induzido pelo campo estático B_0 . Quando a frequência do campo aplicado coincide com a frequência natural de transição do sistema, estabelece-se a condição de ressonância, permitindo a transferência eficiente de energia entre o campo externo e o sistema quântico.

Para que a teoria de perturbações permaneça válida, a intensidade do campo perturbativo deve ser significativamente menor que a intensidade do campo estático responsável pela estrutura dos níveis energéticos, assim, $B_1 \ll B_0$. Nessa situação, a ação do campo oscilante pode ser tratada como uma pequena correção à dinâmica do sistema não perturbado.

3.4 Série de Dyson

Na maioria dos problemas físicos, a equação de Schrödinger dependente do tempo não admite solução analítica exata. Por esse motivo, procura-se construir uma solução aproximada por meio de uma expansão em potências da perturbação (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017). O parâmetro λ é o parâmetro perturbativo que organiza a expansão em ordens sucessivas denotadas por,

$$C_n(t) = C_n^{(0)}(t) + \lambda C_n^{(1)}(t) + \lambda^2 C_n^{(2)}(t) + \dots \quad (3.4.0.1)$$

O termo $C_n^{(0)}(t)$ descreve a evolução do sistema na ausência de perturbação. Os termos seguintes representam correções sucessivas produzidas pela interação externa. Quanto menor for a intensidade da perturbação, mais rapidamente a série converge e melhor será a aproximação obtida utilizando apenas os primeiros termos.

Uma formulação mais geral consiste em introduzir o operador de evolução temporal $U_I(t, t_0)$ na representação de interação, responsável por conectar o estado do sistema em dois instantes distintos. Assim, o estado do sistema, no quadro de interação, pode ser expresso como

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0)|\psi_I(t_0)\rangle. \quad (3.4.0.2)$$

Satisfazendo a seguinte equação diferencial com a condição inicial $U_I(t_0, t_0) = I$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0), \quad (3.4.0.3)$$

onde I é o operador identidade. Esta é a equação de Schrödinger para o operador de evolução na imagem de interação.

Desejamos mostrar que o estado

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0)|\psi_I(t_0)\rangle,$$

satisfaz a equação de Schrödinger na imagem de interação, garantindo a consistência da definição.

Partimos da equação de movimento do operador de evolução, Eq(3.4.0.3), aplicamos ambos os lados dessa equação ao estado inicial $|\psi_I(t_0)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [U_I(t, t_0)|\psi_I(t_0)\rangle] = V_I(t) U_I(t, t_0)|\psi_I(t_0)\rangle.$$

Por definição,

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0)|\psi_I(t_0)\rangle,$$

substituindo na equação, obtemos exatamente a equação de Schrödinger para o estado

$|\psi_I(t)\rangle$ na imagem de interação,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle,$$

como desejado.

Partindo da equação de Schrödinger no quadro de interação, a evolução temporal do sistema pode ser escrita de forma integral como

$$U_I(t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) U_I(t_1, t_0), \quad (3.4.0.4)$$

a qual vale para qualquer instante de tempo t . Em particular, para $t = t_1$ temos,

$$U_I(t_1, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_2) U_I(t_2, t_0), \quad (3.4.0.5)$$

pondo a Eq. (3.4.0.5) na Eq. (3.4.0.4) obtemos

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \left[I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_2) U_I(t_2, t_0) \right] \\ &= I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) U_I(t_2, t_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$U_I(t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) U_I(t_2, t_0). \quad (3.4.0.6)$$

Agora, substituimos novamente a expressão formal para $U_I(t_2, t_0)$

$$U_I(t_2, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_2} dt_3 V_I(t_3) U_I(t_3, t_0).$$

Inserindo na Eq.(3.4.0.6),

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) \left[I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_2} dt_3 V_I(t_3) U_I(t_3, t_0) \right]. \end{aligned}$$

Realizando distribuição,

$$\begin{aligned}
U_I(t, t_0) = & I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \\
& + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) I \\
& + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 V_I(t_1) V_I(t_2) V_I(t_3) U_I(t_3, t_0),
\end{aligned}$$

obtemos a equação explicitamente.

A Série de Dyson constitui a base da teoria de perturbação dependente do tempo, permitindo construir sistematicamente correções de ordem arbitrária para a evolução temporal do sistema. Cada termo da expansão corresponde a uma ordem sucessiva da interação e descreve processos envolvendo múltiplas atuações da perturbação sobre o estado quântico.

3.4.1 Amplitudes de Transição na Representação de Interação

Para aplicações práticas, é conveniente expandir o estado quântico na base completa dos autoestados da Hamiltoniana não perturbada (H_0). Os coeficientes da expansão são as amplitudes de probabilidade ($C_n(t)$), cuja evolução temporal é governada pela perturbação.

Na representação de interação, a amplitude de transição $C_{n \leftarrow i}$ do estado inicial $|i\rangle$ para o estado final $|n\rangle$ é definida por,

$$C_{n \leftarrow i}(t) = \langle \psi_n | U_I(t, t_0) | \psi_i \rangle. \quad (3.4.1.1)$$

Expandindo o operador de evolução em série de Dyson,

$$U_I(t, t_0) = I + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^m \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{m-1}} dt_m V_I(t_1) V_I(t_2) \cdots V_I(t_m), \quad (3.4.1.2)$$

obtem-se a expansão perturbativa das amplitudes,

$$C_{n \leftarrow i}(t) = C_{n \leftarrow i}^{(0)}(t) + C_{n \leftarrow i}^{(1)}(t) + C_{n \leftarrow i}^{(2)}(t) + \cdots, \quad (3.4.1.3)$$

onde cada termo corresponde a uma ordem específica da interação.

Ordem zero: O termo de ordem zero corresponde ao operador identidade

$$C_{n \leftarrow i}^{(0)}(t) = \langle \psi_n | I | \psi_i \rangle = \langle \psi_n | \psi_i \rangle = \delta_{ni}. \quad (3.4.1.4)$$

Assim, em ordem zero, a transição só ocorre se o estado final for igual ao estado inicial.

Primeira ordem: O termo de primeira ordem é dado por

$$C_{n \leftarrow i}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \langle \psi_n | V_I(t_1) | \psi_i \rangle. \quad (3.4.1.5)$$

Usando a definição de $V_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} V e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}$, e inserindo as energias E_i e E_n dos estados $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_n\rangle$, obtemos,

$$\langle \psi_n | V_I(t_1) | \psi_i \rangle = e^{i(E_n - E_i)(t_1 - t_0)/\hbar} \langle \psi_n | V | \psi_i \rangle \equiv e^{i\omega_{ni}(t_1 - t_0)} V_{ni},$$

onde definimos $\omega_{ni} = (E_n - E_i)/\hbar$ e $V_{ni} = \langle \psi_n | V | \psi_i \rangle$.

Portanto,

$$C_{n \leftarrow i}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_{t_0}^t dt_1 e^{i\omega_{ni}(t_1 - t_0)}. \quad (3.4.1.6)$$

A amplitude de primeira ordem descreve uma transição direta do estado inicial $|i\rangle$ para o estado final $|n\rangle$ por meio de uma única atuação da perturbação. O fator $e^{i\omega_{ni}t'}$ incorpora a diferença de energia entre os estados, e a integral temporal acumula as contribuições da perturbação ao longo do tempo.

Segunda ordem: O termo de segunda ordem é

$$C_{n \leftarrow i}^{(2)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \langle \psi_n | V_I(t_1) V_I(t_2) | \psi_i \rangle. \quad (3.4.1.7)$$

Inserindo uma resolução da identidade $\sum_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| = I$ entre os operadores $V_I(t_1)$ e $V_I(t_2)$:

$$\langle \psi_n | V_I(t_1) V_I(t_2) | \psi_i \rangle = \sum_m \langle \psi_n | V_I(t_1) | \psi_m \rangle \langle \psi_m | V_I(t_2) | \psi_i \rangle.$$

Usando novamente a expressão para os elementos de matriz na imagem de interação,

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | V_I(t_1) | \psi_m \rangle &= e^{i(E_n - E_m)(t_1 - t_0)/\hbar} V_{nm}, \\ \langle \psi_m | V_I(t_2) | \psi_i \rangle &= e^{i(E_m - E_i)(t_2 - t_0)/\hbar} V_{mi}. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\langle \psi_n | V_I(t_1) V_I(t_2) | \psi_i \rangle = \sum_m V_{nm} V_{mi} e^{i\omega_{nm}(t_1 - t_0)} e^{i\omega_{mi}(t_2 - t_0)}.$$

Portanto, a amplitude de segunda ordem fica,

$$C_{n \leftarrow i}^{(2)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m V_{nm} V_{mi} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 e^{i\omega_{nm}(t_1 - t_0)} e^{i\omega_{mi}(t_2 - t_0)}. \quad (3.4.1.8)$$

Ordem geral: Seguindo o mesmo procedimento, o termo de ordem k pode ser escrito como:

$$C_{n \leftarrow i}^{(k)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^k \sum_{m_1, m_2, \dots, m_{k-1}} V_{nm_{k-1}} V_{m_{k-1}m_{k-2}} \cdots V_{m_1 i} \times \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k e^{i\omega_{nm_{k-1}} t_1} e^{i\omega_{m_{k-1}m_{k-2}} t_2} \cdots e^{i\omega_{m_1 i} t_k}. \quad (3.4.1.9)$$

3.4.2 Probabilidades de Transição

Uma das principais aplicações da Série de Dyson consiste no cálculo das probabilidades de transição entre estados quânticos. Considere um sistema inicialmente preparado em um estado $|i\rangle$. Sob a ação da perturbação, existe uma certa probabilidade de o sistema ser encontrado posteriormente em outro estado $|f\rangle$.

Na aproximação de primeira ordem, a amplitude de transição é dada por

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle f | \hat{V}_I(t') | i \rangle dt'. \quad (3.4.2.1)$$

A quantidade,

$$V_{fi}(t) = \langle f | \hat{V}_I(t) | i \rangle \quad (3.4.2.2)$$

corresponde ao elemento de matriz da perturbação entre os estados inicial e final. Dessa forma, a amplitude de transição pode ser reescrita como

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{fi}(t') dt'. \quad (3.4.2.3)$$

Deste modo, a probabilidade de transição é obtida pelo quadrado do módulo da amplitude,

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \left| c_f^{(1)}(t) \right|^2. \quad (3.4.2.4)$$

Demonstrando que a probabilidade de transição depende diretamente do acoplamento entre os estados inicial e final, representado pelo elemento de matriz da interação.

Quando a frequência do campo externo coincide com a frequência natural associada à diferença de energia entre os estados, a amplitude de transição torna-se máxima. Esse comportamento caracteriza a condição de ressonância e explica por que determinados comprimentos de onda são absorvidos ou emitidos com maior intensidade.

3.4.3 Transições Induzidas por uma Perturbação Dependente do Tempo

Uma das aplicações mais importantes da Teoria de Perturbações Dependentes do Tempo consiste no cálculo das probabilidades de transição entre diferentes estados quânticos. Considere um sistema inicialmente preparado em um autoestado $|i\rangle$ da Hamiltoniana não perturbada. A ação de uma perturbação dependente do tempo pode induzir a transição para um estado final $|f\rangle$, modificando a distribuição de probabilidades do sistema.

Na aproximação de primeira ordem, a amplitude de transição é dada por

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle f | \hat{V}_I(t') | i \rangle dt'. \quad (3.4.3.1)$$

Quando a perturbação possui caráter harmônico, o potencial deve ser escrito como

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_0 e^{-i\omega t} + \hat{V}_0^\dagger e^{i\omega t}, \quad (3.4.3.2)$$

de modo a garantir a hermiticidade do Hamiltoniano total. Assim, os elementos de matriz da interação assumem a forma

$$\langle f | \hat{V}(t) | i \rangle = V_{fi} e^{-i\omega t} + V_{fi}^* e^{i\omega t}, \quad (3.4.3.3)$$

onde $V_{fi} = \langle f | \hat{V}_0 | i \rangle$, representa a intensidade do acoplamento entre os estados envolvidos na transição.

Substituindo essa expressão na amplitude de primeira ordem e efetuando a integração temporal, obtém-se

$$c_f^{(1)}(t) = \frac{V_{fi}}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} - 1}{\omega_{fi} - \omega}, \quad (3.4.3.4)$$

no qual,

$$\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} \quad (3.4.3.5)$$

é a frequência natural associada à diferença de energia entre os estados inicial e final.

A probabilidade de transição é dada pela Eq. (3.4.2.4) que resulta em

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 [(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)^2/4}. \quad (3.4.3.6)$$

Essa expressão apresenta um comportamento extremamente importante, quando a frequência da perturbação aproxima-se da frequência natural da transição, o denominador torna-se pequeno e a probabilidade de transição aumenta significativamente.

A condição $\omega \approx \omega_{fi}$ define o regime de ressonância, no qual a transferência de energia entre o campo externo e o sistema quântico torna-se máxima.

A dependência temporal da probabilidade de transição é governada pela função

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = \text{sinc}^2(x),$$

conhecida como função seno quadrada. Essa função apresenta um máximo em torno de $x = 0$, indicando que as transições são fortemente favorecidas quando a frequência da perturbação coincide com a frequência natural do sistema.

À medida que o tempo de interação aumenta, o pico central torna-se progressivamente mais estreito e elevado, aproximando-se de uma distribuição delta de Dirac,

$$\delta(\omega_{fi} - \omega).$$

Esse resultado mostra que apenas frequências muito próximas da condição de ressonância contribuem significativamente para as transições quânticas.

3.4.4 Regra de Ouro de Fermi

A análise das probabilidades de transição induzidas por uma perturbação dependente do tempo conduz a um dos resultados mais importantes: a Regra de Ouro de Fermi. Esse resultado descreve a taxa com que um sistema quântico realiza transições entre estados de energia sob a ação de uma perturbação externa.

Considere uma perturbação constante (independente do tempo) $\hat{V}(t) = \hat{V}$. A amplitude de transição de primeira ordem do estado inicial $|i\rangle$ para o estado final $|n\rangle$ é:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | \hat{V} | i \rangle e^{i\omega_{ni}t'} dt', \quad (3.4.4.1)$$

onde $\omega_{ni} = (E_n - E_i)/\hbar$ e $V_{ni} = \langle n | \hat{V} | i \rangle$.

Como V_{ni} é constante, ele sai da integral, respectivamente,

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} dt'. \quad (3.4.4.2)$$

Realizando a integral sem a presença da constante,

$$\int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} dt' = \left[\frac{e^{i\omega_{ni}t'}}{i\omega_{ni}} \right]_0^t = \frac{e^{i\omega_{ni}t} - 1}{i\omega_{ni}}.$$

Assim,

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \cdot \frac{e^{i\omega_{ni}t} - 1}{i\omega_{ni}} = -\frac{V_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} (e^{i\omega_{ni}t} - 1).$$

Fatorando as exponenciais $e^{i\omega_{ni}t/2}$,

$$e^{i\omega_{ni}t} - 1 = e^{i\omega_{ni}t/2} (e^{i\omega_{ni}t/2} - e^{-i\omega_{ni}t/2}) = e^{i\omega_{ni}t/2} \cdot 2i \sin\left(\frac{\omega_{ni}t}{2}\right),$$

podemos reescreve-la,

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{V_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} \cdot e^{i\omega_{ni}t/2} \cdot 2i \sin\left(\frac{\omega_{ni}t}{2}\right) = -\frac{2iV_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} e^{i\omega_{ni}t/2} \sin\left(\frac{\omega_{ni}t}{2}\right).$$

Como a probabilidade de transição é o módulo quadrado da amplitude

$$P_{i \rightarrow n}(t) = |c_n^{(1)}(t)|^2 = \left| -\frac{2iV_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} e^{i\omega_{ni}t/2} \sin\left(\frac{\omega_{ni}t}{2}\right) \right|^2. \quad (3.4.4.3)$$

Sabendo que, $|-2i|^2 = 4$ e $|e^{i\omega_{ni}t/2}|^2 = 1$,

$$P_{i \rightarrow n}(t) = \frac{4|V_{ni}|^2}{\hbar^2\omega_{ni}^2} \sin^2\left(\frac{\omega_{ni}t}{2}\right). \quad (3.4.4.4)$$

Escrevendo em termos da energia e substituindo $\omega_{ni} = (E_n - E_i)/\hbar$, temos,

$$\omega_{ni}^2 = (E_n - E_i)^2/\hbar^2,$$

$$\sin^2(\omega_{ni}t/2) = \sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right),$$

ao substituir as expressões na equação de probabilidade, obtem-se

$$P_{i \rightarrow n}(t) = \frac{4|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar^2}{(E_n - E_i)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right).$$

Por fim, podemos simplificar os índices de $\hbar^2$, resultando em,

$$P_{i \rightarrow n}(t) = \frac{4|V_{ni}|^2}{(E_n - E_i)^2} \sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right). \quad (3.4.4.5)$$

Definimos $x = (E_n - E_i)t/(2\hbar)$. Para t grande, a função $\sin^2(x)/x^2$ se comporta como uma delta de Dirac. É sabido ao leitor que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xt)}{\pi t x^2} = \delta(x).$$

Ajustando para nossa expressão, podemos observar uma nova expressão dada como,

$$\frac{\sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)}{(E_n - E_i)^2} = \frac{t^2}{4\hbar^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)^2}.$$

Tomando o limite $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)}{(E_n - E_i)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{4\hbar^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)^2},$$

usando a propriedade da delta,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right)}{(E_n - E_i)^2} = \frac{t^2}{4\hbar^2} \cdot \pi t \cdot \delta \left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right).$$

É importante destacar que a forma padrão da literatura é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\omega^2} = \frac{\pi t}{2} \delta(\omega), \quad (3.4.4.6)$$

esta é a relação que iremos utilizar. Como $\omega = (E_n - E_i)/\hbar$, detemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right)}{(E_n - E_i)^2 / \hbar^2} = \frac{\pi t}{2} \delta \left(\frac{E_n - E_i}{\hbar} \right),$$

multiplicando ambos os lados por $1/\hbar^2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right)}{(E_n - E_i)^2} = \frac{\pi t}{2\hbar^2} \delta \left(\frac{E_n - E_i}{\hbar} \right),$$

usando a propriedade da delta $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$, com $a = 1/\hbar$:

$$\delta \left(\frac{E_n - E_i}{\hbar} \right) = \hbar \delta(E_n - E_i).$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right)}{(E_n - E_i)^2} = \frac{\pi t}{2\hbar^2} \cdot \hbar \delta(E_n - E_i) = \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(E_n - E_i), \quad (3.4.4.7)$$

a equação nos diz que, para tempos longos, a probabilidade de transição é significativa apenas quando $E_n = E_i$, ou seja, quando há conservação de energia. A delta de Dirac $\delta(E_n - E_i)$ impõe esta condição.

Na prática, o estado final não é um único estado discreto, mas um contínuo de estados. Por exemplo, em um sólido ou em um feixe de partículas, existem muitos estados finais com energias próximas.

Precisamos integrar sobre todos eles. Inicialmente introduzimos a densidade de estados finais $\rho(E_n)$, que é o número de estados por unidade de energia na vizinhança de E_n :

$$\rho(E_n) = \frac{dN}{dE_n}.$$

A probabilidade total de transição do estado $|i\rangle$ para qualquer estado final é

$$P(t) = \int P_{i \rightarrow n}(t) \rho(E_n) dE_n,$$

substituindo a Eq.(3.4.4.5) e usando o limite da Eq.(3.4.4.7) para tempos longos,

$$P(t) = \int \frac{4|V_{ni}|^2}{(E_n - E_i)^2} \sin^2 \left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right) \rho(E_n) dE_n,$$

para t suficientemente grande, podemos substituir a função pelo seu limite (3.4.4.7),

$$P(t) = \int \frac{4|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(E_n - E_i) \rho(E_n) dE_n.$$

Note que o fator $4/\hbar^2$ vem da expressão original: $P_{i \rightarrow n}(t) = \frac{4|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(E_n - E_i)$.

Simplificando as constantes:

$$P(t) = \int \frac{2\pi t}{\hbar^3} |V_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i) \rho(E_n) dE_n.$$

A integral sobre a distribuição delta de Dirac elimina a integral, avaliando o integrando em $E_n = E_i$,

$$P(t) = \frac{2\pi t}{\hbar^3} |V_{ni}|^2 \rho(E_i). \quad (3.4.4.8)$$

A expressão acima tem um fator $\hbar^3$ no denominador, enquanto a forma padrão da Regra de Ouro de Fermi tem $\hbar$. Isso ocorre porque usamos uma definição específica da perturbação. A forma padrão é:

$$P(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 \rho(E_i) t. \quad (3.4.4.9)$$

Esta é a expressão encontrada na literatura. Adotaremos esta forma, que é obtida quando a perturbação é definida como $\hat{V}(t) = 2\hat{V} \cos(\omega t)$ e se utiliza a aproximação de onda girante.

A taxa de transição Γ é definida como a probabilidade de transição por unidade de tempo:

$$\Gamma = \frac{dP}{dt}.$$

Derivando a Eq.(3.4.4.9) em relação ao tempo,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 \rho(E_i). \quad (3.4.4.10)$$

A Eq.(3.4.4.10) é a Regra de Ouro de Fermi:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 \rho(E_i). \quad (3.4.4.11)$$

A Regra de Ouro de Fermi mostra como as probabilidades de transição obtidas pela teoria de perturbações dependentes do tempo podem ser convertidas em taxas de transição observáveis experimentalmente. Sua importância reside no fato de estabelecer uma

conexão direta entre a descrição microscópica da interação quântica e fenômenos macroscópicos mensuráveis, permitindo prever com que frequência um sistema realiza transições entre diferentes estados de energia.

Do ponto de vista físico, esse resultado fornece a base teórica para a compreensão de diversos processos fundamentais envolvendo a interação entre radiação e matéria. Em particular, ela permite calcular taxas de absorção, emissão estimulada e emissão espontânea, fenômenos que constituem os mecanismos elementares responsáveis pelo funcionamento dos lasers. Além disso, a Regra de Ouro de Fermi desempenha papel central na descrição de decaimentos radioativos, espalhamento de partículas e processos de relaxação em sistemas quânticos.

3.4.5 Perturbação Harmônica

Até este ponto, discutimos a teoria de perturbações dependentes do tempo em sua forma geral. Entretanto, para descrever a interação entre um átomo e uma onda eletromagnética, é necessário considerar uma perturbação que varie periodicamente no tempo. Isso ocorre porque os campos elétrico e magnético associados à radiação eletromagnética apresentam comportamento oscilatório, caracterizado por uma frequência angular bem definida.

Do ponto de vista físico, é interessante compreender como um campo eletromagnético pode induzir transições entre diferentes estados de energia de um sistema quântico. Essas transições constituem a base dos fenômenos de absorção, emissão espontânea e emissão estimulada, fundamentais para a compreensão do funcionamento dos lasers e da interação entre luz e matéria.

Considerando um sistema inicialmente preparado em um estado $|i\rangle$ de energia E_i . Quando submetido a uma perturbação oscilatória de frequência ω , o sistema pode realizar transições para um estado final $|f\rangle$ de energia E_f . A condição para que essas transições ocorram com maior probabilidade é que a frequência da perturbação seja próxima da frequência associada à diferença de energia entre os estados,

$$\hbar\omega \approx E_f - E_i.$$

Segundo (MAHON, 2011; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017), uma perturbação harmônica é aquela que varia no tempo de forma oscilatória com frequência ω , sendo frequentemente utilizada para descrever a interação de um sistema quântico com um campo eletromagnético monocromático. Sua forma geral é descrita tal que,

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}e^{i\omega t} + \mathbf{V}^\dagger e^{-i\omega t}, \quad (3.4.5.1)$$

onde V é um operador independente do tempo. O primeiro termo ($e^{i\omega t}$) está associado à

emissão de energia $\hbar\omega$ pelo sistema, enquanto o segundo ($e^{-i\omega t}$) está associado à absorção de energia $\hbar\omega$.

A amplitude de transição de primeira ordem do estado inicial $|i\rangle$ para o estado final $|n\rangle$ é dada por:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | \mathbf{V}(t') | i \rangle e^{i\omega_{ni}t'} dt', \quad (3.4.5.2)$$

onde $\omega_{ni} = (E_n - E_i)/\hbar$. Substituindo a forma de $\mathbf{V}(t)$:

$$\langle n | \mathbf{V}(t') | i \rangle = V_{ni} e^{i\omega t'} + V_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'}, \quad (3.4.5.3)$$

com $V_{ni} = \langle n | \mathbf{V} | i \rangle$ e $V_{ni}^\dagger = \langle n | \mathbf{V}^\dagger | i \rangle = \langle i | \mathbf{V} | n \rangle^*$.

Assim:

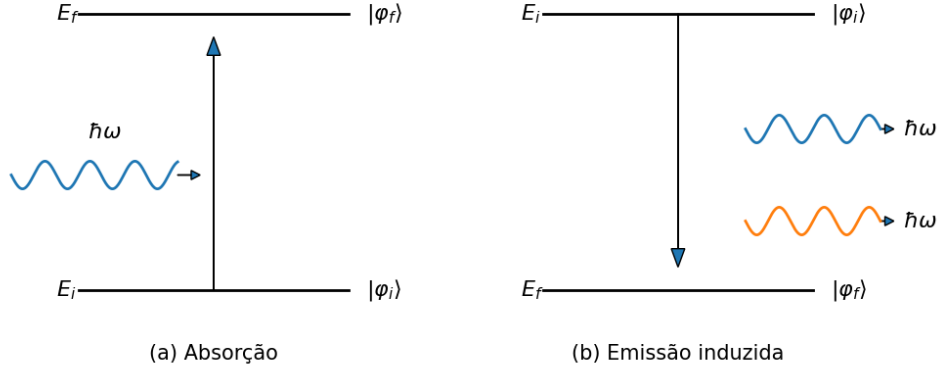
$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t (V_{ni} e^{i\omega t'} + V_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'}) e^{i\omega_{ni}t'} dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[V_{ni} \int_0^t e^{i(\omega_{ni}+\omega)t'} dt' + V_{ni}^\dagger \int_0^t e^{i(\omega_{ni}-\omega)t'} dt' \right] \\ &= \frac{1}{\hbar} \left[V_{ni} \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}}{\omega_{ni} + \omega} + V_{ni}^\dagger \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}}{\omega_{ni} - \omega} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.5.4)$$

A probabilidade de transição é $P_{i \rightarrow n}(t) = |c_n^{(1)}(t)|^2$. Para tempos longos, o termo dominante ocorre quando o denominador se anula, ou seja, quando $\omega_{ni} \pm \omega \approx 0$. Isso corresponde a as seguintes descrições:

- Absorção: $E_n = E_i + \hbar\omega$ (termo com $V_{ni}^\dagger$)
- Emissão induzida: $E_n = E_i - \hbar\omega$ (termo com V_{ni})

As duas possibilidades de transição induzidas pela perturbação harmônica estão ilustradas na figura abaixo. No processo de absorção, o sistema absorve um fóton de energia $\hbar\omega$ do campo externo, realizando uma transição para um estado de maior energia. Já na emissão induzida, o sistema decai para um estado de menor energia, emitindo um fóton de energia $\hbar\omega$ para o campo.

Figura 9: Transição entre estado fundamental e excitado.



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

A taxa de transição (probabilidade por unidade de tempo) é obtida pela regra de ouro de Fermi,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left[|V_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar\omega) + |V_{ni}^\dagger|^2 \delta(E_n - E_i + \hbar\omega) \right]. \quad (3.4.5.5)$$

Como $|V_{ni}^\dagger|^2 = |V_{ni}|^2$, então,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 [\delta(E_n - E_i - \hbar\omega) + \delta(E_n - E_i + \hbar\omega)]. \quad (3.4.5.6)$$

A amplitude de segunda ordem é dada denotada através da equação,

$$c_n^{(2)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle n | \mathbf{V}(t_1) | m \rangle \langle m | \mathbf{V}(t_2) | i \rangle e^{i\omega_{nm}t_1} e^{i\omega_{mi}t_2}. \quad (3.4.5.7)$$

Substituindo na Eq. (3.4.5.1), cada elemento de matriz contribui com dois termos. A expressão geral envolve quatro combinações,

$$c_n^{(2)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i\omega_{nm}t_1} e^{i\omega_{mi}t_2} \times (V_{nm}e^{i\omega t_1} + V_{nm}^\dagger e^{-i\omega t_1}) (V_{mi}e^{i\omega t_2} + V_{mi}^\dagger e^{-i\omega t_2}). \quad (3.4.5.8)$$

Os termos de interesse são aqueles que permitem conservação de energia na transição total,

- Absorção de dois fótons: $E_n = E_i + 2\hbar\omega$ (termo $V_{nm}V_{mi}e^{i\omega(t_1+t_2)}$).
- Emissão de dois fótons: $E_n = E_i - 2\hbar\omega$ (termo $V_{nm}^\dagger V_{mi}^\dagger e^{-i\omega(t_1+t_2)}$).
- Absorção seguida de emissão: $E_n = E_i$ (termos cruzados).

A taxa de transição de segunda ordem para absorção de dois fótons é,

$$\Gamma^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_m \frac{V_{nm}V_{mi}}{E_m - E_i - \hbar\omega} \right|^2 \delta(E_n - E_i - 2\hbar\omega). \quad (3.4.5.9)$$

Em um caso estático para $\omega = 0$, a perturbação se reduz a

$$V(t) = V + V^\dagger, \quad (3.4.5.10)$$

ou seja, uma perturbação constante (independente do tempo). Neste caso, a amplitude de primeira ordem torna-se,

$$c_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\hbar} (V_{ni} + V_{ni}^\dagger) \frac{1 - e^{i\omega_{ni}t}}{\omega_{ni}}. \quad (3.4.5.11)$$

Para $\omega_{ni} \neq 0$, a probabilidade oscila no tempo, mas não há transições reais (conservação de energia) a menos que $E_n = E_i$. No entanto, mesmo quando $\omega_{ni} \neq 0$, a segunda ordem permite contribuições mesmo sem conservação de energia em cada etapa individual.

Essas são as chamadas transições virtuais, a denominação "virtual" decorre do fato de que o sistema não permanece observavelmente no estado intermediário. Durante o processo, o sistema passa por uma configuração cuja energia não coincide com nenhum autoestado físico acessível do Hamiltoniano não perturbado. Em outras palavras, a conservação de energia não é satisfeita em cada etapa separadamente da transição, mas apenas entre os estados inicial e final do processo completo ⁶.

Por exemplo, no termo de segunda ordem com $\omega = 0$,

$$c_n^{(2)}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i\omega_{nm}t_1} e^{i\omega_{mi}t_2} (V_{nm} + V_{nm}^\dagger) (V_{mi} + V_{mi}^\dagger). \quad (3.4.5.12)$$

Mesmo quando $E_n \neq E_i$, a amplitude de transição de segunda ordem continua recebendo contribuições de estados intermediários $|m\rangle$. Diferentemente das transições de primeira ordem, nas quais a condição de conservação de energia desempenha papel central, em segunda ordem o sistema pode evoluir temporariamente por estados cuja energia não coincide com a energia inicial nem com a energia final do processo. Esses estados intermediários são denominados estados virtuais.

Um estado virtual não corresponde a um estado observável do sistema, o sistema não permanece nesse estado por um tempo suficiente para que ele possa ser detectado experimentalmente, em vez disso, o estado virtual surge apenas como uma etapa intermediária do processo quântico completo, contribuindo para a amplitude de transição entre

⁶A conservação da energia é satisfeita no processo físico completo. Nas etapas intermediárias da descrição perturbativa podem surgir estados virtuais que não obedecem individualmente à condição de conservação de energia, mas esses estados não são observáveis e não correspondem a estados físicos do sistema.

os estados inicial e final.

4 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Nas seções anteriores, o campo eletromagnético foi tratado classicamente, embora essa abordagem semiclássica de um átomo quântico e um campo clássico seja suficiente para descrever fenômenos como absorção e emissão estimulada, ela apresenta limitações fundamentais. Em particular, a emissão espontânea, processo no qual um átomo excitado decai para um estado de menor energia na ausência de um campo externo, não pode ser explicada sem a quantização do campo.

Nesta seção, será apresentado sobre quantização do campo eletromagnético, tratando a radiação eletromagnética de forma quântica, permitindo descrever fenômenos que não podem ser descritos adequadamente pela teoria clássica (MAHON, 2011).

Ao estudar um sistema formado por átomos interagindo com a radiação, a Hamiltoniana total pode ser escrita como a soma de três contribuições distintas, $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_I$, onde $\hat{H}_A$ descreve os graus de liberdade atômicos, $\hat{H}_F$ corresponde à energia do campo eletromagnético e $\hat{H}_I$ representa a interação entre matéria e radiação.

A Hamiltoniana atômica pode ser expressa na forma

$$\hat{H}_A = \sum_i \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m_e} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (4.0.0.1)$$

onde o primeiro termo corresponde à energia cinética dos elétrons, V_{ext} representa o potencial externo e $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ descreve as interações entre partículas.

A energia armazenada no campo eletromagnético é dada classicamente por

$$H_F = \frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) d^3r, \quad (4.0.0.2)$$

essa expressão mostra que a energia total do campo encontra-se distribuída entre os campos elétrico e magnético.

A interação entre o campo eletromagnético e os elétrons pode ser obtida por meio do acoplamento mínimo, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, resultando na Hamiltoniana de interação

$$\hat{H}_I = \sum_i \left[-\frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 - \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right], \quad (4.0.0.3)$$

o primeiro termo descreve o acoplamento entre o campo e o momento linear dos elétrons, enquanto o último representa a interação entre o campo magnético e o spin eletrônico.

4.1 Potenciais Eletromagnéticos

Na ausência de cargas e correntes livres, $\rho = 0$, $J = 0$ as equações de Maxwell assumem uma forma particularmente simples. Em eletrodinâmica clássica, os campos elétrico E e

magnético B podem ser escritos em termos do potencial escalar Φ e do potencial vetor $\vec{A}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}\tag{4.1.0.1}$$

Essa representação não é única. Diferentes escolhas de potenciais podem produzir os mesmos campos físicos, caracterizando a chamada invariância de calibre.

Para a quantização do campo, utiliza-se frequentemente o calibre de Coulomb, $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, na ausência de cargas, essa condição implica $\Phi = 0$, de modo que toda a dinâmica do campo passa a ser descrita exclusivamente pelo potencial vetor. Ressalta-se, contudo, que a escolha do calibre é uma questão de conveniência matemática, a teoria pode ser formulada em qualquer gauge, e as grandezas físicas observáveis permanecem invariantes sob transformações de calibre.

A equação de onda para potencial vetor assume

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0,\tag{4.1.0.2}$$

De início, buscaremos soluções estacionárias para o potencial vetor. Ou seja, estamos interessados em soluções do tipo:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = X(\vec{r}) \cdot \Phi(t) \hat{e}.\tag{4.1.0.3}$$

Estabelecido isso, nós obtemos, ao levar a Eq. (4.1.0.3) na Eq. (4.1.0.2) e prosseguindo com o processo de separação de variáveis, as seguintes equações:

$$\frac{\nabla^2 X(\vec{r})}{X(\vec{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\Phi(t)} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} = -k^2 \implies \begin{cases} \nabla^2 X(\vec{r}) + k^2 X(\vec{r}) = 0, \\ \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + c^2 k^2 \Phi(t) = 0. \end{cases}\tag{4.1.0.4}$$

Perceba, que a equação para a parte temporal obtida na Eq. (4.1.0.4) corresponde a equação de um Oscilador Harmônico simples, tendo então como solução geral dada por:

$$\Phi(t) = A_k e^{-i\omega_k t} + B_k e^{i\omega_k t}.\tag{4.1.0.5}$$

Por outro lado, a parte espacial corresponde a uma equação de Helmholtz, sendo necessário que consideremos condições de contorno adequadas para sua solução. Tendo isso em vista, vamos considerar a situação em que o campo eletromagnético é confinado em uma cavidade cúbica de lado L_j , sendo $j \in \{x, y, z\}$. Com isso, podemos escrever as soluções da parte espacial da Eq. (4.1.0.4) como:

$$X(\vec{r}) = C_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + D_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}.\tag{4.1.0.6}$$

Então, usando as Eq. (4.1.0.5) e a Eq. (4.1.0.6) nós podemos obter que a forma do potencial vetor é dada como ondas planas progressivas, que constituem uma base completa para o espaço de soluções da equação de onda. Para um modo com vetor de onda $\vec{k}$ e polarização $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}$, escrevemos uma solução particular como:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) &= X(\vec{r})\Phi(t)\hat{\epsilon}_{\vec{k}} \\ &= \left(A_k e^{-i\omega_k t} + B_k e^{i\omega_k t}\right) \cdot \left(C_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + D_k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \\ &= \vec{A}_{\vec{k}}^{(0)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \vec{A}_{\vec{k}}^{(0)*} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)},\end{aligned}$$

onde $\omega_k = c|\vec{k}|$ é a frequência angular do modo. Como a equação de onda é linear e homogênea, a solução geral pode ser escrita como uma superposição linear de todos os modos permitidos,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, |\vec{k}|>0} \left[C_{\vec{k}}(t) \hat{\epsilon}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + C_{-\vec{k}}^*(t) \hat{\epsilon}_{-\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right],$$

ou, de forma mais compacta:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}}(t) \hat{\epsilon}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (4.1.0.7)$$

em que o índice $\vec{k}$ percorre todos os vetores de módulos positivos e negativos dos momentos associados aos vetores de propagação do potencial vetor. De fato, o vetor $\vec{k}$ caracteriza o modo de propagação da onda, enquanto $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}$ representa seu vetor de polarização.

Substituindo essa expansão na condição de calibre de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, obtém-se:

$$\vec{k} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}} = 0$$

Esse resultado demonstra que o vetor de polarização é perpendicular ao vetor de propagação. Fisicamente, isso significa que as ondas eletromagnéticas são transversais.

Para cada vetor de onda $\vec{k}$ existem duas polarizações independentes, $\hat{\epsilon}_{\vec{k},1}$ e $\hat{\epsilon}_{\vec{k},2}$, que satisfazem as relações de ortonormalidade

$$\hat{\epsilon}_{\vec{k},\alpha} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k},\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

Em uma cavidade de dimensões finitas, as condições de contorno impõem que apenas determinados modos possam existir. Os componentes do vetor de onda tornam-se discretos,

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}$$

onde n_x , n_y e n_z são números inteiros.

4.2 Quantização dos Modos do Campo

Os modos do campo eletromagnético são as diferentes formas independentes pelas quais o campo pode oscilar e se propagar no espaço. Cada modo é caracterizado por uma frequência ω_k um vetor de onda $\mathbf{k}$ e um estado de polarização, o campo comporta-se como um oscilador harmônico quântico, cuja energia assume valores discretos. Na quantização do campo eletromagnético, quantização dos modos do campo é o procedimento de tratar cada modo normal de oscilação do campo como um oscilador harmônico quântico independente.

A energia clássica de um modo pode ser escrita na forma

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (4.2.0.1)$$

que corresponde exatamente à Hamiltoniana de um oscilador harmônico.

A quantização é realizada promovendo as variáveis dinâmicas q e p a operadores quânticos. Introduzem-se então os operadores de criação e aniquilação,

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}} \hat{p}, \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}} \hat{p}, \end{aligned}$$

esses operadores, satisfazem a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, assim, a Hamiltoniana quantizada torna-se

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.2.0.2)$$

Quando é generalizado todos os modos do campo eletromagnético é possível obter

$$\hat{H}_F = \sum_{k,\alpha} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{k\alpha}^\dagger \hat{a}_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.2.0.3)$$

que representa a Hamiltoniana quantizada do campo eletromagnético, onde cada modo do campo eletromagnético comporta-se como um oscilador harmônico de frequência ω_k .

Os autovalores da Hamiltoniana mostram que a energia do campo não pode assumir valores arbitrários, mas apenas múltiplos discretos de $\hbar\omega$,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (4.2.0.4)$$

O número inteiro n corresponde ao número de fótons presentes no modo considerado. Nesse contexto, o operador $\hat{a}^\dagger$ cria um fóton no modo $(\vec{k}, \alpha)$, enquanto o operador $\hat{a}$ remove um fóton desse mesmo modo. A quantização do campo eletromagnético permite,

portanto, interpretar a radiação como um conjunto de partículas elementares.

Observa-se que a energia do campo não se anula mesmo quando não há fótons presentes no modo considerado. Para $n = 0$, obtém-se

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (4.2.0.5)$$

quantidade conhecida como energia de ponto zero ou energia do vácuo. Diferentemente do que ocorre na física clássica, na qual um oscilador em repouso possui energia nula, a Mecânica Quântica impõe uma energia mínima devido ao Princípio da Incerteza de Heisenberg. Como consequência, mesmo no estado fundamental o oscilador não pode permanecer completamente em repouso.

O estado correspondente à ausência de fótons é denominado estado de vácuo e é representado por $|0\rangle$. Esse estado é definido pela relação

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (4.2.0.6)$$

indicando que não é possível remover fótons de um modo que já se encontra vazio. Apesar da ausência de partículas, o estado de vácuo ainda possui a energia residual dada pela Eq. (4.2.0.5).

Os estados contendo um número bem definido de fótons são conhecidos como estados de Fock e são denotados por $|n\rangle$. Um estado de Fock (ou estado número) é um estado quântico do campo eletromagnético que possui um número exato e bem definido de fótons, denotado por $|n\rangle$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. A ação dos operadores de criação e aniquilação sobre esses estados é dada por

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.0.7)$$

Essas expressões mostram que o operador de criação $\hat{a}^\dagger$ aumenta em uma unidade o número de fótons presentes no modo considerado, enquanto o operador de aniquilação $\hat{a}$ reduz esse número em uma unidade.

Cada excitação elementar do campo eletromagnético possui energia

$$E = \hbar\omega, \quad (4.2.0.8)$$

sendo identificada como um fóton. Dessa forma, um estado contendo n fótons apresenta energia dada pela Eq. (4.2.0.4) onde o termo $n\hbar\omega$ corresponde à energia associada aos fótons presentes no modo e o termo $\frac{1}{2}\hbar\omega$ representa a contribuição da energia de ponto zero.

A presença do índice de polarização na expansão do campo reflete o fato de que, para cada vetor de onda $\vec{k}$, existem duas polarizações transversais independentes, des-

critas pelos vetores unitários $\hat{\epsilon}_{\vec{k},1}$ e $\hat{\epsilon}_{\vec{k},2}$. Assim, cada modo do campo é completamente caracterizado pelo par $(\vec{k}, \lambda)$, onde λ especifica o estado de polarização.

A quantização do campo eletromagnético fornece uma descrição microscópica da radiação em termos de fótons. Nesse formalismo, processos de absorção e emissão de radiação podem ser interpretados como a destruição ou criação de fótons em modos específicos do campo.

4.3 Estados Coerentes

Para estabelecer uma conexão entre a descrição quântica desenvolvida até aqui e as propriedades observadas na radiação laser, torna-se necessário introduzir uma classe especial de estados do campo eletromagnético conhecida como estados coerentes. Esses estados desempenham um papel central na óptica quântica por apresentarem características que os tornam o análogo quântico mais próximo de uma onda eletromagnética clássica.

Um estado coerente $|\alpha\rangle$ é um estado quântico do campo eletromagnético definido como um autoestado do operador de aniquilação $\hat{a}$ (GLAUBER, 1963b):

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

onde $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ é um número complexo cujo módulo $|\alpha|$ está relacionado à amplitude do campo e cuja fase θ está relacionada à fase da oscilação.

Como $\hat{a}$ não é Hermitiano (pois $\hat{a} \neq \hat{a}^\dagger$), seus autovalores α são complexos e podem ser escritos na forma polar:

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta},$$

onde $|\alpha|$ está relacionado à amplitude do campo e θ à sua fase. Esta definição é central e será utilizada para obter todas as propriedades dos estados coerentes.

Essa definição implica que, ao contrário dos estados de Fock $|n\rangle$, que possuem número definido de fótons e valor esperado nulo do campo elétrico, os estados coerentes apresentam um valor esperado oscilante para o campo, reproduzindo o comportamento clássico.

Para encontrar a representação do estado coerente na base de Fock, expandimos $|\alpha\rangle$ como uma combinação linear dos autoestados $|n\rangle$ do Hamiltoniano do campo eletromagnético, isto é:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (4.3.0.1)$$

Aplicamos o operador de aniquilação $\hat{a}$ a esta expansão. Lembrando que $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, obtemos,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle. \quad (4.3.0.2)$$

Por outro lado, pela definição de autoestado $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, temos:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n |n\rangle. \quad (4.3.0.3)$$

Igualando as duas expressões Eq.(4.3.0.2) e (4.3.0.3), uma vez que os estados $|n\rangle$ são linearmente independentes, obtemos a relação de recorrência para os coeficientes C_n ,

$$C_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha C_n \quad \Rightarrow \quad C_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} C_n. \quad (4.3.0.4)$$

Aplicando esta relação recursivamente, partindo de $n = 0$, encontramos,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} C_0 = \alpha C_0, \\ C_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} C_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} C_0, \\ C_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} C_2 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{6}} C_0, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Por indução, podemos escrever da seguinte maneira:

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (4.3.0.5)$$

O coeficiente $C_0 = \langle 0|\alpha\rangle$ é determinado pela condição de normalização $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$. Utilizando a expansão da Eq.(4.3.0.1) e a expressão (4.3.0.5):

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n^* C_m \langle n|m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (4.3.0.6)$$

A soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$ é exatamente a expansão em série da função exponencial $e^{|\alpha|^2}$. Portanto,

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1.$$

Escolhendo a fase de modo que C_0 seja real e positivo, obtemos,

$$C_0 = e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (4.3.0.7)$$

Substituindo as Eq. (4.3.0.5) e (4.3.0.7) na expansão Eq. (4.3.0.3), chegamos à expressão final do estado coerente na base de Fock:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.3.0.8)$$

Esta é a representação mais importante do estado coerente e será utilizada em toda

a análise subsequente. Ela mostra o estado coerente escrito como combinação linear dos estados de Fock com pesos dados por uma distribuição de Poisson.

5 MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

Nas seções anteriores considerou a interação de um sistema de dois níveis com um campo eletromagnético descrito classicamente. Essa abordagem permitiu compreender fenômenos fundamentais, como as oscilações de Rabi e as transições induzidas por radiação externa. Entretanto, para descrever adequadamente situações em que os efeitos quânticos do campo se tornam relevantes, é necessário quantizar o campo eletromagnético e tratar tanto o átomo quanto a radiação como sistemas quânticos.

Nesse contexto, o modelo de Jaynes–Cummings desempenha um papel central na óptica quântica. Esse modelo fornece uma descrição da interação entre um átomo de dois níveis e um único modo quantizado do campo eletromagnético. Apesar de sua aparente simplicidade, o modelo prevê diversos fenômenos quânticos, como as oscilações de Rabi dependentes do número de fótons, o emaranhamento entre átomo e campo e o fenômeno de colapso e ressurgimento das oscilações atômicas.

Nesta seção será apresentada a formulação do modelo de Jaynes–Cummings, com base na revisão bibliográfica realizada (BONANI, 2020; MAHON, 2011; JAYNES; CUMMINGS, 1963), partindo da construção do Hamiltoniano do sistema átomo–campo e analisando as principais consequências físicas de sua dinâmica.

5.1 Derivação do Modelo de Jaynes-Cummings

O modelo de Jaynes-Cummings descreve a interação entre um átomo de dois níveis e um modo quantizado do campo eletromagnético de uma cavidade, sendo fundamental para a compreensão de efeitos quânticos em eletrodinâmica quântica de cavidades. Tendo isso em vista, partiremos da descrição feita pelo Hamiltoniano clássico, posteriormente faremos sua quantização, o qual pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (5.1.0.1)$$

em que: o termo do campo Eletromagnético é $\hat{H}_{\text{campo}}$ é dado por,

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \frac{1}{2} \int \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right) d^3r. \quad (5.1.0.2)$$

Já para o átomo, é representado como,

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g|, \quad (5.1.0.3)$$

onde $|e\rangle$ e $|g\rangle$ são os estados excitado e fundamental do átomo, com energias E_e e E_g , respectivamente.

Partindo das equações de Maxwell no vácuo e usando o gauge de Coulomb, o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ satisfaz uma equação de onda. Expandindo o campo em modos normais da

cavidade, escrevemos:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \alpha} \hat{e}^{(\alpha)} \left[c_{\vec{k}, \alpha}(0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + c_{\vec{k}, \alpha}^*(0) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (5.1.0.4)$$

A Hamiltoniana do campo eletromagnético é dada por Eq.(5.1.0.2), portanto, utilizando as relações $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, e substituindo a expressão da Eq.(5.1.0.4) na integral da energia, obtemos, após a quantificação, o Hamiltoniano do campo,

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \sum_{\vec{k}, \alpha} \hbar \omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}, \alpha}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.1.0.5)$$

Desprezando a energia de ponto zero $\frac{1}{2} \hbar \omega_k$, que é constante, chegamos a

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \sum_{\vec{k}, \alpha} \hbar \omega_k \hat{a}_{\vec{k}, \alpha}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \alpha}. \quad (5.1.0.6)$$

No modelo de Jaynes–Cummings, assume-se que o átomo interage apenas com um único modo do campo eletromagnético quantizado. Apenas determinadas frequências ressonantes podem existir no interior da cavidade, formando modos discretos do campo eletromagnético.

Quando a frequência de transição atômica é ajustada para ficar próxima de uma dessas frequências ressonantes, a interação com os demais modos torna-se desprezível. Dessa forma, a dinâmica do sistema passa a ser dominada por um único modo do campo, simplificando significativamente a descrição teórica sem perder os aspectos físicos essenciais da interação átomo-campo. Assim, o campo eletromagnético pode ser tratado como um oscilador harmônico quântico de frequência ω , cujo Hamiltoniano é dado por:

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \hbar \omega_k \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (5.1.0.7)$$

Após estabelecer a descrição quântica do campo eletromagnético, é necessário caracterizar o segundo elemento fundamental do sistema: o átomo. Como o objetivo é investigar a interação entre luz e matéria em sua forma mais simples, adotaremos o modelo do átomo de dois níveis, amplamente utilizado na óptica quântica por capturar os aspectos essenciais das transições atômicas induzidas pela radiação. Dessa forma, passamos agora à descrição quântica do sistema atômico. Com efeito, nesse caso o átomo é representado por dois estados de energia, um estado fundamental e um estado excitado, suficientes para descrever a dinâmica de interesse.

Definindo a frequência atômica de transição ω_0 como,

$$\hbar \omega_0 = E_e - E_g,$$

e redefinindo a origem da energia (ignorando o termo constante $\frac{E_e + E_g}{2}$), podemos

escrever,

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z, \quad (5.1.0.8)$$

onde $\hat{\sigma}_z$ é a matriz de Pauli:

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez obtidas as descrições quânticas do átomo e do campo eletromagnético, podemos construir o Hamiltoniano de interação entre esses sistemas. Na aproximação de dipolo⁷ elétrico, o termo do Hamiltoniano de interação é dado por:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_a, t) = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (5.1.0.9)$$

onde $\vec{r}_a$ é a posição do átomo e $\vec{d} = e\vec{r}$ é o momento de dipolo.

Para um átomo de dois níveis, o operador de dipolo pode ser escrito na forma

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_{eg} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (5.1.0.10)$$

em que $\mathbf{d}_{eg} = \langle e | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle$ é o elemento de matriz do dipolo entre os estados atômicos e $\hat{\sigma}_{\pm}$ são os operadores de subida e descida.

Por sua vez, considerando um único modo do campo eletromagnético, o campo elétrico quantizado pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathcal{E}_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (5.1.0.11)$$

onde $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação de fótons.

Substituindo essas expressões na Eq. (5.1.0.9), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= -\mathbf{d}_{eg} \mathcal{E}_0 (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ &= -\mathbf{d}_{eg} \mathcal{E}_0 (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (5.1.0.12)$$

A Eq.(5.1.0.12) contém quatro processos distintos. Os termos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ e $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$ descrevem, respectivamente, a absorção e a emissão de fótons, conservando o número total de excitações do sistema. Já os termos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ correspondem à criação simultânea ou aniquilação simultânea de uma excitação atômica e um fóton, os quais são processos que oscilam rapidamente com relação a escala temporal típica das frequências de oscilação atômica.

Assim, utilizando a aproximação de onda girante (RWA), que despreza termos que

⁷A aproximação de dipolo assume que o comprimento de onda da radiação é muito maior que as dimensões do átomo, permitindo considerar o campo elétrico uniforme sobre toda a extensão atômica.

oscilam rapidamente $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}_-\hat{a}$, chegamos então na expressão:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (5.1.0.13)$$

Nesta expressão,

- Ω é a frequência de Rabi (constante de acoplamento).
- $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ é o operador de subida atômica (excita o átomo) representado pela matriz

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ é o operador de descida atômica (desexcita o átomo), representado matricialmente por,

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente.

O primeiro termo $\sigma_+\hat{a}$ representa a absorção de um fóton pelo átomo (átomo vai de $|g\rangle$ para $|e\rangle$, e o campo perde um fóton). O segundo termo $\sigma_-\hat{a}^\dagger$ representa a emissão estimulada (átomo vai de $|e\rangle$ para $|g\rangle$, o campo ganha um fóton). A aproximação de onda girante consiste em manter apenas estes dois termos "energeticamente favoráveis" e descartar $\sigma_+\hat{a}^\dagger$ e $\sigma_-\hat{a}$, que violariam a conservação de energia em primeira ordem.

O Hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings é composto por três contribuições distintas. A primeira, Eq. (5.1.0.7), representa a energia do único modo do campo eletromagnético na cavidade, quantizado como um oscilador harmônico. A segunda, Eq. (5.1.0.8), descreve a energia do átomo de dois níveis, onde ω_0 é a frequência de transição atômica. A terceira, Eq. (5.1.0.13), corresponde à interação entre o átomo e o campo na aproximação de dipolo e com a aproximação de onda girante (RWA), permitindo processos de absorção ($\hat{\sigma}_+\hat{a}$ e emissão ($\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$) de fótons.

Somando as três contribuições, obtemos:

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega_k \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (5.1.0.14)$$

Este é o Hamiltoniano que descreve a dinâmica do sistema átomo-cavidade, o qual chamamos de Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

5.2 O Modelo de Jaynes–Cummings no Setor $n \leftrightarrow n + 1$

De início, consideraremos que a dinâmica do sistema ocorre em um subespaço de duas dimensões gerado pelos estados $|e, n\rangle$ e $|g, n + 1\rangle$, e os autovalores de energia obtidos

revelam um desdobramento proporcional a $\sqrt{n+1}$ na ressonância.

Considere um sistema composto por um átomo de dois níveis (estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$) acoplado a um único modo quantizado de um campo eletromagnético confinado em uma cavidade. O número de fótons no modo é denotado por n . Quando o átomo realiza uma transição do estado excitado para o fundamental, ele emite um fóton, de modo que o número de fótons na cavidade aumenta de n para $n+1$. Reciprocamente, na absorção, o átomo passa de $|g\rangle$ para $|e\rangle$ e o número de fótons diminui.

O sistema dinâmico fica então confinado em um subespaço de duas dimensões, gerado pelos seguintes estados da base produto:

$$|1\rangle = |e\rangle|n\rangle, \quad |2\rangle = |g\rangle|n+1\rangle,$$

nesta base, a interação átomo-campo pode ser tratada exatamente.

Na aproximação de onda girante e na representação de interação usual, o Hamiltoniano efetivo que descreve o sistema acoplado, denominado Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC), é escrito, na base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$, como:

$$\hat{H}_{JC} = \begin{pmatrix} n\hbar\omega_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar\Omega\sqrt{n+1} \\ \hbar\Omega\sqrt{n+1} & (n+1)\hbar\omega_k - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.0.1)$$

onde, ω_k é a frequência do campo na cavidade, ω_0 é a frequência de transição atômica, Ω é a frequência de Rabi, que mede a força de acoplamento entre o átomo e o campo.

Os termos diagonais representam as energias dos estados não interagentes (átomo + campo livre). Os termos fora da diagonal descrevem a interação que permite a troca de energia entre o átomo e o campo.

Para obter as energias estacionárias do sistema acoplado, devemos calcular os autovalores da matriz H_{JC} . Definimos as seguintes quantidades auxiliares:

$$A = n\hbar\omega_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_0, \quad B = \hbar\Omega\sqrt{n+1}, \quad C = (n+1)\hbar\omega_k - \frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

O Hamiltoniano assume a forma 2×2 :

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}. \quad (5.2.0.2)$$

A equação de autovalores $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ leva à condição de secular:

$$\det(H - EI) = 0 \quad \implies \quad \begin{vmatrix} A - E & B \\ B & C - E \end{vmatrix} = 0. \quad (5.2.0.3)$$

Expandindo o determinante, obtemos:

$$(A - E)(C - E) - B^2 = 0.$$

Calculamos separadamente a soma e a diferença dos elementos diagonais A e C :

$$\begin{aligned} A + C &= n\hbar\omega_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 + (n+1)\hbar\omega_k - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \\ &= (2n+1)\hbar\omega_k, \\ A - C &= n\hbar\omega_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 - (n+1)\hbar\omega_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \\ &= -\hbar\omega_k + \hbar\omega_0 = \hbar(\omega_0 - \omega_k). \end{aligned} \tag{5.2.0.4}$$

A equação característica fornece os seguintes autovalores:

$$E = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}. \tag{5.2.0.5}$$

Substituindo as expressões encontradas e colocando $\hbar$ em evidência:

$$\begin{aligned} E &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_k \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{4}(\omega_0 - \omega_k)^2 + \hbar^2\Omega^2(n+1)} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_k \pm \hbar\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_0 - \omega_k)^2 + \Omega^2(n+1)}. \end{aligned} \tag{5.2.0.6}$$

Uma situação de particular interesse físico é a ressonância⁸, quando a frequência do campo iguala a frequência atômica: $\omega_0 = \omega_k$. Nesse caso, o termo de dessintonia se anula, e a expressão acima se reduz a:

$$E_{\text{ress}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_k \pm \hbar\sqrt{\Omega^2(n+1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_k \pm \hbar\Omega\sqrt{n+1}. \tag{5.2.0.7}$$

A partir dos autovalores na ressonância da Eq. (5.2.0.7), constroem-se os autovetores,

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle). \tag{5.2.0.8}$$

O estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ escreve-se como combinação desses autovetores,

$$|e, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle).$$

Sob evolução temporal, cada autovetor adquire uma fase $e^{-iE_{\pm}t/\hbar}$. Voltando à base

⁸A condição de ressonância significa que a energia do fóton na cavidade, $\hbar\omega_k$, é exatamente igual à diferença de energia entre os níveis excitado e fundamental do átomo, $\hbar\omega_0 = E_e - E_g$. Quando isso ocorre, o sistema átomo-campo pode trocar energia de forma eficiente, pois a conservação de energia é satisfeita em cada processo elementar de absorção ou emissão.

original, obtêm-se os coeficientes

$$C_e(t) = \cos(\Omega\sqrt{n+1}t), \quad C_g(t) = -i \sin(\Omega\sqrt{n+1}t). \quad (5.2.0.9)$$

5.2.1 Dinâmica do modelo e Oscilações de Rabi

Neste capítulo, utiliza-se a representação de interação para analisar a dinâmica do modelo de Jaynes–Cummings. A partir da equação de Schrödinger, obtêm-se a evolução temporal do sistema átomo–campo e, conseqüentemente, a dinâmica de troca de excitações entre os subsistemas. Essa evolução dá origem às oscilações de Rabi, que serão discutidas a seguir.

A equação de Schrödinger na representação de interação para o estado $|\Psi_I(t)\rangle$ é dada por:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \hat{H}_{\text{int}}^I(t) |\Psi_I(t)\rangle,$$

onde $\hat{H}_{\text{int}}^I(t)$ é o Hamiltoniano de interação na representação de interação. Quando $\hat{H}_{\text{int}}$ é independente do tempo na representação de Schrödinger e comuta com $\hat{H}_0$ (quando trabalhamos na ressonância, os termos oscilantes se cancelam), a equação se simplifica para:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{int}} |\Psi(t)\rangle.$$

Por simplicidade, desprezando o índice I e utilizando $\hbar$, temos

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{int}} |\Psi(t)\rangle. \quad (5.2.1.1)$$

Uma das grandes simplificações introduzidas pelo modelo de Jaynes–Cummings é a percepção de que o sistema dinâmico permanece confinado em um subespaço de dimensão dois quando consideramos um número fixo de excitações. Definindo o operador número total de excitações

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sigma_+ \sigma_-,$$

onde $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ são os operadores de criação e aniquilação de fótons, e $\sigma_+ \sigma_- = |e\rangle\langle e|$ é o operador de projeção no estado excitado.

Para verificar que o número total de excitações é conservado, calculamos o comutador

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{N}] = \hbar\Omega [\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-]. \quad (5.2.1.2)$$

Utilizando a linearidade do comutador, obtemos

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{N}] = \hbar\Omega \left([\hat{\sigma}_+ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] + [\hat{\sigma}_+ \hat{a}, \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-] \right. \\ \left. + [\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] + [\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-] \right).$$

Como os operadores atômicos e do campo atuam em espaços distintos, eles comutam entre si. Assim,

$$[\hat{\sigma}_+ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \hat{\sigma}_+ [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = -\hat{\sigma}_+ \hat{a},$$

e

$$[\hat{\sigma}_+ \hat{a}, \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-] = [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-] \hat{a} = \hat{\sigma}_+ \hat{a}.$$

De modo análogo,

$$[\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \hat{\sigma}_- [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger,$$

e

$$[\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger, \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-] = -\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger.$$

Somando todos os termos,

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{N}] = \hbar\Omega \left(-\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \right) = 0.$$

Portanto,

$$[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{N}] = 0, \quad (5.2.1.3)$$

o que demonstra que o operador número total de excitações $\hat{N}$ é uma constante de movimento.

Para um autovalor fixo $N = n + 1$ (considerando que o átomo excitado contribui com 1), o espaço de estados é gerado pelos dois seguintes vetores:

$$|i\rangle = |e, n\rangle \quad (\text{átomo excitado, } n \text{ fótons}),$$

$$|f\rangle = |g, n + 1\rangle \quad (\text{átomo fundamental, } n+1 \text{ fótons}).$$

O primeiro corresponde à situação onde a excitação total está no átomo; o segundo onde a mesma excitação total está no campo. Qualquer estado do sistema com exatamente $n + 1$ excitações pode ser escrito como uma combinação linear desses dois estados:

$$|\Psi(t)\rangle = C_i(t) |i\rangle + C_f(t) |f\rangle. \quad (5.2.1.4)$$

As amplitudes complexas $C_i(t)$ e $C_f(t)$ satisfazem a condição de normalização $|C_i|^2 + |C_f|^2 = 1$ para todo tempo.

Em uma ação realizada sobre o estado inicial $|i\rangle = |e, n\rangle$, aplica-se $\hat{H}_{\text{int}}$ em $|e, n\rangle$:

$$\hat{H}_{\text{int}}|e, n\rangle = \hbar\Omega \left(\sigma_+ \hat{a} |e, n\rangle + \sigma_- \hat{a}^\dagger |e, n\rangle \right).$$

O primeiro termo:

$$\sigma_+ \hat{a} |e, n\rangle = \sigma_+ (\sqrt{n} |e, n-1\rangle) \sqrt{n} \sigma_+ |e\rangle |n-1\rangle = 0,$$

pois

$$\sigma_+ |e\rangle = 0.$$

O segundo termo:

$$\sigma_- \hat{a}^\dagger |e, n\rangle = \sigma_- (\sqrt{n+1} |e, n+1\rangle) = \sqrt{n+1} (\sigma_- |e\rangle) |n+1\rangle = \sqrt{n+1} |g\rangle |n+1\rangle = \sqrt{n+1} |f\rangle.$$

Portanto,

$$\hat{H}_{\text{int}}|i\rangle = \hbar\Omega \sqrt{n+1} |f\rangle, \quad (5.2.1.5)$$

para uma ação sobre o estado final $|f\rangle = |g, n+1\rangle$, aplicamos $\hat{H}_{\text{int}}$ em $|g, n+1\rangle$:

$$\hat{H}_{\text{int}}|g, n+1\rangle = \hbar\Omega \left(\sigma_+ \hat{a} |g, n+1\rangle + \sigma_- \hat{a}^\dagger |g, n+1\rangle \right).$$

Primeiro termo:

$$\sigma_+ \hat{a} |g, n+1\rangle = \sigma_+ (\sqrt{n+1} |g, n\rangle) = \sqrt{n+1} (\sigma_+ |g\rangle) |n\rangle = \sqrt{n+1} |e\rangle |n\rangle = \sqrt{n+1} |i\rangle$$

.

Segundo termo:

$$\sigma_- \hat{a}^\dagger |g, n+1\rangle = \sigma_- (\sqrt{n+2} |g, n+2\rangle) = \sqrt{n+2} (\sigma_- |g\rangle) |n+2\rangle = 0,$$

pois $\sigma_- |g\rangle = 0$.

Assim,

$$\hat{H}_{\text{int}}|f\rangle = \hbar\Omega \sqrt{n+1} |i\rangle. \quad (5.2.1.6)$$

As equações Eq. (5.2.1.5) e (5.2.1.6) mostram que o Hamiltoniano de interação acopla os dois estados de forma simétrica, com intensidade proporcional a $\sqrt{n+1}$. Na base $\{|i\rangle, |f\rangle\}$, a matriz de $\hat{H}_{\text{int}}$ é:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.1.7)$$

Substituímos agora a expansão (5.2.1.4) na equação de Schrödinger (5.3.1) e usamos as ações (5.2.1.5) e (5.2.1.6). Novamente assumindo $\hbar = 1$ por simplicidade:

$$i \frac{d}{dt} (C_i(t)|i\rangle + C_f(t)|f\rangle) = \hat{H}_{\text{int}} (C_i(t)|i\rangle + C_f(t)|f\rangle).$$

O lado esquerdo torna-se:

$$i\dot{C}_i(t)|i\rangle + i\dot{C}_f(t)|f\rangle.$$

O lado direito, usando linearidade e as equações (5.2.1.5) e (5.2.1.6):

$$\begin{aligned} C_i(t)\hat{H}_{\text{int}}|i\rangle + C_f(t)\hat{H}_{\text{int}}|f\rangle &= C_i(t) \left(\Omega\sqrt{n+1}|f\rangle \right) + C_f(t) \left(\Omega\sqrt{n+1}|i\rangle \right) \\ &= \Omega\sqrt{n+1} (C_f(t)|i\rangle + C_i(t)|f\rangle). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos estados linearmente independentes $|i\rangle$ e $|f\rangle$, obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$\begin{cases} i\dot{C}_i(t) = \Omega\sqrt{n+1} C_f(t), \\ i\dot{C}_f(t) = \Omega\sqrt{n+1} C_i(t). \end{cases} \quad (5.2.1.8)$$

Este sistema descreve a dinâmica do modelo JC . A simetria das equações evidencia o caráter coerente da interação entre átomo e campo, permitindo a transferência periódica de excitações entre os dois sistemas.

Define-se a frequência de Rabi efetiva para o subsistema com n fótons como:

$$\omega_R \equiv \Omega\sqrt{n+1}. \quad (5.2.1.9)$$

Este parâmetro representa a taxa na qual a população oscila entre o estado atômico excitado e o fundamental, dada a presença de n fótons no campo. Note que mesmo para $n = 0$ (campo no vácuo), $\omega_R = \Omega$ (oscilações de Rabi no vácuo).

Por essa definição a Eq. (5.2.1.8) é definida por,

$$i\dot{C}_i = \omega_R C_f, \quad i\dot{C}_f = \omega_R C_i. \quad (5.2.1.10)$$

Derivando a primeira equação de (5.2.1.10) em relação ao tempo, obtém-se:

$$i\ddot{C}_i = \omega_R \dot{C}_f.$$

Substituímos $\dot{C}_f$ a partir da segunda equação: $\dot{C}_f = -i\omega_R C_i$. Então:

$$i\ddot{C}_i = \omega_R(-i\omega_R C_i) = -i\omega_R^2 C_i.$$

Cancelando o fator comum i em ambos os lados obtemos,

$$\ddot{C}_i + \omega_R^2 C_i = 0. \quad (5.2.1.11)$$

A equação obtida possui a forma característica de um oscilador harmônico simples, cuja solução geral é conhecida e pode ser escrita como

$$C_i(t) = A \cos(\omega_R t) + B \sin(\omega_R t), \quad (5.2.1.12)$$

onde A e B são constantes complexas determinadas pelas condições iniciais. Analogamente, a mesma equação vale para $C_f(t)$.

A fim de investigar a evolução temporal do sistema, considera-se que inicialmente o átomo está no estado excitado e que o modo do campo contém exatamente n fótons. O estado inicial corresponde a,

$$C_i(0) = 1, \quad C_f(0) = 0.$$

Aplicando as condições iniciais à solução geral dada pela Eq. (5.2.1.12), é possível obter a seguinte condição,

$$C_i(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A,$$

portanto, $A = 1$.

Para determinar B , derivamos (5.2.1.12),

$$\dot{C}_i(t) = -A\omega_R \sin(\omega_R t) + B\omega_R \cos(\omega_R t),$$

para o tempo $t = 0$:

$$\dot{C}_i(0) = -A\omega_R \cdot 0 + B\omega_R \cdot 1 = B\omega_R.$$

Por outro lado, da primeira equação acoplada (5.2.1.10) aplicada em $t = 0$,

$$i\dot{C}_i(0) = \omega_R C_f(0) = \omega_R \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{C}_i(0) = 0.$$

Igualando as duas expressões para $\dot{C}_i(0)$:

$$B\omega_R = 0,$$

como $\omega_R = \Omega\sqrt{n+1} \neq 0$ (para qualquer $n \geq 0$ e $\Omega > 0$), concluímos que:

$$B = 0.$$

Portanto, a solução para a amplitude do estado inicial é descrita como,

$$C_i(t) = \cos(\omega_R t) = \cos\left(\Omega\sqrt{n+1} t\right). \quad (5.2.1.13)$$

Para obter $C_f(t)$, podemos usar a primeira equação (5.2.1.10),

$$i\dot{C}_i = \omega_R C_f \Rightarrow C_f = \frac{i}{\omega_R} \dot{C}_i,$$

derivando a Eq. (5.2.1.13): $\dot{C}_i(t) = -\omega_R \sin(\omega_R t)$. Realiza-se substituição:

$$C_f(t) = \frac{i}{\omega_R} [-\omega_R \sin(\omega_R t)] = -i \sin(\omega_R t).$$

O mesmo resultado pode ser obtido resolvendo diretamente a equação diferencial para $C_f(t)$ e impondo as condições iniciais apropriadas. Observa-se que a presença da unidade imaginária implica uma defasagem de $\pi/2$ entre as amplitudes $C_f(t)$ e $C_i(t)$. Essa diferença de fase está associada a troca de excitações entre o átomo e o campo.

Uma vez determinadas as amplitudes de probabilidade associadas aos estados inicial e final, torna-se possível analisar a dinâmica do sistema em termos de quantidades fisicamente observáveis. Em particular, estamos interessados em determinar a probabilidade de encontrar o sistema em cada um desses estados ao longo do tempo, pois essas probabilidades descrevem diretamente a transferência de população induzida pela interação com o campo eletromagnético. A probabilidade de encontrar o sistema em cada estado é dada pelo quadrado do módulo das amplitudes:

$$P_i(t) = |C_i(t)|^2 = \cos^2(\omega_R t), \quad P_f(t) = |C_f(t)|^2 = \sin^2(\omega_R t). \quad (5.2.1.14)$$

Verifica-se que $P_i(t) + P_f(t) = 1$ para qualquer instante, garantindo a conservação da probabilidade total.

A Eq. (5.2.1.14) evidencia que o seu comportamento periódico é análogo ao de dois pêndulos acoplados ou dois osciladores harmônicos em ressonância, mas aqui ocorre no domínio quântico com troca de quanta discretos de energia (fótons). A frequência dessas oscilações é $\omega_R = \Omega\sqrt{n+1}$, que aumenta com o número de fótons inicialmente presentes.

5.3 Modelo de Jaynes-Cummings com o campo em um estado coerente

Até o momento, a análise foi realizada considerando estados de Fock, nos quais a dinâmica do sistema ocorre em subespaços envolvendo apenas transições entre os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$. Iremos considerar que o campo eletromagnético se encontra em um estado coerente, caracterizado por uma superposição de estados de número. Nessa situação, a dinâmica do sistema deixa de estar restrita a um único setor de transição ($n \leftrightarrow n+1$), passando a envolver simultaneamente múltiplas componentes com diferentes números de fótons.

A distribuição de probabilidade de encontrar n fótons no estado coerente é uma distribuição de Poisson,

$$|C_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}, \quad (5.3.0.1)$$

onde $\bar{n} = |\alpha|^2$ é o número médio de fótons no campo.

Supomos que o átomo é preparado no estado excitado $|e\rangle$ e o campo no estado coerente $|\alpha\rangle$. O estado inicial do sistema é:

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle = |e\rangle \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |e, n\rangle. \quad (5.3.0.2)$$

Como o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings conserva o número total de excitações, cada componente $|e, n\rangle$ evolui independentemente no subespaço bidimensional $|e, n\rangle, |g, n+1\rangle$. Sabemos que para um estado inicial $|e, n\rangle$, a evolução temporal é dada da seguinte maneira:

$$|e, n\rangle \longrightarrow \cos(\Omega\sqrt{n+1}t) |e, n\rangle - i \sin(\Omega\sqrt{n+1}t) |g, n+1\rangle.$$

Aplicando esta evolução a cada componente do estado inicial, obtemos o estado do sistema em um instante t ,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[\cos(\Omega\sqrt{n+1}t) |e, n\rangle - i \sin(\Omega\sqrt{n+1}t) |g, n+1\rangle \right]. \quad (5.3.0.3)$$

5.3.1 Colapso e Ressurgimento das Oscilações Atômicas

O modelo de Jaynes-Cummings (JC) descreve a interação entre um átomo de dois níveis e um único modo quantizado do campo eletromagnético. Para um estado inicial onde o átomo encontra-se excitado e o campo possui um número definido de fótons n (estado de Fock $|n\rangle$), a inversão atômica, definida como a diferença entre as probabilidades de ocupação dos estados excitado e fundamental, apresenta oscilações harmônicas simples do tipo,

$$W(t) = \cos(2\Omega\sqrt{n+1}t).$$

Neste caso, as oscilações persistem indefinidamente com amplitude constante, e o sistema exibe um comportamento puramente periódico e previsível.

No entanto, em situações experimentais realistas, o campo eletromagnético raramente se encontra em um estado de Fock com número definido de fótons. Em particular, a luz laser é bem descrita por estados coerentes $|\alpha\rangle$, que são superposições de diferentes números de fótons com uma distribuição de Poisson.

A inversão atômica é definida como a diferença entre a probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado, $P_e(t)$, e a probabilidade de encontrá-lo no estado fundamental, $P_g(t)$:

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t). \quad (5.3.1.1)$$

As probabilidades $P_e(t)$ e $P_g(t)$ são dadas pelos valores esperados dos projetores nos respectivos estados,

$$\begin{cases} P_e(t) = \langle \Psi(t) | e \rangle \langle e | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | |e\rangle \langle e| | \Psi(t) \rangle, \\ P_g(t) = \langle \Psi(t) | g \rangle \langle g | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | |g\rangle \langle g| | \Psi(t) \rangle. \end{cases} \quad (5.3.1.2)$$

Substituindo essas expressões na definição de $W(t)$,

$$W(t) = \langle \Psi(t) | |e\rangle \langle e| | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | |g\rangle \langle g| | \Psi(t) \rangle,$$

colocando o estado $|\Psi(t)\rangle$ em evidência obtemos a seguinte equação:

$$W(t) = \langle \Psi(t) | (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) | \Psi(t) \rangle.$$

Reconhecemos o operador entre parênteses como o operador de Pauli $\hat{\sigma}_z$ na base atômica de dois níveis como,

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|.$$

Portanto, chegamos à expressão final desejada,

$$W(t) = \langle \Psi(t) | \hat{\sigma}_z | \Psi(t) \rangle. \quad (5.3.1.3)$$

Para um sistema de dois níveis, vale a relação $P_e(t) + P_g(t) = 1$, de modo que $W(t)$ pode variar entre $+1$ (átomo completamente excitado) e -1 (átomo completamente no estado fundamental). Quando $W(t) = 0$, os dois estados são igualmente prováveis.

Para um estado inicial onde o átomo está excitado e o campo possui um número definido de fótons n , obtivemos analogamente na seção anterior em (5.2.1.14),

$$P_e(t) = \cos^2(\Omega\sqrt{n+1}t), \quad P_g(t) = \sin^2(\Omega\sqrt{n+1}t),$$

que ao ser substituído na Eq.(5.3.1), resulta em uma expressão que nos diz que para um estado de Fock, a inversão atômica oscila harmonicamente com frequência $2\Omega\sqrt{n+1}$.

Para analisar o fenômeno de colapso e revival, considera-se que o sistema é preparado em um estado inicial que é um produto tensorial entre o estado do átomo e o estado do campo,

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{\text{átomo}}(0)\rangle \otimes |\Psi_{\text{campo}}(0)\rangle.$$

O estado do átomo pode ser uma superposição arbitrária dos estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$, assim,

$$|\Psi_{\text{átomo}}(0)\rangle = C_g|g\rangle + C_e|e\rangle, \quad (5.3.1.4)$$

onde C_g e C_e são amplitudes de probabilidade complexas que satisfazem a condição de normalização:

$$|C_g|^2 + |C_e|^2 = 1.$$

Os casos particulares mais relevantes para o estado inicial do átomo são aqueles em que os coeficientes C_g e C_e assumem valores específicos. Quando $C_e = 1$ e $C_g = 0$, o átomo encontra-se completamente no estado excitado, de modo que o estado atômico é dado por

$$|\Psi_{\text{átomo}}\rangle = |e\rangle.$$

Por outro lado, quando $C_g = 1$ e $C_e = 0$, o átomo encontra-se inteiramente no estado fundamental, sendo descrito por

$$|\Psi_{\text{átomo}}\rangle = |g\rangle.$$

Um terceiro caso de grande interesse corresponde à superposição equiprovável dos estados fundamental e excitado, obtida para $C_g = C_e = 1/\sqrt{2}$. Nessa situação, o estado do átomo é denominado

$$|\Psi_{\text{átomo}}\rangle = \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Esse último estado representa uma superposição quântica coerente, na qual o átomo não se encontra nem exclusivamente no estado fundamental nem exclusivamente no estado excitado, mas em uma combinação linear de ambos os estados.

O campo eletromagnético é preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$, definido como um autovetor do operador de aniquilação $\hat{a}$ corresponde a

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (5.3.1.5)$$

onde α é um número complexo. O módulo quadrado $|\alpha|^2 = \bar{n}$ representa o número médio

de fótons no estado coerente.

Na base de Fock $|n\rangle$, o estado coerente expande-se como,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad \text{com} \quad C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (5.3.1.6)$$

A distribuição de probabilidades para encontrar n fótons é a distribuição de Poisson representada por,

$$|C_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (5.3.1.7)$$

Estados coerentes são os estados quânticos que mais se aproximam do comportamento de um campo clássico, apresentando flutuações mínimas compatíveis com o princípio da incerteza de Heisenberg.

A propriedade fundamental expressa pela equação (5.3.1.5) pode ser verificada explicitamente.

Aplicando o operador de aniquilação $\hat{a}$ sobre a expansão (5.3.1.6):

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{a}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Realizando a mudança de índice $m = n - 1$ (ou $n = m + 1$), obtém-se:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1} \sqrt{m+1} |m\rangle.$$

Utilizando a relação de recorrência que decorre da definição (5.3.1.6):

$$C_{m+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{m+1}} C_m,$$

é possível obter,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (5.3.1.8)$$

confirmando a propriedade de autovetor.

Combinando o estado atômico (5.3.1.4) e o estado coerente do campo (5.3.1.6), o estado inicial total do sistema é dado pelo produto tensorial:

$$|\Psi(0)\rangle = (C_e |e\rangle + C_g |g\rangle) \otimes \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle,$$

distribuindo este produto, obtemos,

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (C_e C_n |e, n\rangle + C_g C_n |g, n\rangle). \quad (5.3.1.9)$$

Esta expressão explicita que o estado inicial é uma superposição de todos os possíveis números de fótons, cada um ponderado pela distribuição de Poisson, e com coeficientes que dependem do estado inicial do átomo.

Na representação de interação e na aproximação de onda girante (RWA), o Hamiltoniano de interação para o sistema átomo-campo é dada pela Eq. (5.1.0.13).

A ação do Hamiltoniano sobre os estados da base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ é:

$$\hat{H}_{\text{int}}|e, n\rangle = \hbar\Omega\sqrt{n+1}|g, n+1\rangle, \quad \hat{H}_{\text{int}}|g, n+1\rangle = \hbar\Omega\sqrt{n+1}|e, n\rangle. \quad (5.3.1.10)$$

Na base ordenada $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$, o Hamiltoniano para cada subespaço de número fixo de excitações assume a forma matricial conforme em (5.2.1.7).

A equação de Schrödinger dependente do tempo na representação de interação $\hbar = 1$ é dada por (5.2.1.1). Expandindo o estado $|\Psi(t)\rangle$ na base $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(t)|e, n\rangle + b_n(t)|g, n\rangle \right).$$

Substituindo na equação (5.2.1.1) e utilizando as relações (5.3.1.10), obtém-se, para cada n , um sistema de equações acopladas:

$$i\dot{a}_n = \Omega\sqrt{n+1}b_{n+1}, \quad i\dot{b}_{n+1} = \Omega\sqrt{n+1}a_n. \quad (5.3.1.11)$$

Da segunda equação de (5.3.1.11), obtém-se $b_{n+1} = -i\dot{a}_n/(\Omega\sqrt{n+1})$.

Substituindo na primeira equação, obtém-se a equação de um oscilador harmônico para a_n :

$$\ddot{a}_n + \Omega^2(n+1)a_n = 0.$$

A solução geral desta equação é:

$$a_n(t) = A \cos(\Omega\sqrt{n+1}t) + B \sin(\Omega\sqrt{n+1}t). \quad (5.3.1.12)$$

As constantes A e B são determinadas pelas condições iniciais. Para um estado inicial onde o átomo está excitado $C_e = 1$, $C = 0$ e o campo está no estado coerente, as condições iniciais são:

$$a_n(0) = C_n, \quad b_{n+1}(0) = 0.$$

Avaliando a solução (5.3.1.12) em $t = 0$:

$$a_n(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \Rightarrow A = C_n.$$

Para determinar B , derivamos (5.3.1.12):

$$\dot{a}_n(t) = -A\Omega\sqrt{n+1}\sin(\Omega\sqrt{n+1}t) + B\Omega\sqrt{n+1}\cos(\Omega\sqrt{n+1}t).$$

Em $t = 0$:

$$\dot{a}_n(0) = B\Omega\sqrt{n+1}. \quad (29)$$

Por outro lado, da primeira equação de (5.3.1.11) em $t = 0$:

$$i\dot{a}_n(0) = \Omega\sqrt{n+1}b_{n+1}(0) = 0 \Rightarrow \dot{a}_n(0) = 0.$$

Portanto, $B = 0$. Assim:

$$a_n(t) = C_n \cos(\Omega\sqrt{n+1}t). \quad (5.3.1.13)$$

Para $b_{n+1}(t)$, utilizamos a primeira equação de (5.3.1.11):

$$i\dot{a}_n = \Omega\sqrt{n+1}b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{i}{\Omega\sqrt{n+1}}\dot{a}_n.$$

Derivando (5.3.1.13):

$$\dot{a}_n(t) = -C_n\Omega\sqrt{n+1}\sin(\Omega\sqrt{n+1}t).$$

Substituindo:

$$b_{n+1}(t) = \frac{i}{\Omega\sqrt{n+1}}[-C_n\Omega\sqrt{n+1}\sin(\Omega\sqrt{n+1}t)] = -iC_n\sin(\Omega\sqrt{n+1}t).$$

Para o caso geral, com condições iniciais arbitrárias, as amplitudes evoluem como:

$$\begin{aligned} a_n(t) &= a_n(0)\cos(\Omega\sqrt{n+1}t) - i b_{n+1}(0)\sin(\Omega\sqrt{n+1}t), \\ b_n(t) &= b_n(0)\cos(\Omega\sqrt{n}t) - i a_{n-1}(0)\sin(\Omega\sqrt{n}t). \end{aligned} \quad (5.3.1.14)$$

A primeira equação descreve a evolução da amplitude de probabilidade para o estado $|e, n\rangle$, onde o átomo está excitado e o campo possui n fótons. A segunda equação descreve a evolução da amplitude para o estado $|g, n\rangle$, com o átomo no estado fundamental e n fótons.

Para obter a expressão final, utilizamos as condições iniciais,

$$a_n(0) = C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad b_n(0) = 0 \quad \text{para todo } n.$$

Substituindo estas condições na solução geral Eq.(5.3.1.14), podemos obter

$$a_n(t) = C_n \cos(\Omega\sqrt{n+1}t), \quad b_{n+1}(t) = -iC_n \sin(\Omega\sqrt{n+1}t). \quad (5.5.0.18)$$

A probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado é obtida somando sobre todos os possíveis números de fótons (n),

$$P_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos^2 \left(\Omega \sqrt{n+1} t \right).$$

De maneira análoga, a probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental é

$$P_g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \sin^2 \left(\Omega \sqrt{n+1} t \right).$$

A partir das expressões acima, podemos substituí-las na equação de inversão atômica que é representada por $W(t) = P_e(t) - P_g(t)$.

Realizando a substituição, podemos então obter

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \left[\cos^2 \left(\Omega \sqrt{n+1} t \right) - \sin^2 \left(\Omega \sqrt{n+1} t \right) \right].$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$, obtemos a expressão:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos \left(2\Omega \sqrt{n+1} t \right). \quad (5.3.1.15)$$

Para um estado coerente $|\alpha\rangle$, os coeficientes de expansão na base de Fock são dados por:

$$C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}.$$

Consequentemente, a distribuição de probabilidade para o número de fótons segue a estatística de Poisson:

$$|C_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (5.3.1.16)$$

O parâmetro $|\alpha|^2 = N$ representa o número médio de fótons no estado coerente. A inversão atômica, foi obtida anteriormente a partir da solução da Eq.(5.3.1.15) que corresponde as equações de movimento.

Substituindo a distribuição de Poisson (5.3.1.16) na expressão (5.3.1.15), obtém-se a inversão atômica para um campo inicialmente coerente:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-N} \frac{N^n}{n!} \cos \left(2\Omega \sqrt{n+1} t \right). \quad (5.3.1.17)$$

A Eq.(5.3.1.17) revela que a inversão atômica é uma média sobre todos os possíveis números de fótons n , ponderada pela distribuição de Poisson, onde cada contribuição oscila com frequência $2\Omega\sqrt{n+1}$.

As diferentes componentes oscilam em fase, produzindo oscilações regulares. Com o tempo, as fases relativas se espalham devido às diferentes frequências, causando o colapso

das oscilações por interferência destrutiva. Eventualmente, em tempos específicos, as fases se realinham, dando origem ao revival das oscilações, fenômeno puramente quântico sem análogo clássico, que será analisado na sequência.

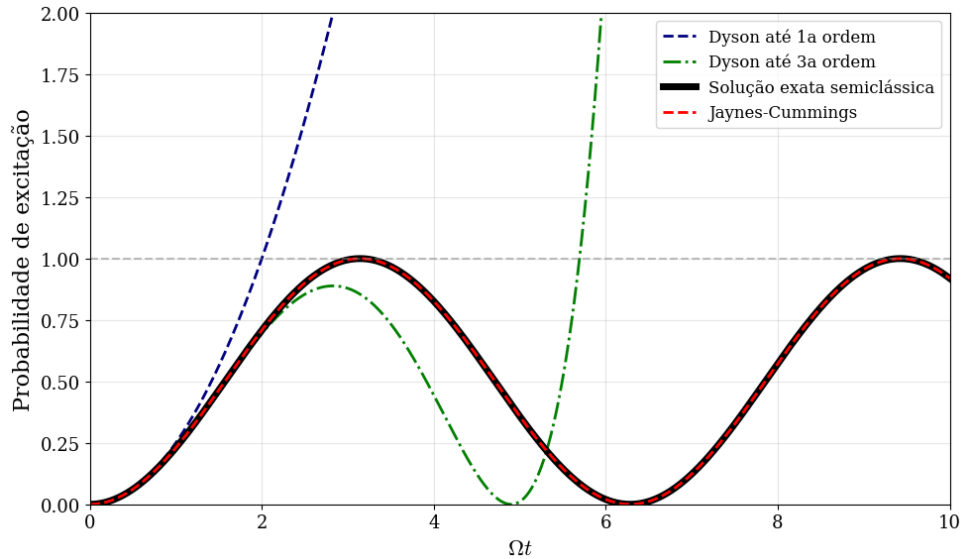
6 ANÁLISE NUMÉRICA E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção, analisamos as expressões e os resultados teóricos desenvolvidos ao longo dos capítulos anteriores, com ênfase na interação entre um átomo de dois níveis e um campo eletromagnético quantizado. Para fundamentar essa análise, apresentamos visualizações gráficas geradas computacionalmente via Python com as bibliotecas NumPy e Matplotlib, que permitem observar o comportamento dinâmico do sistema em diferentes regimes. Os algoritmos correspondentes, que implementam as soluções numéricas e os métodos perturbativos, encontram-se detalhados no Anexo A.

6.1 Resultados Numéricos para as Oscilações de Rabi

Conforme estabelecido na subseção 3.3.2, para um sistema de dois níveis submetido a um campo eletromagnético ressonante ($\Delta = 0$), a probabilidade de transição entre os estados fundamental e excitado apresenta um comportamento oscilatório característico. A partir da solução das equações de Schrödinger dependentes do tempo sob a aproximação da onda girante (RWA), obtivemos a conhecida fórmula de Rabi, para a probabilidade de transição (COHEN et al., 2005; SCULLY; ZUBAIRY, 1997b), expressa na Eq. (3.3.2.11).

Figura 10: Comparação entre a solução exata e a aproximação perturbativa para a probabilidade de transição.



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

Conexão com a Computação Quântica: Na vertente do processamento de informação quântica, a dinâmica ilustrada na Fig. 10 fundamenta o controle coerente de qubits físicos. Um qubit idealizado constitui, essencialmente, o sistema de dois níveis aqui modelado. Ao

bombardear um ponto quântico, íon aprisionado ou circuito supercondutor com um pulso de micro-ondas ou laser calibrado, introduz-se uma perturbação dependente do tempo. O controle estrito da duração do pulso (Δt) equivale a parametrizar rotações exatas na Esfera de Bloch. Um pulso cuja duração satisfaça $\Omega\Delta t = \pi$ (pulso de π) atua como uma porta lógica NOT quântica (**X**), invertendo o estado $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Analogamente, um pulso de $\pi/2$ gera a superposição máxima coerente, etapa física primária para a calibração da porta Hadamard (**H**) (NIELSEN; CHUANG, 2005).

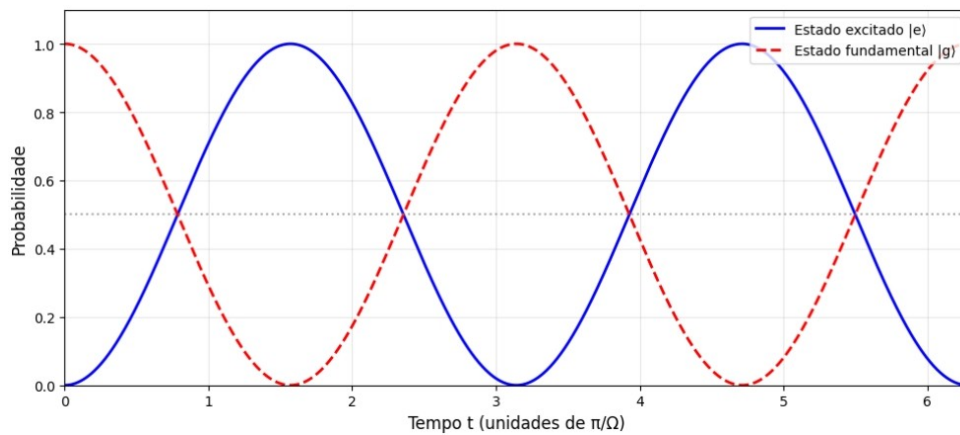
A inversão populacional oscila ciclicamente com a frequência de Rabi dada por $\Omega = \gamma/\hbar$. Esse perfil dinâmico comprova que os processos de absorção e emissão estimulada não são eventos estocásticos disjuntos, mas sim manifestações complementares de uma evolução quântica puramente coerente (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018a).

Conforme ilustrado na figura 10 obtida pela solução exata, modelo de Jaynes-Cummings e pelas aproximações perturbativas da série de Dyson em diferentes ordens. Observa-se que, para tempos curtos, todas as aproximações reproduzem adequadamente a dinâmica do sistema, de acordo com a solução exata. A expansão de primeira ordem apresenta o afastamento mais rápido enquanto a de ordem superior tem sua validade de aproximação estendida.

Verifica-se ainda que as soluções perturbativas podem assumir valores superiores, o que contraria a interpretação probabilística da função de onda. Isto acontece devido o truncamento da série de Dyson e evidencia que a evolução temporal aproximada deixa de ser unitária. Por outro lado, a solução exata permanece limitada ao intervalo entre 0 e 1, preservando a conservação de probabilidades. Além disso, a coincidência entre a solução semiclássica e o modelo de Jaynes-Cummings demonstra consistência entre as duas abordagens para os parâmetros considerados.

A evolução temporal dessa probabilidade, evidencia a transferência periódica e completa da população entre os dois níveis atômicos.

Figura 11: Oscilações de Rabi para um sistema de dois níveis em ressonância



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

A população oscila periodicamente entre os estados fundamental e excitado com frequência $\Omega = \gamma/\hbar$. Este comportamento demonstra que a absorção e a emissão estimulada são processos complementares, ambos descritos pela mesma dinâmica quântica coerente.

No modelo de Jaynes–Cummings, quando o campo está em um estado de Fock $|n\rangle$, a frequência de Rabi depende do número de fótons presentes na cavidade, sendo dada por

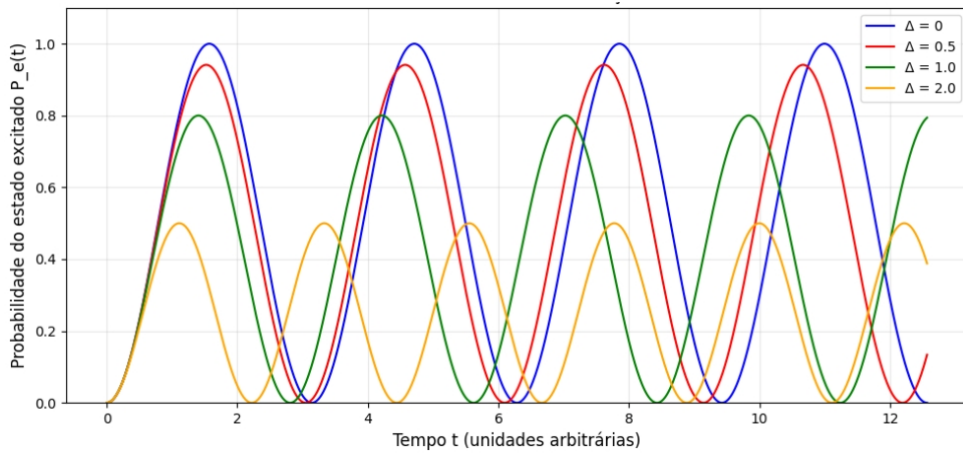
$$\Omega_n = 2\Omega\sqrt{n+1}. \quad (6.1.0.1)$$

Assim, a Figura 11 pode ser interpretada como a dinâmica associada a um único estado de Fock, sendo o caso $n = 0$ (estado de vácuo) a escolha mais simples e frequentemente utilizada para ilustrar as oscilações de Rabi.

A resposta exibida na Fig. 11 reflete a assinatura dinâmica de um estado de Fock fixo. O caso limite $n = 0$ quantifica as chamadas oscilações de Rabi no vácuo, as quais representam a configuração elementar para inspecionar a troca de energia na escala de poucos fótons.

Quando o campo motriz sofre um desvio em relação à frequência de transição atômica ($\Delta \neq 0$), a probabilidade de transição passa a ser regida pela expressão geral de Rabi generalizada, conforme deduzido na Eq. (3.3.2.10). O impacto dessa dessintonia na dinâmica de populações é mapeado na Fig. 12.

Figura 12: Efeito da dessintonia (Δ) sobre as oscilações de Rabi.



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

A inspeção da Fig.12 revela que o incremento da dessintonia comprimirá drasticamente a amplitude máxima de transição, concomitantemente elevando a frequência efetiva das oscilações ($\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$). Este comportamento ilustra a relevância crítica do ajuste de ressonância ($\omega = \omega_0$) na eficiência de processos induzidos, princípio este que governa o confinamento em cavidades laser de alta finura.

Em arquiteturas computacionais quânticas reais, o desvio de frequência Δ modela os erros de desinterrelação (*detuning errors*) e as flutuações de fase estocásticas. Na compu-

tação quântica baseada em circuitos supercondutores (como os qubits do tipo Transmon), a aplicação de uma linha de controle fora de ressonância impede a realização de uma transferência de população perfeita, decaindo a fidelidade das portas quânticas. A mitigação do comportamento observado na Fig.12 é contornada via técnicas de controle ótimo e pulsos compostos (como sequências CORPSE ou DRAG), projetados especificamente para anular os efeitos de desvios residuais de Δ .

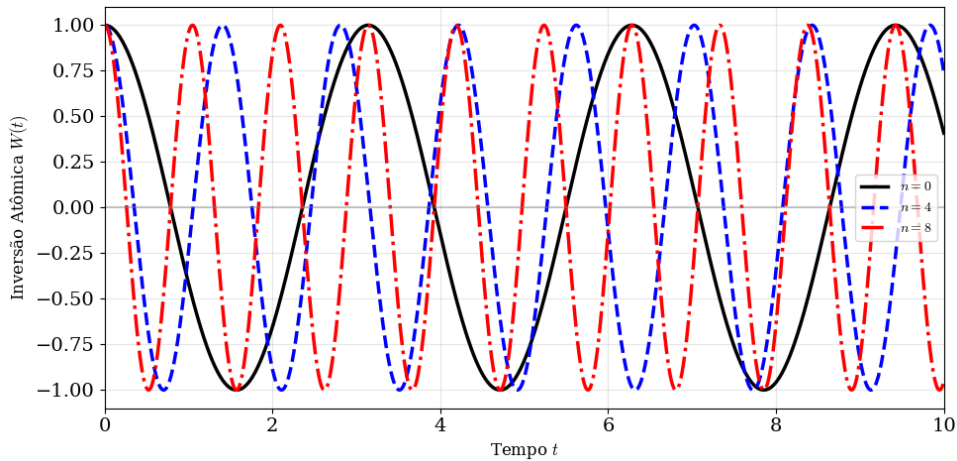
O modelo de Jaynes-Cummings, apresentado na Seção 5, descreve a interação entre um átomo de dois níveis e um modo quantizado do campo eletromagnético. Na representação de interação e utilizando $\hbar$, a dinâmica do sistema é governada pela equação de Schrödinger (5.2.1.1), onde $\hat{H}_{\text{int}}$ é o Hamiltoniano de interação.

Para um estado de Fock $|n\rangle$ (estado com número definido de fótons), demonstramos que a Hamiltoniana de interação, na aproximação de onda girante, assume a forma matricial (5.2.1.7).

Neste subespaço de duas dimensões gerado pelos estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$, a inversão atômica, definida como $W(t) = P_e(t) - P_g(t)$, evolui segundo:

$$W(t) = \cos(2\Omega\sqrt{n+1}t)$$

Figura 13: Inversão atômica para diferentes estados de Fock.



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

Observa-se que a frequência das oscilações aumenta com o número de fótons presentes na cavidade, seguindo a dependência $\omega_R = 2\Omega\sqrt{n+1}$. Esse comportamento evidencia que o acoplamento efetivo entre o átomo e o campo torna-se mais intenso à medida que cresce o número de excitações do modo eletromagnético. Além disso, mesmo para o estado de vácuo ($n = 0$), a inversão atômica apresenta oscilações periódicas, conhecidas como oscilações de Rabi no vácuo. Esse resultado demonstra que a interação átomo-campo não desaparece na ausência de fótons reais, persistindo devido às flutuações quânticas

associadas à energia de ponto zero do campo eletromagnético quantizado.

A dependência da frequência de Rabi efetiva com $\sqrt{n+1}$ é uma consequência direta da quantização do campo eletromagnético e não possui análogo na descrição clássica. Este resultado, obtido exatamente a partir da Eq. (5.3.1) e do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

6.2 Colapso e Ressurgimento das Oscilações Atômicas - Resultados Numéricos

O colapso e ressurgimento pode ser compreendido a partir do estado coerente do campo eletromagnético. Diferentemente de um estado de Fock, no qual existe um número bem definido de fótons, um estado coerente é uma superposição de estados com diferentes números de fótons. Como a frequência de Rabi do modelo de Jaynes-Cummings depende do número de fótons segundo a Eq. (6.1.0.1), cada componente da superposição evolui com uma frequência rápida e diferente.

Embora os estados de Fock sejam úteis para a compreensão da dinâmica fundamental, eles não descrevem adequadamente a luz produzida por um laser convencional. A radiação laser é mais bem representada por um estado coerente $|\alpha\rangle$, definido como autovetor do operador de aniquilação (5.3.1.5) com,

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Quando o campo é preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$, o número médio de fótons é dado por

$$N = |\alpha|^2.$$

Os estados coerentes são relevantes porque constituem a descrição quântica mais próxima de uma onda eletromagnética clássica. À medida que o parâmetro $|\alpha|$ aumenta, o número médio de fótons cresce e as flutuações relativas do campo tornam-se cada vez menores. Consequentemente, no limite

$$|\alpha| \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty,$$

o campo eletromagnético passa a apresentar um comportamento cada vez mais próximo daquele previsto pela eletrodinâmica clássica. Fisicamente, esse limite corresponde a um feixe laser intenso contendo um grande número de fótons, para o qual os efeitos das flutuações quânticas tornam-se desprezíveis diante da intensidade média do campo.

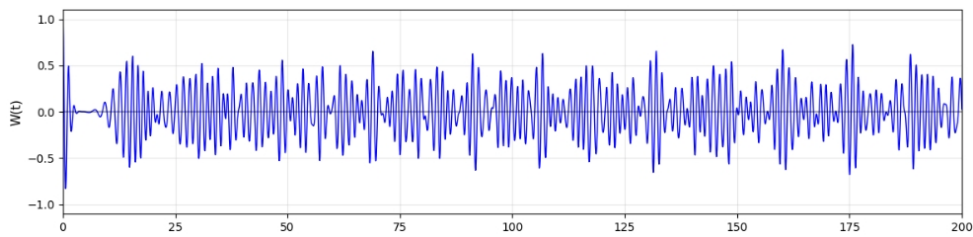
Essa interpretação possui uma consequência importante para a análise deste trabalho. Como o estado coerente constitui a descrição quântica mais próxima de um campo clás-

sico, espera-se que, para valores suficientemente elevados de N , a dinâmica prevista pelo modelo de Jaynes-Cummings aproxime-se progressivamente daquela obtida no tratamento semiclassico. Essa hipótese será investigada quantitativamente na Seção 6.3 por meio da comparação das populações atômicas e da inversão de população.

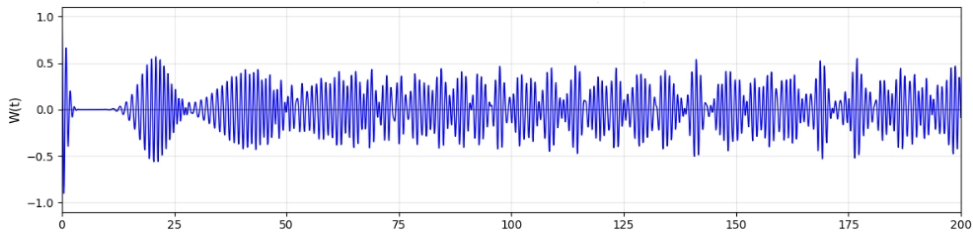
Para um átomo inicialmente excitado e o campo preparado em um estado coerente, a inversão atômica é dada pela média sobre a distribuição de Poisson conforme mostrado na Eq.(5.3.1.17).

As Figuras abaixo apresentam a evolução temporal da inversão atômica para diferentes valores do número médio de fótons N do estado coerente.

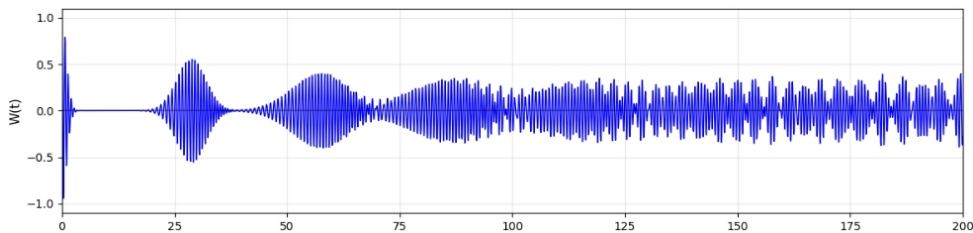
Figura 14: Estado coerente para diferentes números médios de fótons: (a) $N = 5$, (b) $N = 10$, (c) $N = 20$.



(a) $N = 5$ fótons



(b) $N = 10$ fótons



(c) $N = 20$ fótons

Fonte: Elaborado pela autora (2026).

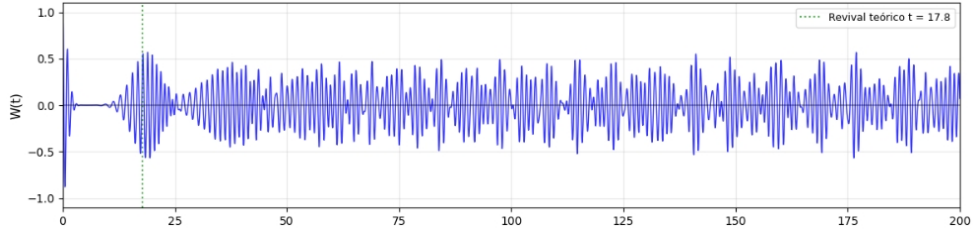
A figura 14 ilustra a evolução temporal da inversão atômica para diferentes números médios de fótons do estado coerente. Para tempos curtos, observam-se oscilações aproximadamente periódicas, associadas à troca coerente de energia entre o átomo e o campo. À medida que o tempo aumenta, a dispersão das fases das diferentes componentes da distribuição de Poisson provoca a redução gradual da amplitude das oscilações, culminando

no colapso da inversão atômica. Em tempos mais longos, ocorre o realinhamento dessas fases, produzindo o ressurgimento das oscilações.

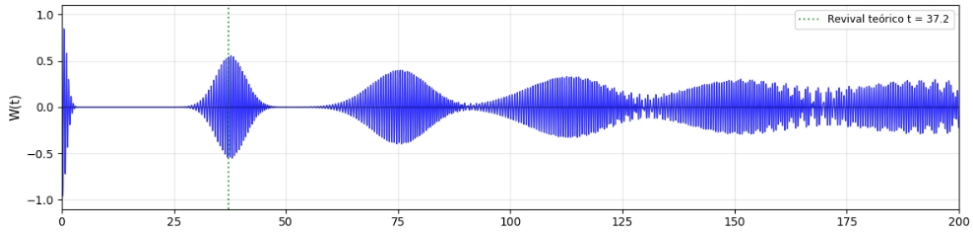
Observa-se três regimes distintos: Fig. 14a para tempos curtos, oscilações regulares com frequência aproximadamente $2\Omega\sqrt{N}$; 14b um colapso das oscilações em tempos intermediários, devido à interferência destrutiva entre as diferentes componentes de número de fótons; 14c um ressurgimento (revival) das oscilações em tempos longos, quando as fases relativas se realinham. Elas representam o fenômeno de colapso e revival da inversão atômica para estados coerentes do campo eletromagnético.

A fim de melhor visualizar o fenômeno para diferentes números médios de fótons, a Figura 15 apresenta uma comparação direta entre os casos $N = 8$, 35 e 65, destacando os tempos de revival teóricos.

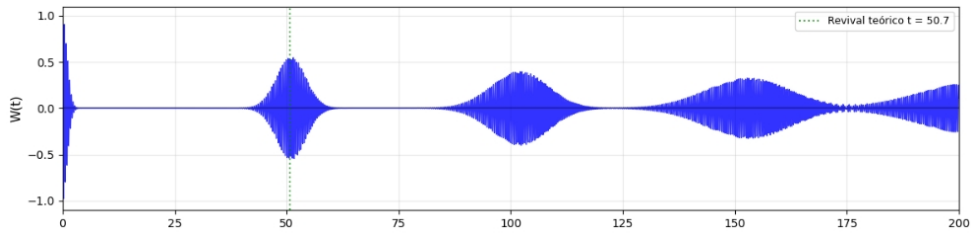
Figura 15: Revivals da inversão atômica para diferentes números médios de fótons: (a) $N = 8$, (b) $N = 35$, (c) $N = 65$.



(a) $N = 8$



(b) $N = 35$



(c) $N = 65$

Fonte: Elaborado pela autora (2026).

As linhas verticais indicam os tempos de revival teóricos ($t_{\text{revival}} = 2\pi\sqrt{N}/\Omega$). Observa-se que quanto maior o valor de N , maior o tempo necessário para o primeiro revival, consistente com a dependência $\sqrt{N}$.

A análise das Figuras 14 e 15 evidencia que o fenômeno de colapso e revival decorre da superposição de componentes associadas a diferentes números de fótons, cada uma oscilando com uma frequência de Rabi distinta. Inicialmente, essas componentes evoluem aproximadamente em fase, produzindo oscilações regulares da inversão atômica. Com o tempo, ocorre a dispersão das fases relativas, levando ao colapso das oscilações por interferência destrutiva. Como a evolução do sistema é unitária, as fases podem voltar a se alinhar, dando origem ao ressurgimento das oscilações. Esse comportamento não possui análogo na óptica clássica e constitui uma das principais assinaturas da natureza quântica da interação entre luz e matéria.

A partir da quantização do campo eletromagnético, verifica-se que a ação do operador de criação adiciona um fóton ao mesmo modo já ocupado pelo campo incidente. Como consequência, o fóton emitido possui as mesmas características do fóton que estimulou a transição, explicando a origem da coerência da radiação laser.

No formalismo de segunda quantização, o operador de criação $\hat{a}^\dagger$ atua sobre um estado de Fock $|n\rangle$ produzindo um estado com um fóton a mais, de acordo com

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Este operador adiciona um fóton ao modo do campo, mas não especifica a fase, direção ou polarização deste novo fóton. A informação sobre estas propriedades está contida no próprio operador de criação, que está associado a um modo específico do campo, caracterizado pelo vetor de onda $\vec{k}$ e pela polarização $\hat{e}_{\vec{k},\alpha}$.

Na Hamiltoniana de interação do modelo de Jaynes-Cummings, o termo responsável pela emissão estimulada é:

$$\hat{H}_{\text{estimulada}} = \hbar\Omega\sigma_-\hat{a}^\dagger.$$

onde $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ é o operador de descida atômica. Quando este operador atua sobre um estado inicial $|e, n\rangle$ (átomo excitado com n fótons no campo), obtemos:

$$\hat{H}_{\text{estimulada}}|e, n\rangle = \hbar\Omega\sqrt{n+1}|g, n+1\rangle.$$

Esse resultado mostra que, durante a emissão estimulada, o átomo decai do estado excitado para o estado fundamental enquanto o campo ganha um fóton adicional no mesmo modo eletromagnético. Além disso, a probabilidade da transição aumenta com o número de fótons já presentes no campo, evidenciando o mecanismo responsável pela amplificação coerente da radiação laser.

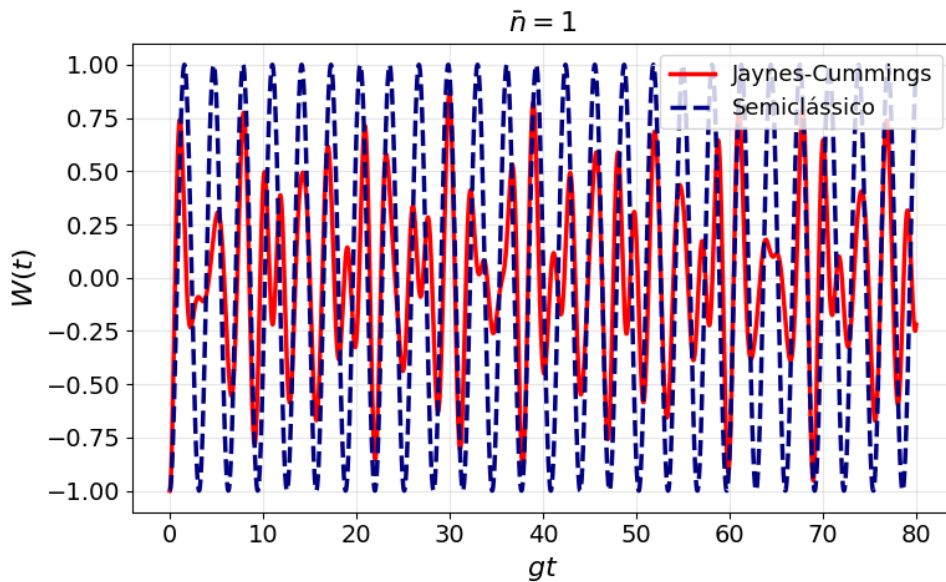
O fenômeno de colapso e ressurgimento é o cerne do entendimento da deesinterrelação e perda de coerência em arquiteturas de Hardware Quântico baseadas em QED de Cavidade (*Cavity QED*) e Circuit QED. Quando acoplamos um qubit supercondutor a um

ressonador de micro-ondas (cavidade) para realizar a leitura do estado do qubit (*dispersive readout*), o estado do campo no ressonador dita o deslocamento de frequência do qubit. Se o campo na cavidade não for um estado de Fock puro, a dispersão de frequências causa o desfasamento do qubit (colapso da coerência). Compreender o tempo exato de colapso e as dinâmicas de ressurgimento é vital para projetar protocolos de medição ultra-rápidos que protejam o qubit da decoerência intrínseca (BLAIS et al., 2021).

6.3 Comparação entre a descrição Semiclássica e o modelo de Jaynes-Cummings

A análise comparativa da inversão de população atômica entre o tratamento semiclassical e o modelo de Jaynes-Cummings constitui uma etapa fundamental para investigar os limites de validade das aproximações clássicas face ao formalismo totalmente quantizado. Enquanto a abordagem semiclassical descreve o campo eletromagnético como uma onda clássica contínua de amplitude deterministicamente bem definida, o modelo de Jaynes-Cummings quantiza o campo em modos ressonantes. Consequentemente, o confronto direto entre ambos os modelos fornece uma verificação quantitativa do Princípio de Correspondência de Bohr na escala microscópica da interação luz-matéria.

Figura 16: Comparação da inversão atômica nos modelos semiclassical e de Jaynes-Cummings para $\bar{n} = 1$.

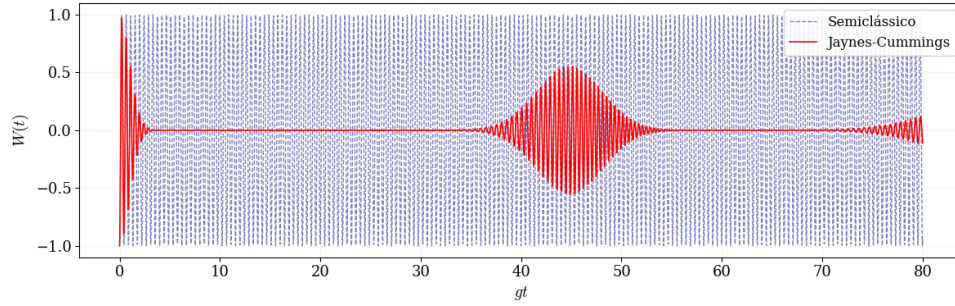


Fonte: Elaborado pela autora (2026).

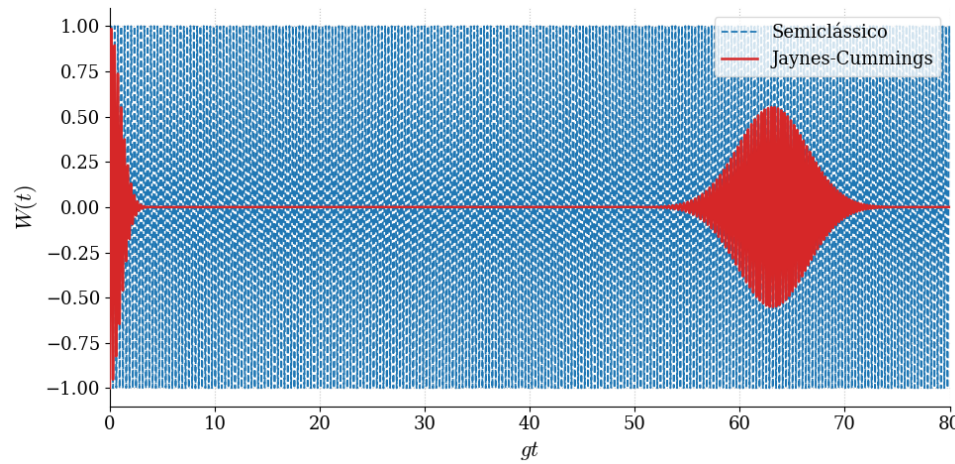
A Figura 16 expõe a evolução temporal da inversão atômica para um regime onde o campo é preparado em um estado coerente de baixa intensidade ($\bar{n} = 1$). Observa-se que o comportamento quântico diverge radicalmente da previsão senoidal perpétua do

modelo semiclássico. Como a distribuição estatística de Poisson associada ao estado coerente possui uma dispersão relativa acentuada em subespaços de baixa energia, múltiplas frequências de Rabi de amplitudes comparáveis coexistem e interferem destrutivamente. Esse fenômeno induz o colapso rápido das oscilações, configurando um efeito puramente quântico e desprovido de análogo clássico.

Figura 17: Comparação da inversão atômica nos modelos semiclássico e de Jaynes-Cummings para $\bar{n} = 50$ e $\bar{n} = 100$.



(a) $\bar{n} = 50$



(b) $\bar{n} = 100$

Fonte: Elaborado pela autora (2026).

Por outro lado, à medida que o número médio de fótons se eleva, conforme ilustrado nas Figuras 17a e 17b, a distribuição de probabilidade de fótons torna-se progressivamente concentrada em torno de seu valor médio ($\Delta n / \bar{n} \propto 1/\sqrt{\bar{n}}$). Sob essa condição de alta intensidade, as frequências de Rabi discretas associadas aos estados de número adjacentes tornam-se quase homogêneas, retardando o tempo de colapso e atenuando as discrepâncias macroscópicas em relação à dinâmica contínua.

No regime de valores elevados de $\bar{n}$, a dinâmica prevista pelo modelo de Jaynes-Cummings aproximam-se do perfil das oscilações harmônicas sustentadas da teoria semiclássica. Do ponto de vista físico, esse comportamento corrobora o fato de que estados coerentes intensos fornecem a representação quântica ideal para a radiação macroscópica

coerente (como a de feixes laser). Nessas circunstâncias, as flutuações quânticas de ponto zero tornam-se estatisticamente desprezíveis face à intensidade média do campo, forçando a evolução quântica a convergir assintoticamente para a descrição clássica e evidenciando a elegância da transição clássico-quântica na óptica moderna.

À medida que o número médio de fótons aumenta, conforme ilustrado nas figuras, a distribuição torna-se cocentrada em torno de seu valor médio. Nessa situação, as frequências de Rabi associadas aos diferentes estados de número, tornam-se cada vez mais próximas entre si, reduzindo as discrepâncias em relação ao modelo semiclássico.

Para resolver valores elevados de $\bar{n}$, observa-se que a inversão atômica obtida pelo modelo de Jaynes-Cummings reproduz as oscilações previstas pela teoria semiclássica. Esse resultado evidencia que o tratamento clássico da radiação pode ser interpretado como um limite do modelo quântico quando o campo contém um grande número de fótons. Dessa forma, os resultados obtidos estabelecem uma conexão entre as descrições clássica e quântica da interação entre a radiação eletromagnética e um átomo de dois níveis.

Sob perspectiva física, esse comportamento está associado ao fato de que os estados coerentes com um elevado número médio de fótons representam de forma adequada a radiação produzida por lasers. Nessas condições, as flutuações quânticas tornam-se desprezíveis perante à intensidade média, assim, a dinâmica quântica acaba convergindo da descrição clássica.

Dessa forma, a comparação realizada nesta seção evidencia não apenas as diferenças entre as descrições clássica e quântica da radiação, mas também a conexão entre elas.

Conexão com a Computação Quântica: Leitura Dispersiva de Qubits. — A transição entre os regimes semiclássico e quântico discutida nesta seção é o cerne operacional da leitura de estados em processadores quânticos supercondutores modernos (arquiteturas de *Circuit QED*). O protocolo padrão de leitura (*dispersive readout*) baseia-se no acoplamento dispersivo entre um qubit (o átomo de dois níveis) e um ressonador de leitura (a cavidade quantizada). Para medir o qubit, um pulso de micro-ondas — preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$ — é enviado ao ressonador.

Se o processador operar no regime quântico puro de baixa intensidade ($\bar{n} \sim 1$), como o ilustrado na Fig. 16, o campo quântico sofre um desfasamento severo provocado pelas flutuações atômicas (colapso), o que inviabiliza uma medição de alta fidelidade. Por essa razão, os protocolos experimentais de computação quântica operam deliberadamente no regime de correspondência de alta intensidade ($\bar{n} \gg 1$), similar ao das Figuras 17a e 17b. Nesse limite macroscópico, a separação de fases clássica do campo eletromagnético é preservada e atua como um ponteiro de medição estável: o estado do qubit ($|0\rangle$ ou $|1\rangle$) desloca a frequência de ressonância do campo de forma determinística, permitindo que a eletrônica de controle clássica determine o estado do qubit com fidelidades que superam 99% (BLAIS et al., 2021).

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo investigar os fundamentos quânticos da interação entre luz e matéria, com ênfase nos mecanismos responsáveis pela coerência da radiação laser. Para isso, foi realizada uma abordagem gradual, partindo da descrição de sistemas quânticos de dois níveis e da teoria de perturbações dependentes do tempo até a quantização do campo eletromagnético e o estudo do modelo de Jaynes–Cummings.

Inicialmente, foi demonstrado que a interação de um átomo de dois níveis com um campo eletromagnético ressonante produz oscilações periódicas da população entre os estados fundamental e excitado, conhecidas como oscilações de Rabi. Esse resultado evidencia o caráter coerente da interação luz-matéria e fornece uma descrição microscópica dos processos de absorção e emissão estimulada.

A quantização do campo eletromagnético permitiu avançar além da descrição semiclássica, revelando que a dinâmica do sistema depende explicitamente do número de fótons presentes no campo. Nesse contexto, o modelo de Jaynes–Cummings mostrou-se uma ferramenta fundamental para a compreensão da troca de energia entre átomo e campo, prevendo fenômenos genuinamente quânticos, como as oscilações de Rabi no vácuo e a dependência da frequência de oscilação com o número de fótons.

A análise de estados coerentes evidenciou sua importância na descrição quântica da radiação laser. Como esses estados apresentam distribuição de Poisson para o número de fótons e propriedades que se aproximam do comportamento clássico da luz, eles constituem uma representação adequada da radiação produzida por lasers. Além disso, foi mostrado que a emissão estimulada adiciona fótons ao mesmo modo eletromagnético já ocupado pelo campo, preservando frequência, fase, direção de propagação e polarização. Dessa forma, o formalismo quântico fornece uma explicação natural para a elevada coerência observada na radiação laser.

Um dos núcleos analíticos deste trabalho consistiu na interpretação do fenômeno de colapso e ressurgimento (*revival*) da inversão atômica sob campos coerentes. Verificou-se que essa dinâmica resulta da superposição de componentes associadas a diferentes estados de número, cada qual evoluindo com uma frequência de Rabi distinta. A dispersão progressiva das fases relativas induz o colapso por interferência destrutiva, ao passo que a natureza discreta do campo propicia o realinhamento periódico dessas fases, originando o ressurgimento. Esse comportamento, sem análogo na óptica clássica, traduz uma das assinaturas mais contundentes da quantização da luz e fundamenta as limitações de desinterrelação e leitura dispersiva encontradas na engenharia de computação quântica baseada em *Circuit QED* (BLAIS et al., 2021). Portanto, a quantização do campo eletromagnético revela-se indispensável para a compreensão completa da mecânica de interações fundamentais.

No que tange às perspectivas para trabalhos futuros, diversas vertentes promissoras po-

dem ser exploradas. Uma extensão natural consiste em transitar para sistemas envolvendo múltiplos átomos acoplados a cavidades ópticas (como o modelo de Tavis-Cummings), permitindo investigar efeitos coletivos de superradiância. Outra proposta de alto impacto reside na aplicação direta desses modelos de perturbação harmônica e controle de pulsos na otimização de matrizes de portas lógicas quânticas, avaliando o impacto de ruídos ambientais através da equação mestre de Lindblad (NIELSEN; CHUANG, 2010). Por fim, a investigação aprofundada de estados não clássicos da radiação, tais como os estados comprimidos (*squeezed*) e estados emaranhados gerados via algoritmos numéricos (como os detalhados no Anexo A), poderá expandir o escopo deste estudo analítico para os cenários emergentes da metrologia quântica e comunicação quântica segura.

Assim, este trabalho cumpre seus objetivos ao consolidar os pilares teóricos da óptica quântica, estabelecendo correlações rigorosas entre as formulações matemáticas fundamentais e as tecnologias de processamento e controle quântico da atualidade.

Referências

- BLAIS, A. et al. Circuit quantum electrodynamics. *Reviews of Modern Physics*, v. 93, n. 2, p. 025005, 2021. 92, 94, 95
- BONANI, F. D. *The Jaynes-Cummings Model*. 2020. Lecture notes. 12, 64
- COHEN, R. F. et al. Accessibility in introductory computer science. *ACM SIGCSE Bulletin*, ACM New York, NY, USA, v. 37, n. 1, p. 17–21, 2005. 84
- EINSTEIN, A. Zur quantentheorie der strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, v. 18, p. 121–128, 1917. 11
- GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, v. 131, n. 6, p. 2766–2788, 1963. 11, 12
- GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 131, p. 2766–2788, Sep 1963. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>>. 61
- GRIFFITHS, D.; FREITAS, L. *Mecânica quântica*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576059271. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Z1CLZwEACAAJ>>. 28
- GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 21, 27
- GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. 26, 85
- GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. 27
- HECHT, E. *Optics*. 5. ed. Boston: Pearson, 2017. 11
- JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963. 12, 64
- KOHNLE, A. *QuVis: The Quantum Mechanics Visualisation Project*. 2026. Acesso em: 16 jun. 2026. Disponível em: <<https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/>>. 18, 20
- MAHON, J. *Mecânica Quântica: Desenvolvimento Contemporâneo com Aplicações*. Grupo Gen - LTC, 2011. ISBN 9788521620112. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aAIvngAACAAJ>>. 16, 20, 26, 28, 30, 35, 40, 51, 56, 64
- MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 11, 12
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Computação Quântica e Informação Quântica*. Porto Alegre: Bookman, 2005. 733 p. Tradução de Ivan S. Oliveira. ISBN 85-363-0554-1. 21, 85
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. 96

- NOVAES, M. N. S. *Mecânica Quântica Básica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. (Série MNPEF). ISBN 9788578614263. 17
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Óptica, Relatividade e Física Quântica*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2015. v. 4. 11
- SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. Bookman, 2013. ISBN 9788565837095. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=vcI4kgEACAAJ>>. 26
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. 11, 26, 30, 35, 37, 41, 51
- SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521435956. 11
- SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. 40, 84
- SENA, V. L. et al. Um tutorial sobre distribuição quântica de chaves: dos fundamentos às tecnologias modernas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 47, p. e20250373, 2025. 25

A ALGORITMOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste anexo, apresenta-se o código-fonte desenvolvido em ambiente Python para a geração das simulações numéricas discutidas ao longo deste trabalho. O algoritmo a seguir utiliza a biblioteca especializada QuTip (Quantum Toolbox in Python), além das bibliotecas estruturais NumPy e Matplotlib, para mostrar graficamente os fenômenos de oscilações e inversões atômicas discutidos.

```
1 !pip install qutip
2
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from google.colab import files # Adicionado para transferir os
   ficheiros
6 from math import factorial
7 from scipy.stats import poisson
8
9 # =====
10 # Gráfico 1: Oscilações de Rabi
11 # =====
12 gamma_hbar = 1.0
13 t = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
14
15 P_excited = np.sin(gamma_hbar * t)**2
16 P_ground = np.cos(gamma_hbar * t)**2
17
18 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
19 ax.plot(t, P_excited, 'b-', linewidth=2, label='Estado excitado |
   e>')
20 ax.plot(t, P_ground, 'r--', linewidth=2, label='Estado
   fundamental |g>')
21 ax.set_xlabel('Tempo t (unidades de  $\pi/\Omega$ )', fontsize=12)
22 ax.set_ylabel('Probabilidade', fontsize=12)
23 ax.set_title('Oscilações de Rabi para um Sistema de Dois Níveis
   em Ressonância\n( $\Delta = 0$ )', fontsize=12)
24 ax.legend(loc='upper right')
25 ax.grid(True, alpha=0.3)
26 ax.set_ylim(0, 1.1)
27 ax.set_xlim(0, 2*np.pi)
28 ax.axhline(y=0.5, color='gray', linestyle=':', alpha=0.7)
29 plt.tight_layout()
30 plt.savefig('figura1_rabi_oscillations.pdf', format='pdf',
```

```

    bbox_inches='tight')
31 files.download('figura1_rabi_oscillations.pdf')
32 plt.show()
33
34 # =====
35 # Gráfico 2: Influência da Dessintonia
36 # =====
37 gamma_hbar = 1.0
38 deltas = [0, 0.5, 1.0, 2.0]
39 t = np.linspace(0, 4*np.pi, 1000)
40
41 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
42 colors = ['blue', 'red', 'green', 'orange']
43
44 for delta, color in zip(deltas, colors):
45     Omega = np.sqrt(gamma_hbar**2 + (delta**2)/4)
46     amplitude = gamma_hbar**2 / Omega**2
47     P = amplitude * np.sin(Omega * t)**2
48     ax.plot(t, P, color=color, linewidth=1.5, label=f' $\Delta = \{delta\}$ 
        ')
49
50 ax.set_xlabel('Tempo t (unidades arbitrárias)', fontsize=12)
51 ax.set_ylabel('Probabilidade do estado excitado Pe(t)', fontsize
    =12)
52 ax.set_title('Influência da Dessintonia nas Oscilações de Rabi',
    fontsize=12)
53 ax.legend(loc='upper right')
54 ax.grid(True, alpha=0.3)
55 ax.set_ylim(0, 1.1)
56 plt.tight_layout()
57 plt.savefig('figura2_rabi_detuning.pdf', format='pdf',
    bbox_inches='tight')
58 files.download('figura2_rabi_detuning.pdf')
59 plt.show()
60
61 # =====
62 # Gráfico 3: Inversão Atômica (Estados de Fock)
63 # =====
64 Omega = 1.0
65 t = np.linspace(0, 4*np.pi, 1000)
66 n_values = [0, 4, 8]

```

```

67
68 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
69
70 for n in n_values:
71     omega_eff = 2 * Omega * np.sqrt(n + 1)
72     W = np.cos(omega_eff * t)
73     ax.plot(t, W, linewidth=1.5, label=f'n = {n} ( $\Omega_{\text{eff}} = \{$ 
        omega_eff:.1f $\}$ )')
74
75 ax.set_xlabel('Tempo t (unidades arbitrárias)', fontsize=12)
76 ax.set_ylabel('Inversão At mica W(t)', fontsize=12)
77 ax.set_title('Inversão At mica para Estados de Fock ( tomo
        inicialmente excitado)', fontsize=12)
78 ax.legend(loc='upper right', fontsize=9)
79 ax.grid(True, alpha=0.3)
80 ax.set_ylim(-1.1, 1.1)
81 ax.axhline(y=0, color='black', linestyle='--', alpha=0.3)
82 plt.tight_layout()
83 plt.savefig('figura3_jc_fock_states.pdf', format='pdf',
        bbox_inches='tight')
84 files.download('figura3_jc_fock_states.pdf')
85 plt.show()
86
87 # =====
88 # Gráfico 4: Inversão At mica Alternativa (Fock)
89 # =====
90 Omega = 1.0
91 t = np.linspace(0, 10, 1000)
92 n_values = [0, 4, 8]
93 colors = ['black', 'blue', 'red']
94 styles = ['--', '--', '-.']
95
96 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
97
98 for n, color, style in zip(n_values, colors, styles):
99     omega_eff = 2 * Omega * np.sqrt(n + 1)
100     W = np.cos(omega_eff * t)
101     ax.plot(t, W, color=color, linestyle=style, linewidth=2.5,
        label=fr'$n={n}$')
102
103 ax.set_xlabel(r'Tempo $t$', fontsize=12)

```

```

104 ax.set_ylabel(r'Inversão At mica  $W(t)$ ', fontsize=12)
105 ax.legend(fontsize=10)
106 ax.grid(True, alpha=0.3)
107 ax.set_xlim(0, 10)
108 ax.set_ylim(-1.1, 1.1)
109 ax.axhline(y=0, color='gray', alpha=0.4)
110 plt.tight_layout()
111 plt.savefig('figura_fock_n0_n4_n8.pdf', format='pdf', bbox_inches
    ='tight')
112 files.download('figura_fock_n0_n4_n8.pdf')
113 plt.show()
114
115 # =====
116 # Gráfico 5: Colapso e Revival (Estados Coerentes)
117 # =====
118 def inversion_coherent(N, t, Omega=1.0):
119     n_max = int(N + 10*np.sqrt(N) + 20)
120     W = np.zeros_like(t)
121     for n in range(n_max + 1):
122         prob = np.exp(-N) * (N**n) / factorial(n)
123         W += prob * np.cos(2*Omega*t*np.sqrt(n+1))
124     return W
125
126 Omega = 1.0
127 N_values = [5, 10, 20]
128 t = np.linspace(0, 200, 3000)
129
130 fig, axes = plt.subplots(3, 1, figsize=(12, 10))
131
132 for idx, N in enumerate(N_values):
133     W = inversion_coherent(N, t, Omega)
134     axes[idx].plot(t, W, 'b-', linewidth=1)
135     axes[idx].set_ylabel('W(t)', fontsize=11)
136     axes[idx].set_title(f'Estado coerente: N = {N} fótons (médio)
        ', fontsize=12)
137     axes[idx].grid(True, alpha=0.3)
138     axes[idx].set_ylim(-1.1, 1.1)
139     axes[idx].set_xlim(0, 200)
140     axes[idx].axhline(y=0, color='black', linestyle='--', alpha
        =0.3)
141

```

```

142 axes[2].set_xlabel('Tempo t (unidades arbitrárias)', fontsize=12)
143 plt.suptitle('Colapso e Revival da Inversão Atômica para Estados
    Coerentes', fontsize=14)
144 plt.tight_layout()
145 plt.savefig('figura4_collapse_revival.pdf', format='pdf',
    bbox_inches='tight')
146 files.download('figura4_collapse_revival.pdf')
147 plt.show()
148
149 # =====
150 # Gráfico 6: Revivals Comparação
151 # =====
152 def inversion_coherent_precise(N, t, Omega=1.0, n_max_factor=15):
153     n_max = int(N + n_max_factor * np.sqrt(N) + 30)
154     W = np.zeros_like(t)
155     for n in range(n_max + 1):
156         prob = poisson.pmf(n, N)
157         W += prob * np.cos(2 * Omega * t * np.sqrt(n + 1))
158     return W
159
160 Omega = 1.0
161 t = np.linspace(0, 200, 4000)
162 N_values = [8, 35, 65]
163
164 fig, axes = plt.subplots(3, 1, figsize=(12, 10))
165
166 for idx, N in enumerate(N_values):
167     W = inversion_coherent_precise(N, t, Omega)
168     axes[idx].plot(t, W, 'b-', linewidth=1, alpha=0.8)
169     axes[idx].set_ylabel('W(t)', fontsize=11)
170     axes[idx].set_title(f'N = {N}', fontsize=12)
171     axes[idx].grid(True, alpha=0.3)
172     axes[idx].set_ylim(-1.1, 1.1)
173     axes[idx].set_xlim(0, 200)
174     axes[idx].axhline(y=0, color='black', linestyle='--', alpha=
        0.3)
175     t_revival_teorico = 2 * np.pi * np.sqrt(N) / Omega
176     axes[idx].axvline(x=t_revival_teorico, color='green',
        linestyle=':', alpha=0.7,
177         label=f'Revival teórico t = {
            t_revival_teorico:.1f}')

```

```

178     axes[idx].legend(fontsize=9)
179
180 axes[2].set_xlabel('Tempo t (unidades arbitrárias)', fontsize=12)
181 plt.suptitle('Revivals da Inversão Atômica para Diferentes Nú-
182   meros Médios de Fótons', fontsize=14)
183 plt.tight_layout()
184 plt.savefig('figura5_revivals_comparison.pdf', format='pdf',
185   bbox_inches='tight')
186
187 # =====
188 # Gráfico 8: Esquema de Transições Atômicas
189 # =====
190 fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))
191 ax[0].set_xlim(0, 1)
192 ax[0].set_ylim(0, 1)
193 ax[0].axis('off')
194 ax[0].plot([0.2, 0.8], [0.2, 0.2], 'k', lw=2)
195 ax[0].plot([0.2, 0.8], [0.8, 0.8], 'k', lw=2)
196 ax[0].text(0.15, 0.2, r'$E_i$', fontsize=16, va='center')
197 ax[0].text(0.15, 0.8, r'$E_f$', fontsize=16, va='center')
198 ax[0].text(0.84, 0.2, r'$|\varphi_i\rangle$', fontsize=16, va='
199   center')
200 ax[0].text(0.84, 0.8, r'$|\varphi_f\rangle$', fontsize=16, va='
201   center')
202 ax[0].arrow(0.5, 0.2, 0, 0.55, head_width=0.03, head_length=0.04,
203   length_includes_head=True)
204 x = np.linspace(0.05, 0.42, 200)
205 y = 0.45 + 0.03*np.sin(20*np.pi*x)
206 ax[0].plot(x, y, lw=2)
207 ax[0].arrow(0.42, 0.45, 0.05, 0, head_width=0.02, head_length
208   =0.02, length_includes_head=True)
209 ax[0].text(0.22, 0.53, r'$\hbar\omega$', fontsize=16)
210 ax[0].text(0.5, 0.05, '(a) Absorção', ha='center', fontsize=15)
211
212 ax[1].set_xlim(0, 1)
213 ax[1].set_ylim(0, 1)
214 ax[1].axis('off')
215 ax[1].plot([0.2, 0.8], [0.8, 0.8], 'k', lw=2)
216 ax[1].plot([0.2, 0.8], [0.2, 0.2], 'k', lw=2)

```

```

213 ax[1].text(0.15, 0.8, r'$E_i$', fontsize=16, va='center')
214 ax[1].text(0.15, 0.2, r'$E_f$', fontsize=16, va='center')
215 ax[1].text(0.84, 0.8, r'$|\varphi_i\rangle$', fontsize=16, va='
    center')
216 ax[1].text(0.84, 0.2, r'$|\varphi_f\rangle$', fontsize=16, va='
    center')
217 ax[1].arrow(0.5, 0.8, 0, -0.55, head_width=0.03, head_length
    =0.04, length_includes_head=True)
218 for yy in [0.55, 0.35]:
219     x = np.linspace(0.65, 0.95, 200)
220     y = yy + 0.03*np.sin(20*np.pi*x)
221     ax[1].plot(x, y, lw=2)
222     ax[1].arrow(0.95, yy, 0.03, 0, head_width=0.02, head_length
        =0.02, length_includes_head=True)
223     ax[1].text(1.0, yy, r'$\hbar\omega$', fontsize=16, va='center
        ')
224 ax[1].text(0.5, 0.05, '(b) Emissão induzida', ha='center',
    fontsize=15)
225 plt.tight_layout()
226 plt.savefig('transicoes_atomicas.pdf', format='pdf', bbox_inches=
    'tight')
227 files.download('transicoes_atomicas.pdf')
228 plt.show()
229
230 # =====
231 # Gráfico 9: Jaynes-Cummings nbar=1
232 # =====
233 plt.rcParams.update({'font.size': 14, 'axes.labelsize': 16, 'axes
    .titlesize': 16, 'legend.fontsize': 13})
234 g = 1.0
235 t = np.linspace(0,80,3000)
236 nbar = 1
237 nmax = 10
238 n = np.arange(nmax+1)
239 Pn = poisson.pmf(n,nbar)
240 Wjc = np.zeros_like(t)
241 for i,ti in enumerate(t):
242     Wjc[i] = -np.sum(Pn*np.cos(2*g*np.sqrt(n+1)*ti))
243 Wsc = -np.cos(2*g*np.sqrt(nbar)*t)
244
245 plt.figure(figsize=(8,5))

```

```

246 plt.plot(t,Wjc, color='red', linewidth=2.5, label='Jaynes -
    Cummings')
247 plt.plot(t,Wsc, '--', color='navy', linewidth=2.5, label='Semiclássico')
248 plt.xlabel(r'$gt$')
249 plt.ylabel(r'$W(t)$')
250 plt.title(r'$\bar{n} = 1$')
251 plt.ylim(-1.1,1.1)
252 plt.grid(alpha=0.3)
253 plt.legend()
254 plt.tight_layout()
255 plt.savefig('W_nbar1.pdf', format='pdf', bbox_inches='tight')
256 files.download('W_nbar1.pdf')
257 plt.show()
258
259 # =====
260 # Gráfico 10: Jaynes-Cummings nbar=50
261 # =====
262 plt.rcParams.update({'font.size': 12, 'axes.labelsize': 14, 'axes
    .titlesize': 14, 'legend.fontsize': 12})
263 g = 1.0
264 t = np.linspace(0, 80, 3000)
265 nbar = 50
266 nmax = 100
267 n = np.arange(nmax + 1)
268 Pn = poisson.pmf(n, nbar)
269 Wjc = np.zeros_like(t)
270 for i, ti in enumerate(t):
271     Wjc[i] = -np.sum(Pn * np.cos(2 * g * np.sqrt(n + 1) * ti))
272 Wsc = -np.cos(2 * g * np.sqrt(nbar) * t)
273
274 plt.figure(figsize=(12, 4))
275 plt.plot(t, Wsc, '--', color='navy', linewidth=1.0, alpha=0.5,
    label='Semiclássico')
276 plt.plot(t, Wjc, color='red', linewidth=1.2, label='Jaynes -
    Cummings')
277 plt.xlabel(r'$gt$')
278 plt.ylabel(r'$W(t)$')
279 plt.ylim(-1.1, 1.1)
280 plt.grid(alpha=0.3, linestyle=':')
281 plt.legend(loc='upper right', framealpha=0.9)

```

```

282 plt.tight_layout()
283 plt.savefig('W_nbar10_melhorado.pdf', format='pdf', bbox_inches='
    tight')
284 files.download('W_nbar10_melhorado.pdf')
285 plt.show()
286
287 # =====
288 # Gráfico 11: Jaynes-Cummings nbar=100
289 # =====
290 plt.rcParams.update({'font.size': 14, 'axes.labelsize': 16, 'axes
    .titlesize': 16, 'legend.fontsize': 13, 'font.family': 'serif',
    'mathtext.fontset': 'cm'})
291 g = 1.0
292 t = np.linspace(0, 80, 10000)
293 nbar = 100
294 nmax = 250
295 n = np.arange(nmax + 1)
296 Pn = poisson.pmf(n, nbar)
297 argumento_cos = 2 * g * np.sqrt(n + 1) * t[:, np.newaxis]
298 Wjc = -np.sum(Pn * np.cos(argumento_cos), axis=1)
299 Wsc = -np.cos(2 * g * np.sqrt(nbar) * t)
300
301 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
302 ax.plot(t, Wsc, '--', color='#1f77b4', linewidth=1.3, label='
    Semiclássico', zorder=2)
303 ax.plot(t, Wjc, color='#d62728', linewidth=1.8, label='Jaynes-
    Cummings', zorder=3)
304 ax.set_xlabel(r'$gt$')
305 ax.set_ylabel(r'$W(t)$'),
306 ax.set_xlim(0,80)
307 ax.set_ylim(-1.1,1.1)
308 ax.grid(True, linestyle=':', alpha=0.7, zorder=0)
309 ax.spines['top'].set_visible(False)
310 ax.spines['right'].set_visible(False)
311 ax.legend(frameon=True, edgecolor='lightgray', loc='upper right')
312 fig.tight_layout()
313 fig.savefig('W_nbar100_tempo80.pdf', format='pdf', bbox_inches='
    tight')
314 files.download('W_nbar100_tempo80.pdf')
315 plt.show()
316

```

```

317 # =====
318 # Gráfico 12: Série de Dyson vs Exato
319 # =====
320 Omega = 1.0
321 t = np.linspace(0, 10, 1000)
322 P_exact = np.sin(Omega*t/2)**2
323 A1 = -1j*(Omega*t/2)
324 P1 = np.abs(A1)**2
325 A3 = (-1j*(Omega*t/2) + 1j*(Omega*t/2)**3/6)
326 P3 = np.abs(A3)**2
327 P_jc = np.sin(Omega*t/2)**2
328
329 plt.figure(figsize=(10,6))
330 plt.plot(t, P1, '--', color='navy', linewidth=2, label='Dyson até
    1a ordem')
331 plt.plot(t, P3, '-.', color='green', linewidth=2, label='Dyson at
    é 3a ordem')
332 plt.plot(t, P_exact, color='black', linewidth=5, label='Solução
    exata semiclássica')
333 plt.plot(t, P_jc, '--', color='red', linewidth=2, label='Jaynes -
    Cummings')
334 plt.axhline(1, color='grey', linestyle='--', alpha=0.5)
335 plt.xlim(0,10)
336 plt.ylim(0,2)
337 plt.xlabel(r'$\Omega t$')
338 plt.ylabel('Probabilidade de excitação')
339 plt.grid(alpha=0.3)
340 plt.legend(fontsize=12)
341 plt.tight_layout()
342 plt.savefig('Dyson_1e3_ordem.pdf', format='pdf', bbox_inches='
    tight')
343 files.download('Dyson_1e3_ordem.pdf')
344 plt.show()

```

Listing 1: Código em Python para simulação de oscilações de Rabi, modelo de Jaynes-Cummings e série de Dyson.