Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, NATURAIS E TECNOLÓGICAS - CCENT
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

USO DO GEOGEBRA NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: um olhar ao desenvolvimento do pensamento algébrico na formação escolar básica.

IRINEU ANTONIO NASCIMENTO DOS SANTOS

Imperatriz - MA, 2023

IRINEU ANTONIO NASCIMENTO DOS SANTOS

Uso do GeoGebra no processo ensino-aprendizagem de álgebra:
um olhar ao desenvolvimento do pensamento algébrico na formação escolar básica

Monografia apresentada ao curso Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. José Milton Lopes Pinheiro

Janeiro de 2023

S237u

Santos, Irineu Antônio Nascimento dos

Uso do GeoGebra no processo ensino-aprendizagem de álgebra: um olhar no desenvolvimento do pensamento algébrico na formação escolar básica. / Irineu Antônio Nascimento dos Santos – Imperatriz, MA, 2023.

57 f.; il.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, Imperatriz, MA, 2023.

1.Ensino de Álgebra. 2.GeoGebra - software. 3.Métodos de ensino.
4. Ensino fundamental. I. Título.

CDU 51:004.4

CCENT - Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática intitulado **Uso do GeoGebrano processo ensino-aprendizagem de álgebra: um olhar ao desenvolvimento do pensamento algébrico na formação escolar básica** de autoria de Irineu Antonio Nascimento dos Santos, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Prof. Dr. José Milton Lopes Pinheiro
Orientador

Bruno Pereira Rodrigues

Prof. Me. Bruno Pereira Rodrigues
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão - UEMASUL

Prof. Dr. Murilo Barros Alves
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão - UEMASUL

Imperatriz, 26 de janeiro de 2023

E tudo o que fizerem, seja em palavra, seja em ação, façam em nome do Senhor Jesus, dando por Ele graças a Deus Pai.
- Colossenses 3:17

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos, e por Sua mão poderosa sempre me conduzindo, pois és meu sustentado e mantenedor, a Ele toda honra e toda glória. Agradeço também à minha esposa Anna Gabriella por sempre estar ao meu lado, me apoiando e me incentivando da melhor maneira que é com o seu exemplo. Aos meus pais Antonio Francisco e Cleonice Pereira por sempre me apoiarem, e ensinarem os valores da vida, sempre com honestidade e respeito. Ao meu orientador prof. Dr. José Milton Lopes Pinheiro, pela paciência, grandes ensinamentos. Tê-lo como orientador foi um privilégio. E por fim a minha amada vó, Ana Cila, que sempre será um exemplo e referência de amor e de pessoa.

Resumo

Tendo em vista que as barreiras encontradas por alunos no que tange o ensino da Álgebra são cada vez mais comuns nos anos finais do ensino fundamental, busca-se aqui compreender: *como o trabalho com software GeoGebra contribui, ou pode contribuir à aprendizagem da Álgebra.* Para tanto, foi realizado um estudo de campo, visando inicialmente compreender os conhecimentos prévios dos sujeitos de pesquisa sobre simbologia e operações algébricas. Mediante constatação de que os sujeitos apresentaram dificuldades concernentes ao pensamento algébrico, foi realizada uma proposta didático-pedagógica subsidiada pelo trabalho com o software Geogebra. Na sequência, foi realizada uma atividade avaliativa, visando compreender se a proposta permitiu aos alunos produzir significados em Álgebra, mais especificamente se houve desenvolvimento do pensamento algébrico. Mediante análise descritiva-interpretativa dos dados assim produzidos, foi possível compreender que os sujeitos fizeram uso de grandezas indeterminadas; generalizaram concepções a partir de um dado exemplo, usando símbolos para representar o problema de forma geral identificando como se raciocina para resolução do enunciado. Ou seja, entende-se que houve produção de significados para os objetos e a linguagem algébrica e, portanto, deu-se passos importantes na transição da Aritmética à Álgebra.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico; Álgebra; Geogebra; Ensino Fundamental.

Abstract

Bearing in mind that the barriers encountered by students regarding the teaching of Algebra are increasingly common in the final years of elementary school, the aim here is to understand: how working with GeoGebra software contributes, or can contribute to learning Algebra. For that, a field study was carried out, initially aiming to understand the previous knowledge of the research subjects about symbology and algebraic operations. Upon finding that the subjects had difficulties concerning algebraic thinking, a didactic-pedagogical proposal was carried out, supported by the work with the Geogebra software. Next, an evaluative activity was carried out, aiming to understand whether the proposal allowed students to produce meanings in Algebra, more specifically whether there was development of algebraic thinking. Through descriptive-interpretative analysis of the data thus produced, it was possible to understand that the subjects used indeterminate magnitudes; generalized conceptions from a given example, using symbols to represent the problem in general, identifying how to reason to solve the statement. That is, it is understood that there was production of meanings for the objects and the algebraic language and, therefore, important steps were taken in the transition from Arithmetic to Algebra.

Keywords: Algebraic Thinking; Algebra; Geogebra; Elementary School.

Lista de Figuras:

Sumário

Introdução

Entende-se que muitos dos conhecimentos matemáticos presentes na atualidade, da Aritmética à Análise Real, constituíram-se mediante desenvolvimento do simbolismo e de processos algébricos. Nesse desenvolvimento foi-se articulando as estruturas algébricas, que ao passo que ampliaram a região de inquérito Matemática, iam se fixando como meio pelo qual poder-se-ia produzir e demonstrar novos conhecimentos matemáticos. As estruturas algébricas são compreendidas por Lins (1992) em sua tese de doutorado, também como texto algébrico, com o qual pode-se fazer a releitura de situações problemas, dando-as um fundo matemático sobre o qual se possa trabalhar.

Com o texto algébrico pode-se revestir a própria matemática, tal como feito por Descartes e Fermat, conhecidos como os principais responsáveis pela constituição da Geometria Analítica. Esses matemáticos cunharam correspondências algébricas a elementos da Geometria Euclidiana. Por exemplo, à reta gerou-se uma equação algébrica equivalente, assim como à circunferência, e ao ponto criou-se a correspondência com um par ordenado, que na forma genérica, usualmente se escreve: (x, y).

Em Eves (2011), na obra "*A introdução à história da Matemática"* entende-se que Descartes acreditava que com a interpretação geométrica poder-se-ia dar sentido às operações algébricas. Essa compreensão direciona questionamentos como: a Geometria é uma ciência dotada de sentidos? E a Álgebra, ela não expressa sentidos e/ou não faz sentido ao sujeito que com ela trabalha? Poder-se-ia, ao contrário, a Álgebra dar sentido à Geometria?

Essas são questões que incidem diretamente no ensino e na aprendizagem de Álgebra, visto que ela, muitas vezes, é considerada sem sentidos, ou com o sentido de ser apenas uma ferramenta para resolução de exercícios, uma linguagem muito formal e complexa, cujo rigor matemático não encontra correspondências pré-científicas no cotidiano do aluno. Com isso, um movimento de desinteresse ou de percepção da álgebra como uma barreira intransponível pode ir se constituindo já no Ensino Fundamental, o que pode implicar dificuldades no decorrer da vida escolar e acadêmica.

Essa constatação mostra-se como inquietação que não só dá início, mas que também movimenta a pesquisa aqui realizada, quando se busca propor um ensino de Álgebra que transcenda a tecnicidade da prática de exercícios, avançando e explorando situações problemas cujas estruturas encontrem correlatos no mundo circundante dos alunos.

Indo ao encontro desse objetivo, Kaput (2008), na obra "*O que é Álgebra? O que é pensamento algébrico*?", expõe que a Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras. Assim, a Álgebra pode ser apresentada aos alunos não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas.

Entende-se em Lins (1992) que essa compreensão, da Álgebra como técnica/procedimento, emerge de um modo de ensinar que prioriza a linguagem algébrica deixando às margens o *pensamento algébrico*, que se constitui por um movimento do pensar e da anunciação do pensar, que vai constituindo o conhecimento, entendido por ele como *uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação*. Para o pesquisador, o pensamento algébrico constitui-se por três modos de pensar, quais sejam: *pensar aritmeticamente*, *pensar internamente* e *pensar analiticamente*.

Quando se entende a complexidade do ensino e da aprendizagem de Álgebra algumas iniciativas e propostas metodológicas são pensadas, muitas delas balizadas pelo trabalho com materiais concretos e por tecnologias digitais (TD). Nesta pesquisa, o foco à Álgebra se dá sob viés da potencialidade das TD, mais especificamente, desenvolve-se o estudo com o software de Geometria Dinâmica GeoGebra¸ como equações do 1º grau com uma incógnita, sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano e representação algébrica de equações. No âmbito do campo amplo e complexo da álgebra e de seu ensino, quer-se retomar os primeiros movimentos, que dizem respeito à formação do pensamento algébrico, na algebrização dos dados aritméticos. Portanto foca-se na construção do pensamento algébrico e, aqui, constituindo-se com auxílio do software GeoGebra.

Este foco tem um solo constituinte, que não só o constitui como foco, mas que também movimenta as ações em torno dele. Tal solo é posto em forma de pergunta norteadora, qual seja: *Como o trabalho com o software Geogebra contribui ou pode contribuir ao desenvolvimento do pensamento algébrico?* Compreender o "como" expresso nesta pergunta solicita uma pesquisa qualitativa, na qual o pesquisador, sem presunções e respostas prévias, permite que o campo de pesquisa lhe mostre evidências a partir das quais possa tecer compreensões sobre o que se indaga.

O ensino de Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico

Ao final dos anos de 1950 surgiram debates sobre a necessária renovação do ensino da Matemática, que se consolidaram na década de 1960 com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), que surgiu como um grande progresso para a organização dos estudos matemáticos. Esse movimento foi importante para adequar os conteúdos curriculares de matemática ao contexto socioeconômico da época (SILVA; CIRÍACO, 2020).

O objetivo do movimento era modernizar métodos já utilizados no ensino tradicional, mas, segundo Alves e Silveira (2017, p. 79) na prática o movimento não cumpre o objetivo, pois o esperado "essencialmente com Modernos programas de Matemática (e esta seria a expressão mais aconselhada) é modernizar a linguagem dos assuntos considerados imprescindíveis na formação do jovem estudante, usando os conceitos de conjunto e estruturas".

Oliveira et al (2011) relatam que a iniciativa contou com "os cursos para aperfeiçoamento de pessoal docente no setor de matemática e 'Cursos de Iniciação à Matemática' para futuros universitários." Um destes cursos foi um dos primeiros cursos de Álgebra realizados no Brasil, no Rio Grande do Norte, e foi ministrado por professores das Universidades Federais do Pernambuco e do Ceará no ano de 1968.

Nessa época os meios de circulação de ideias e formação dos professores ocorria através de revistas pedagógicas que, de acordo com Oliveira et al (2008) objetivavam:

> [...] servir de veículo de intercâmbio entre o professorado brasileiro, na troca de ideias, sugestões e experiências, favorecendo a formação de uma nova mentalidade, mais progressista, mais propícia à observação objetiva, à experimentação renovadora e à revisão crítica dos postulados, finalidades, currículos e métodos em que se baseia toda a atuação do nosso magistério (REVISTA ..., apud OLIVEIRA; PIETROPAOLO, 2008, p 24).

O MMM promoveu também adaptações aos livros didáticos, adotando uma linguagem de rigor simbólico. "[...] diante do excesso de simbologia na linguagem, da dificuldade de abstração das estruturas e do distanciamento de problemas do mundo real, o Movimento da Matemática Moderna fracassou" (BITTAR; FREITAS 2005, p. 21).

Com o passar dos anos mostraram-se então novas concepções que levavam em consideração o contexto histórico, problematização contextualizada, articulações de conteúdo, uso de novas tecnologias, entre outros. Neste sentido, no ano de 1997 foi apresentado os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCNs), publicado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC).

> Neste, apresentam-se referenciais de organização da estrutura dos anos escolares (apresentados por ciclos) em que os blocos de conteúdo são destacados: a) Números

> e Operações; b) Grandezas e Medidas; c) Geometria e; d) Tratamento da Informação, havendo ainda possibilidades de trabalho com temas transversais, isso nos anos iniciais (SILVA; CIRÍACO, 2020, p.4).

No entanto, neste documento a Álgebra só é citada a partir do 5º ano. "Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra" (BRASIL, 1997, p. 39).

Posteriormente, em 2017, fez-se necessário a criação de um documento-base que seria o orientador para os currículos dos estados e municípios: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz em seus documentos que a Unidade Temática Álgebra seja enunciada a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Segundo Coelho e Aguiar (2018) isso se deu por conta das dificuldades que os alunos das séries finais do ensino fundamental enfrentavam quando os conteúdos de álgebra ficam mais complexos, de acordo com resultados de algumas avaliações diagnósticas governamentais. Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2018) declaram que se pode inserir e estimular o pensamento algébrico nas séries iniciais, pois os alunos já apresentam condições para transição da Aritmética para álgebra, encarando isso como uma forma de desafio para estimular o ensino e a aprendizagem.

Diante disso, deu-se "ênfase atualmente ao desenvolvimento do pensamento algébrico e sua significação, e não mais apenas a técnicas de simplificação de expressões algébricas como tradicionalmente era tratada" (RIGHI, PORTA, SCREMIN, 2021, p. 2).

Almeida & Santos (2017) consideram relevante a importância de desenvolver o estímulo ao pensamento algébrico, e descreve que o pensar algebricamente requer que o aluno produza significados para os objetos, ou seja, para os símbolos algébricos, e a linguagem algébrica.

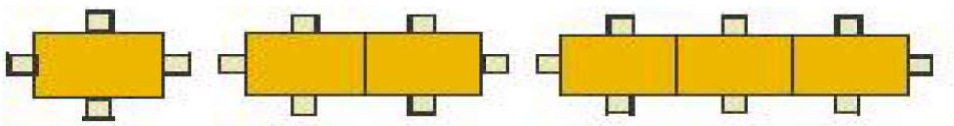
O pensar algébrico contempla generalizar um problema através de símbolos, e solucionar por meio de métodos tradicionais e com isso, "poder interpretar esse resultado, questionar os símbolos em busca de significados, e abandoná-los a favor de outra representação quando eles não proporcionam esses mesmos significados". (BORRALHO; BARBOSA, 2017)

Para Radford (2021), o pensamento algébrico exige três condições necessárias, sendo elas: as grandezas indeterminadas, os símbolos usados e a forma como se raciocina para resolução do enunciado. Isso faz com que o aluno manipule tanto as grandezas determinadas quanto as indeterminadas, da mesma forma, tratando a incógnita como conhecido, isso torna a álgebra não uma forma de usar símbolos, mas como forma analítica.

Um dos expoentes da teorização sobre Pensamento Algébrico é Rômulo Lins, que em sua tese de doutorado (1992) se dedica ao tema. Nela Lins (1992) questiona a álgebra como mera técnica/procedimento em favor da Matemática, que se aplica tacitamente sem que se desenvolva um movimento de pensar sobre tal aplicação, sobre suas anunciações, significados e implicações, ou seja sem que se desenvolva o pensamento algébrico. Para o autor, tal como expresso na introdução deste texto, o pensamento algébrico se constitui na anunciação do pensar, que constitui o conhecimento entendido por Lins como *uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação*. Para o pesquisador, o pensamento algébrico constitui-se por três modos de pensar, quais sejam: *pensar aritmeticamente*, *pensar internamente* e *pensar analiticamente*.

Pensar aritmeticamente, nas palavras de Lins (1992) consiste precisamente em "modelar em números", o que implica a utilização das operações Aritméticas visando produzir relações. *Pensar internamente* consiste em focar o domínio ao qual se aplicam os objetos com os quais se trabalha (números e operações). Portanto, nessa segunda vertente do pensamento algébrico o foco é na possibilidade que temos de distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações Aritméticas. *Pensar analiticamente* é uma vertente do pensamento algébrico na qual se realiza a procura de verdades fazendo do desconhecido algo conhecido, ou seja, se fixa os números genéricos e dá-se valores às incógnitas, visando, por exemplo, gerar equações equivalentes até encontrar o desconhecido, ou seja, a incógnita, usualmente expressa como x.

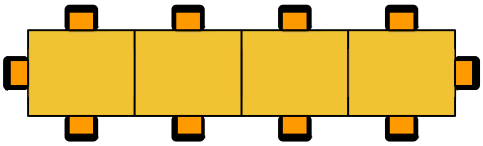
Esse movimento do pensamento algébrico pode ser melhor entendido no exemplo exposto no livro *Matemática*, de Imenes e Lellis (1997): "*Observe atentamente, da esquerda para a direita, a quantidade de mesas representadas em cada situação, bem como o número de lugares que cada uma das mesas acomoda".*



Pergunta-se: *Vocês acreditam que se pode construir um modelo matemático que forneça o número de lugares/cadeiras, para determinado número de mesas agrupadas, enfileiradas sequencialmente? Qual seria esse modelo? Quantos lugares haveriam se estivessem enfileiradas 15 mesas?*

Simulando possíveis respostas, poder-se-ia ter o seguinte movimento do pensamento algébrico, visado da perspectiva de Lins (1992):

I - Pensar aritmeticamente: modelando com números.



$1\,mesa \rightarrow 4\,lugares$
$2\,mesas \rightarrow 6\,lugares$
$3\,mesas \rightarrow 8\,lugares$
$4\,mesas \rightarrow 10\,lugares$

$A\ cada\ mesa\ adicionada, soma - se\ dois\ lugares, logo$:
$5\,mesas \rightarrow (10 + 2) = 12\,lugares$

II - Pensar aritmeticamente e internamente: modelando com números e percebendo padrões correlatos às possibilidades numéricas e operatórias do problema.

Considerando L o número de lugares, tem-se:

1	*mesa:*	*L*	=	*4*	=	*2*	*x*	*1*	+	*2*
2	*mesas:*	*L*	=	*6*	=	*2*	*x*	*2*	+	*2*
3	*mesas:*	*L*	=	*8*	=	*2*	*x*	*3*	+	*2*
4	*mesas:*	*L*	=	*10*	=	*2*	*x*	*4*	+	*2*
5	*mesas:*	*L*	=	*12*	=	*2*	*x*	*5*	+	*2*

Na sequência, vê-se que o número de mesas corresponde ao número que está multiplicado por 2. Então, para m meses haverá m multiplicado por 2, cabendo a generalização:

m	*mesas:*	*L*	=	*2*	*x*	*m*	+	*2*

Portanto, um modelo matemático que permite calcular número de mesas, ou de lugares (se conhecido o número de mesas) é dado por:

$$L = 2 \,.\, m + 2$$

III - Pensar analiticamente:

Verificação:

$se\ m = 5: \ L = 2 \cdot 5 + 2 = 12$
$se\ m = 3: \ L = 2 \cdot 3 + 2 = 8$
$se\ m = 15: L = 2 \cdot 15 + 2 = 32.$

Portanto, a resposta para o enunciado, que questiona o número de lugares quando consideradas 15 mesas é 32 lugares.

Embora se tenha exposto um movimento de pensamento algébrico, Lins (1992) afirma que não há um modo específico e único de pensamento algébrico direcionado a um problema. Para ele, são muitos os pensamentos possíveis, não havendo os certos ou os errados, mas sendo todos eles legítimos. Por exemplo, poder-se-ia pensar para o problema anterior:

1	*mesa*:	*L*	=	*4*	=	*4*	+	*2*	*x*	*0*
2	*mesas:*	*L*	=	*6*	=	*4*	+	*2*	*x*	*1*
3	*mesas:*	*L*	=	*8*	=	*4*	+	*2*	*x*	*2*
4	*mesas:*	*L*	=	*10*	=	*4*	+	*2*	*x*	*3*
5	*mesas:*	*L*	=	*12*	=	*4*	+	*2*	*x*	*4*

onde o número que multiplicado por 2 corresponde ao número de meses subtraído de uma unidade, podendo-se, a partir desta constatação apresentar o modelo matemático:

$$L = 4 + 2 \,.\, (m - 1)$$

que corresponde ao modelo anterior, o que se verifica após movimento de simplificação:

$$L = 4 + 2. (m - 1)$$

$$L = 4 + 2m - 2$$

$$L = 2 \,.\, m + 2$$

Ambos os movimentos de pensamento algébrico são legítimos e neles se produzem significados que quando anunciados, constituem-se como conhecimentos ao aluno.

De modo mais geral, Kaput (2008) define pensamento algébrico como um processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

Em ambas definições, a de Lins (1992) e a de Kaput (2008), pode-se destacar o movimento de generalização, que é o "salto" que deve ser dado da Aritmética à Álgebra. Assim, os sujeitos produzem ideias relativas aos fatos observados sobre situações problema e a compreensão sobre esses fatos se dá pela maturação e pelo desenvolvimento da linguagem nesses contextos. Isto dialeticamente possibilita a generalização, que segundo Vygotsky (2001), na obra *A construção do pensamento e da linguagem,* é constituída a partir da linguagem e pela linguagem.

Esse salto – das realizações Aritméticas às realizações algébricas - é constantemente apontado por professores de matemática como a grande dificuldade dos alunos, muitas vezes todo o processo aritmético é desenvolvido, tal qual feito no exemplo anterior, mas as soluções vão se dando na repetição e ampliação dos dados aritméticos. Desse modo, na atividade anterior, para se saber a quantidade de lugares quando se tem 100 mesas é necessário saber a quantidade de lugares para 99 mesas, que por sua vez, solicita saber a quantidade de lugares para 98 mesas. Ou seja, o aluno realiza somas sucessivas de duas unidades, a começar pela quantidade de lugares em 1 mesa, até chegar a quantidade correspondente a 100 mesas.

A dificuldade de generalização torna o trabalho mais árduo e demonstra uma familiaridade maior dos alunos com a Aritmética do que com a Álgebra. Esse é um dos motivos pelos quais, Lins e Gimenez (2005), na obra *Perspectivas em Aritmética e álgebra para o século XXI,* expõem a necessidade de se ensinar Álgebra entrelaçada à Aritmética, de modo que uma vá implicando no desenvolvimento da outra. Isso evidencia que é preciso começar mais cedo o ensino de Álgebra, que no sistema escolar atual, se inicia depois de "consolidadas" as compreensões Aritméticas. A simbologia deve ir amadurecendo. Por exemplo, pode-se trabalhar equações não se valendo de x e y, mas de símbolos ou objetos com os quais os alunos já trabalham. Pode-se pedir para que o aluno determine qual o número que deve ser colocado no lugar do triângulo e do quadrado para que se tenha: $\Delta + 5 = 9\, e\, \odot - 3 = 1$. Em um movimento de transição, pode-se perguntar: qual número somado com 5 resulta em 9, e qual número do qual se subtrai 3 e resulta em 1? Essa pergunta já solicita uma interpretação que direciona o pensar o triângulo e o círculo como incógnitas, os situando no âmbito de operações matemáticas, o que abre caminho para se iniciar o estudo de equações, inserindo as letras x e/ou y, assim como usualmente se faz.

Sobre isso, Lins (1992) afirma que se introduz a Álgebra na escola já focando as operações como método/esquema para resolver exercícios envolvendo equações. Dessa forma, não se constitui um significado para as incógnitas e para a igualdade, o que pode vir a corroborar a grande dificuldade dos alunos com Álgebra nos próximos níveis de ensino.

É preciso, portanto, criar em sala de aula um diálogo especialmente sobre a incógnita, sobre o que ela representa, sobre modos pelos quais ela pode ser indagada. Assim, antes de pensar em isolar a incógnita de um lado da igualdade de uma equação, operando conforme as regras, o aluno pode valer-se do raciocínio lógico, indagando: qual número pode ser colocado aqui para que essa igualdade seja verdadeira?

É preciso também tematizar a *igualdade* expondo que ela expressa uma equivalência. O início direto com operações especialmente quando se ensina a "deixar a incógnita do lado esquerdo da igualdade" cria um obstáculo didático, do âmbito do planejamento, uma vez que deste modo fica implícita a igualdade como *anunciadora* de resultados (x é igual a...). Assim, muitos alunos quando na resolução de uma equação se depara com $4 = x$, por exemplo, ficam perplexos, sem saber qual o próximo passo, uma vez que entendem que a solução não está pronta.

A simbologia pode dar-se também por materiais concretos, assim como exposto no trabalho de Silva e Pinheiro (2011) no artigo "Álgebra na ponta dos dedos". Neste trabalho faz-se um estudo do ensino de Álgebra para alunos cegos, abrindo possibilidade de pensar esse ensino para alunos não cegos. Focou-se nas operações na resolução de equações: a incógnita x foi representada por bolinha de gude, a incógnita y foi representada por feijão. Na experiência de um cego, as diferenças entre objetos são percebidas com muita clareza, uma vez que há toda uma concentração direcionada às mãos, ao tato. Com isso, na equação $3x + 2y = 0$ o cego não junta numa mesma porção três bolinhas de gude com dois feijões, haja vista que ele domina a diferença entre esses elementos, ele os mantém em espaços distintos, sobre a mesa. Em soluções de alunos não cegos, é comum encontrarmos desenvolvimentos para essa equação, como por exemplo, $5xy = 0$, juntando numa mesma unidade os elementos da equação. Como o cego entende que $x + x$, ou $2.x$ correspondem a duas bolinhas de gude, quando a ele é solicitado a multiplicação $x.x$, ele sabe que o resultado é algo diferente de $2x$, ou de duas bolinhas de gude. Na experiência de Silva e Pinheiro (2011), ao resultado da operação $x.x$, o cego criou outro correspondente, um "cubinho" de madeira que também estava sobre a mesa, assim esse cubo só poderia ser posto (somado) junto com outros cubos iguais, ou seja, o cubo passa a representar $o\ x^2$, que não pode ser somado com x (bolinha de gude), apenas com outros x^2 (cubos de madeira). Alguns erros comuns nesse contexto são: $x.x = 2x$; $x^2 + x = 3x^2$.

Assim se constitui um modo dentre outros de ensinar sobre equações algébricas em sala de aula para alunos não cegos, visto que objetos concretos podem ser manuseados por eles.

Com os exemplos expressos, sugere-se neste texto abrir horizontes pelos quais diferentes modos de linguagem possam habitar a sala de aula. Sugere-se que a linguagem algébrica possa ir se constituindo no diálogo entre alunos e entre professor e alunos. Que o desenvolvimento dessa linguagem se dê com um fundo que abarque o mundo circundante dos alunos e situações problemas que nele se expõem. Desse modo, o aluno pode entender o pensamento algébrico não apenas em sua formalidade, mas também nas possibilidades que ele abre para entender e resolver problemas que transcendem a matemática escolar, problemas que surgem em seu cotidiano, que lhe solicitam um processo de generalização. Assim, a Álgebra constitui-se como um dos modos pelos quais pode-se interpretar e compreender o mundo, um "texto" com e pelo qual se pode ler nuanças deste mundo.

Tecnologias digitais no ensino de Matemática na Educação Básica

Dentro do amplo campo da Educação, as pesquisas atuais se voltam para as chamadas Tendências em Educação, essas que são aplicadas no ensino e na aprendizagem. Direcionando olhares e estudos para o campo da Tecnologia na Educação, nota-se que o mesmo é muito amplo e se modifica mais rapidamente que os demais campos da Educação, em contraposição, nele é que menos se observa planejamento e estrutura.

À medida que a tecnologia se desenvolve na sociedade, implicações positivas e negativas atingem o sistema educacional, geralmente, os benefícios consistem nas inúmeras possibilidades que a utilização das mesmas pode proporcionar, o que ocorre de negativo refere-se às dificuldades de desenvolvimento e conquista dessas possibilidades.

A proposta de integração da tecnologia ao ensino e à aprendizagem, não foi simplesmente pautada, as escolas fazem parte do contexto social, como este contexto evolui constantemente, principalmente devido ao avanço tecnológico, as escolas também devem acompanhar na medida do possível esse avanço. Porém, a integração escolas/tecnologias, é complexa, visto que tenta-se aglutinar elementos que a muito estavam separados. Nesse aspecto, a tecnologia que seria algo bom e relevante, passa a gerar problemas, pois, as escolas e todo seu contexto não possuem estrutura suficientemente adequada para mudanças tão imediatas.

Visando comprimir essa lacuna entre tecnologia e educação, muitas são as propostas e métodos de utilização de tecnologias em sala de aula, grande parte delas direcionadas para a formação de professores, defendendo a familiarização dos mesmos durante o período de graduação e na formação continuada, com os diferentes tipos de abordagens educacionais utilizando-se das tecnologias.

O fato é que, o avanço da tecnologia ocorre de maneira acelerada, literalmente "atropelando" importantes elementos do contexto escolar, os professores não estão preparados para utilização da mesma, as escolas não possuem estrutura adequada para implantação, enfim, tenta-se passar de um sistema tradicional para um sistema inovador de maneira muito rápida, sem antes orientar os mais interessados.

Freudental (1978) aponta que uma inovação nem sempre pode ser considerada algo bom e eficaz, cita como exemplo, as inovações informatizadas, mal conduzidas por professores, devido ao fato de não estarem familiarizados com as mesmas, nesse caso, a inovação se torna um problema.

Em Gadanidis et al (2016) entende-se que as tecnologias da informação e comunicação, conhecidas como TDIC, vêm ganhando espaço em nossa rotina e configurando nossas ações na sociedade. “As transformações sociais revelam que estamos em “novos tempos” e necessitando de alternativas para nos adequarmos às demandas apresentadas” (MIQUELINO, NEVES, CARVALHO, 2013, p. 108). Por isso, verifica-se que com as constantes evoluções e atualizações das versões de linguagem de programação e softwares, as interfaces dessas tecnologias ficam mais amigáveis, atrativas e a internet mais rápida.

Além disso, as TDIC se constituem como importantes recursos pedagógicos, com possibilidade de modificar a dinâmica de sala de aula, priorizando o diálogo em torno das implicações dos trabalhos realizados pelos alunos com essas tecnologias, influenciando em outros modos de ensinar e aprender.

> A informática começou a disseminar-se no início no sistema educacional brasileiro nos anos 80 e início de 90, do século XX, com uma iniciativa do Ministério da Educação. Inicialmente o MEC patrocinou um projeto, denominado EDUCOM, destinado ao desenvolvimento de pesquisas e metodologias sobre o uso do computador como recurso pedagógico, do qual participaram cinco universidades públicas, nas quais foram implantadas centro-pilotos para o desenvolver investigações voltadas ao uso do computador na aprendizagem (ALMEIDA, 2004, p. 711-712).

Este movimento de implementação deu-se mediante a compreensão de que as TDIC podem transformar a pedagogia que o professor utiliza em suas aulas, fazendo com que a sala de aula seja um ambiente de troca de informações e de experiência e não apenas de transmissão dessa informação e experiência” (SILVA, 2019, p. 46).

Duquia (2021) afirma que essas TDIC conquistaram um espaço significativo em nossos meios, modificando a interação humana, inclusive o modo de viver, e consequentemente no meio educacional proporcionando modos de ensinar e de aprender, distintos dos usuais, o que implica reconfiguração das salas de aula, dos espaços de aprendizagem, bem como das posturas de professores e estudantes, estes que “em nossos dias já têm um contato com a tecnologia desde a primeira infância. Nos anos finais do ensino fundamental a maioria dos estudantes possuem smartphones e os utilizam principalmente para acesso a internet, comunicação e lazer” (RAABE, GOMES, 2018, p. 7). Esses alunos já estão familiarizados com essa tecnologia e são de fácil acesso a grande maioria, o que possibilita uma maior relação e troca de informações entre professor e aluno.

Ademais, os avanços tecnológicos permitem o surgimento de cenários alternativos para educação, em especial na matemática. Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2016), nos últimos trinta anos as pesquisas em educação matemáticas realizadas no Brasil enfatizam o uso pedagógico de tecnologias para investigação matemática, afirmando que “associar as tecnologias ao processo de ensino e aprendizagem dos discentes tende a auxiliar na construção do conhecimento", ampliando possibilidades de visualização, de organização de informações e de pesquisa (SANTOS, 2017, p.15).

Recentemente, no contexto pandêmico, as tecnologias digitais se fizeram mais presentes na educação, desta vez como ferramentas sem as quais não poderia haver a condição mínima e necessária para o ensino, qual seja, a comunicação. Segundo SAE DIGITAL (2022), as escolas tiveram que se readequarem, principalmente no que diz respeito ao ensino remoto, quanto às adaptações de aulas e atividades para o ensino de forma digital.

A pandemia do Covid-19 trouxe com mais força ao centro do debate a relevância da inclusão digital e da democratização do ensino. O direito de estudar e aprender existe, porém, muitos não conseguiam e muitos ainda não conseguem usufruir dos mesmos. Tal democratização solicita, dentre outras demandas, "o uso pedagógico da informática nas escolas do campo, disponibilizando computadores, recursos digitais e conteúdos educacionais". Ademais, Borges (2008) esclarece que a inclusão digital ocorre quando o indivíduo utiliza a informática como um meio de acesso à educação, ao trabalho, às relações sociais, à comunicação e ao exercício de sua cidadania.

A distância geográfica, antes era um empecilho, hoje, uma dificuldade. São muitas as comunidades carentes de uma estrutura escolar adequada ou até mesmo desprovida de uma rede de ensino. Para os habitantes destas comunidades, que queiram estudar, cabe-lhe locomover durante horas até uma cidade vizinha mais desenvolvida. Muitas das vezes, as limitações desses habitantes, os deixam até mesmo sem opções.

A Educação a Distância (EAD) surge tendo como um dos grandes objetivos comprimir a falta desse acesso ao ensino. Entre as principais ferramentas utilizadas pela EAD para cumprir este objetivo, consta a internet, uma vez que a mesma evolui e é disseminada cada vez mais entre as regiões.

Para promoção do ensino via internet, são necessários meios tecnológicos para viabilizar a comunicação no processo de ensino e de aprendizagem, para essa funcionalidade, são aderidas plataformas virtuais, estas que são denominadas de Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA). Esse ambiente possibilita a interação entre professor/aluno e entre alunos. Assim, a distância física de fato ainda persiste, porém, considerando a dimensão virtual, as pessoas nesse contexto, ocupam um mesmo espaço e se "esbarram" em vários momentos.

Valente (1993 p.1) elucida que "na educação de forma geral, a informática tem sido utilizada tanto para ensinar sobre computação, o chamado computer literacy, como para ensinar praticamente qualquer assunto por intermédio do computador". Deste modo, as escolas têm cada vez mais aderindo o ensino de informática em seu currículo escolar.

Porquanto, a informática, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), fazem parte das linguagens, dos códigos e suas tecnologias, no que destaca as habilidades que os alunos deverão desenvolver no decorrer do ano.

No entanto, com as propostas pedagógicas de tecnologia surgem algumas indagações, dentre as quais as apresentadas por Borba, Silva e Gadanidis (2016). São elas:

> ✓ Como as inovações tecnológicas têm permeado a educação matemática?
> ✓ Como a investigação matemática baseada no uso de tecnologias foi se transformando ao longo do tempo?
> ✓ Quais tecnologias foram utilizadas? E de que forma?
> ✓ Que tipos de atividades matemáticas foram exploradas? (BORBA, SILVA E GADANIDIS, 2016, p.14).

É importante que tais questionamentos sejam respondidos, mesmo em parte, para que se possa pensar as práticas atuais. Assim com citado por Borba, Silva e Gadanidis (2016), sabe-se que o trabalho com softwares no ensino de matemática vem crescendo. No que diz respeito ao ensino de Geometria, um dos primeiros softwares criados foi o LOGO, nos anos de 1985 e, posteriormente, em 2001, foi criado o software GeoGebra, com interface gráfica e lógica mais avançada. Muitos abandonaram outros softwares com a chegada do GeoGebra, no entanto, conhecendo a história, a funcionalidade e as contribuições desses softwares, pode-se trabalhar com os mesmos em paralelo com os atuais. Com o LOGO, por exemplo, pode-se trabalhar lógica de programação junto às noções básicas de construção geométrica.

O trabalho com softwares é uma das evidências da associação do ensino de matemática com tecnologia digitais. No entanto, para além dos softwares as tecnologias habitam a sala de aula, a escola, assumindo diferentes formas físicas e lógicas. Os alunos levam à sala de aula seus celulares, calculadoras, relógios, a internet e tudo que ela pode proporcionar de acessibilidade a conhecimentos. O desafio didático-pedagógico consiste em fazer dessas ferramentas modos de fazer matemática. Frota, Borges (2004) propõem *matematizar a tecnologia,* permitindo que os alunos pensem matemática com tecnologias e façam delas fonte de aprendizado matemático, fonte de métodos e fonte de conscientização epistemológica sobre a matemática e sua história.

O uso de software pode contribuir de várias maneiras, tais como, segundo Nascimento (2012), no que tange à visualização geométrica, proporcionando ao aluno a habilidade de visualizar a forma e a medida que são fornecidos os dados necessários para construção do objeto geométrico de estudo. Além da representação e da simulação dos materiais sólidos e concretos, conforme Ponte (2009), tais softwares proporcionam meios para o desenvolvimento da ideia de variável e a percepção das formas gráficas das funções.

Assim sendo, a diversidade de softwares matemáticos e outras ferramentas tecnológicas existentes atualmente podem facilitar o entendimento no processo de ensino e de aprendizagem. No âmbito da Matemática, muitos softwares foram criados com direcionamento à Geometria e ao Cálculo. No entanto, as questões gráficas e suas complexidades, observadas para criação de softwares, se estendem também a outras áreas da Matemática, como a Álgebra. Um exemplo de software com o qual se pode trabalhar o ensino de Álgebra é o APLUSIX, que é destinado a realização de cálculos algébricos e que, de acordo com Bittar (2020), oferece a resolução de equações passo a passo, e proporciona a validação do trabalho do aluno.

Ponte (2009) apresenta o EXCEL como um software que pode ser utilizado no ensino de Álgebra. Indica que possui uma plataforma simples, de fácil manipulação, que permite também a criação de gráficos e, a folha de cálculo por mostrar as expressões apenas em segundo plano, pode contribuir ao desenvolvimento no aluno da noção de variáveis. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) o software pode ser usado no 2º e 3º ciclos.

Um software já citado, que permite o estudo da álgebra é o GeoGebra, quer seja no trabalho com planilhas, que seja no trabalho com expressões e equações algébricas. De acordo com Gadanidis et al. (2016), o software possui a vantagem de ser gratuito e de interface de fácil leitura, com um design sofisticado, interessante e muitos recursos a serem explorados.

Do mesmo modo, Ferreira (2010) afirma que o GeoGebra tem inúmeras ferramentas que são úteis na produção de figuras, é um software dinâmico que “pode trazer importantes benefícios, ao permitir, de uma forma mais ou menos intuitiva, construir e explorar figuras, formular conjecturas e relacionar propriedades que se evidenciam durante o processo de manipulação” (AMADO et al., 2015, p 638). Ele “permite ao construtor que optar por seu uso, fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e mudá-los dinamicamente depois, e ainda equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente” (FERREIRA, 2010, p.3).

Neste estudo, dentre as diversas possibilidades do software GeoGebra faz-se um trabalho com equações, visando conceitos algébricos dos anos iniciais, buscando compreender o pensamento que subjaz as operações algébricas realizadas pelos alunos.

Metodologia, campo e sujeitos de pesquisa

Trata-se de um estudo do tipo exploratório e qualitativo com abordagem descritiva. Tem-se por objetivo analisar de forma prática as dificuldades apresentadas pelos alunos quanto à aprendizagem de álgebra nas séries finais do ensino fundamental, de uma escola pública do município de Davinópolis e apresentar propostas de trabalho algébrico com o software GeoGebra, visando compreender: *como o trabalho com o software Geogebra contribui, ou pode contribuir ao desenvolvimento do pensamento algébrico?*

De acordo com Nunes, Nascimento e Luz (2016), a pesquisa descritiva se caracteriza por um estudo no qual o pesquisador observa e compara os dados, sem interferir nos seus resultados, por isso esse tipo de estudo vai ao encontro de descobrir, observar, documentar, examinar e interpretar os elementos coletados, além disso, para ela ser validada é necessário bases científicas que resguarda sua veracidade, contribuindo também para o direcionamento do investigador.

A presente pesquisa foi realizada no Centro Integrado de Educação de Davinópolis (CIED), que fica situado na rua Dom Marcelino, s/n, no bairro santo Antônio, município de Davinópolis, estado do Maranhão. Segundo os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a população deste município no censo realizado em 2010 era de aproximadamente 12.579 pessoas.

O CIED conta com 8 salas de aula, funcionando no turno matutino com o ensino fundamental menor e no turno vespertino com fundamental maior. Participaram como sujeitos deste estudo 35 alunos, sendo 18 do 8° ano A e 17 do 8º B, sendo que todos participaram sob permissão concedida pelos pais, que assinaram o Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE).

A coleta dos dados ocorreu em três etapas: sendo a primeira através de um questionário impresso, realizado em sala de aula, possuindo 7 questões, composta por questões objetivas e discursivas, com intuito de observar se eles reconheciam a definição de equação e se identificavam sua estrutura. Buscou-se também verificar qual estratégia os alunos usaram para resolução das situações problemas utilizando linguagem algébricas.

O segundo momento foi caracterizado por uma intervenção, considerando as dificuldades verificadas no questionário. Foram ministradas aulas com auxílio do software GeoGebra, de modo expositivo, em sala de aula, pois a escola não possui laboratório de informática. Para tanto, foi utilizado o notebook do pesquisador, e o Datashow de propriedade da escola. As atividades desenvolvidas no software eram de acordo com a atividade diagnóstica, aplicada na primeira etapa da pesquisa, exercícios do livro didático e situações problemas.

Foram também apresentadas várias ferramentas que o software disponibiliza, como: de construção de gráficos, simulador de balança para representar equações e inequações do 1º grau e área e perímetro de figuras planas. Durante a explicação sobre o GeoGebra, foi apresentado um problema, buscando enfatizar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A terceira etapa da pesquisa foi analisar o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos através de um questionário. O intuito é observar se os alunos conseguiram interpretar o enunciado de questões e resolvê-las, valendo-se de estratégias trabalhadas na intervenção. Com carga horária de 7HA em cada uma das turmas, totalizando 14HA. Visou-se também observar se o software GeoGebra contribuiu para o estímulo do pensamento algébrico nos discentes.

Descrição e análise dos dados

Visando compreender a pergunta de pesquisa, foram elaborados quatro instrumentos de pesquisa, são eles:

- Instrumento 1: Atividade diagnóstica
- Instrumento 2: Apresentação do software e atividade complementar
- Instrumento 3: Atividade avaliativa

A análise descritiva-interpretativa dar-se-á apresentando como se deu a realização em campo de cada um destes instrumentos. No âmbito da análise, a identificação dos alunos se dará pelo código composto pela letra referente a sua turma de oitavo ano, acrescentado do seu número de chamada. A seguir faremos a descrição dos instrumentos citados acima, a partir do primeiro instrumento: atividade diagnóstica.

Atividade diagnóstica

O Instrumento 1, caracterizado pela Atividade diagnóstica, foi desenvolvido no primeiro momento da pesquisa, com duração de 2HA em cada turma, a fim de identificar as possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos com relação a Álgebra, a capacidade de abstração, de generalização e ter uma base comparativa de análise para a proposta desenvolvida neste estudo. Foi apresentado de antemão aos discentes pelo pesquisador o objetivo da pesquisa e da atividade que posteriormente foi entregue. As questões eram abertas e de múltipla escolha, com situações-problemas, onde uma contextualização levava para uma incógnita onde precisava ser determinada.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009) os erros mais comuns dos alunos estão relacionados a transposição da Aritmética para Álgebra. Os mais comuns estão relacionados no Quadro 1, que segue:

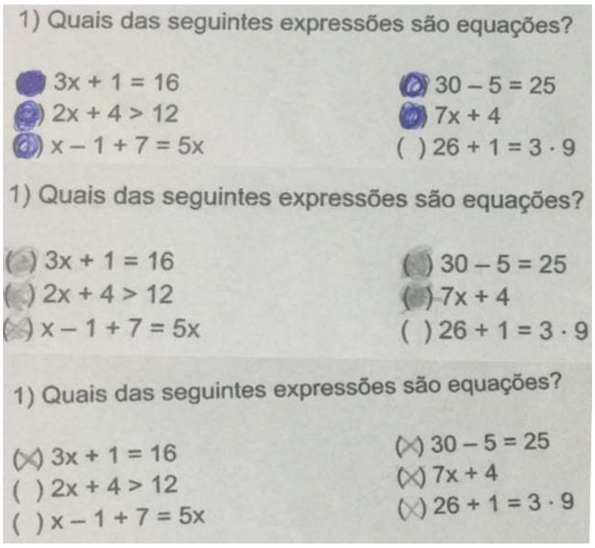
Quadro 1: Erros e dificuldades mais comuns dos alunos em Álgebra

Erros / Dificuldades	**Exemplos**
• Identificação de uma equação	30 - 5 = 25
• Não saber como começar a resolver uma equação	
• Adição incorreta de termos semelhantes	2a + 5a + 3b + 7ab = 17
• Conclusão incorreta da resolução da equação	
• Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma ação.	3x + 5 = 2x ⇔ 5x = 5
• Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	O quádruplo de um número mais 63 é igual a 211 ⇔ $x + 63 = 211$
• Análise de expressões algébricas	

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009)

Compreendendo essas dificuldades, foi elaborada uma atividade diagnóstica. Na Questão 1 objetivava-se analisar o conhecimento dos alunos sobre o que caracteriza uma equação do 1° grau. No entanto, uma das dificuldades mais apresentada pelos alunos é a *identificação de uma equação* no que diz respeito à sua estrutura, como pode-se verificar nas respostas dos alunos A7, A11 e B8, expressas na Figura 1.

Figura 1: Respostas à questão 1 da atividade diagnóstica (alunos A07, A11 e B08)

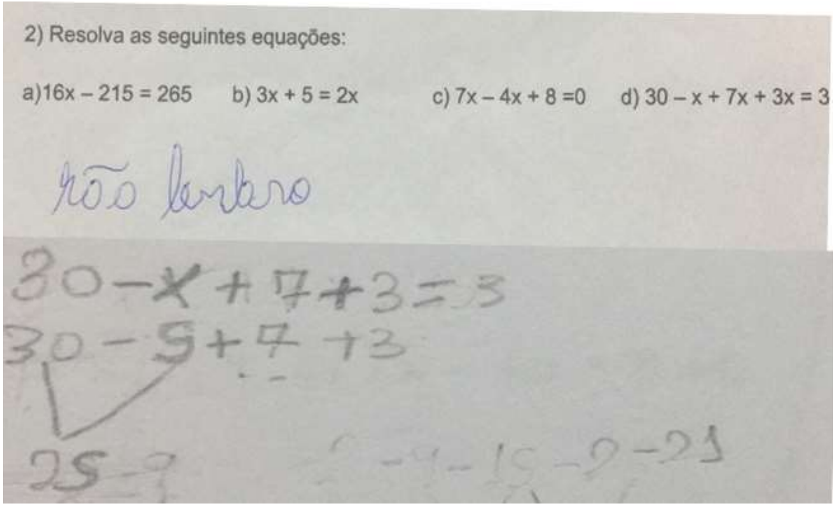


Fonte: dados da pesquisa (2022)

Dos 35 alunos apenas 12 marcaram corretamente as opções. Isso mostra os demais alunos não compreendem o conceito de equação, tampouco entendem os símbolos que a constitui. Evidência disso são as respostas indicando como equação expressões apenas numéricas e inequações, sendo que uma equação é uma sentença algébrica que possui uma igualdade e, pelo menos, uma incógnita, representada nos casos pela letra x.

Consequência do desconhecimento das características de uma equação, bem como de operações envolvendo símbolos que representam as incógnitas levaram os alunos a ter dificuldades em resolver as equações propostas na Questão 2. Apenas 7 dos 35 alunos responderam corretamente todas as equações. Muitos deles sequer iniciaram a resolução, alegando não saber. Como exemplo, expõe-se na Figura 2 algumas respostas:

Figura 2 – Respostas à Questão 2 da atividade diagnóstica (alunos B03 e A02)

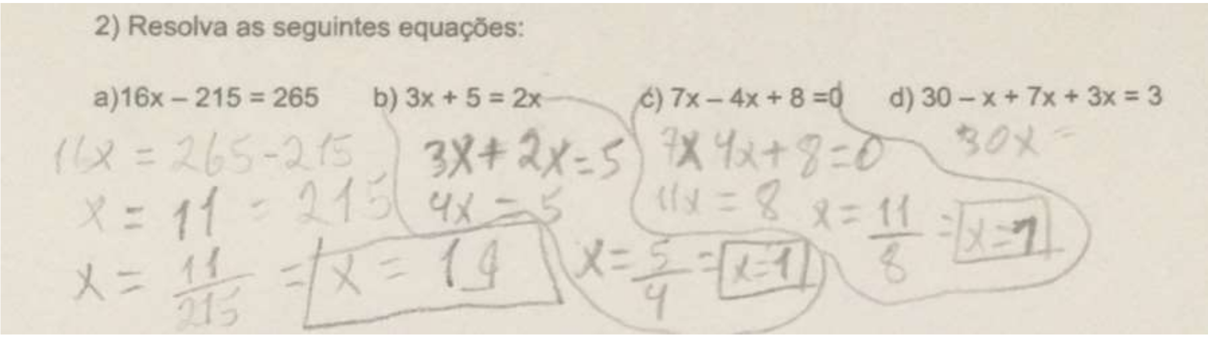


Fonte: dados da pesquisa (2022)

Não lembrar, diz respeito à possibilidade de o aluno já ter estudado o assunto, no entanto, passado o tempo, não se recordar do mesmo. Isso pode ser implicação do período pandêmico da Covid-19, responsável por grande defasagem dos alunos nos dias atuais. Embora se tenha aberto a possibilidade do ensino remoto, muitos alunos, especialmente os mais vulneráveis financeiramente não conseguiram participar das aulas com ampla frequência. Mesmo os que participaram se depararam com as dificuldades de um modo de ensino distinto daquele com o qual estavam acostumados, o que também implicou problemas de aprendizagem.

Compreende-se, mediante respostas, que os alunos têm dificuldade de entender o sinal de igualdade como uma equivalência entre os dois membros da equação, e que para resolução é necessário agrupar termos comuns, efetuando operações em ambos os lados da equação, preservando a igualdade posta. A prática mais comum destacada diz respeito à mudança de lado dos termos, na maioria das vezes preservando o sinal do mesmo. A figura 3, que segue, é um dos recortes possíveis para representar esta situação.

Figura 3: Resposta da Questão 2 da atividade diagnóstica (aluno B16)

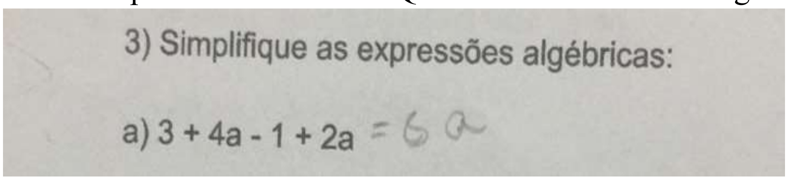

2) Resolva as seguintes equações:

a)16x – 215 = 265 b) 3x + 5 = 2x c) 7x – 4x + 8 =0 d) 30 – x + 7x + 3x = 3

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nas operações algébricas viu-se muita dificuldade dos alunos, indicando, por exemplo, um desconhecimento de como somar e subtrair monômios. Tal como pode-se verificar na simplificação da expressão algébrica trazida na Figura 4, referindo-se à Questão 3, que foi respondida corretamente (todos os itens) apenas por 2 alunos.

Figura 4: Resposta do aluno A8 à Questão 3 da atividade diagnóstica

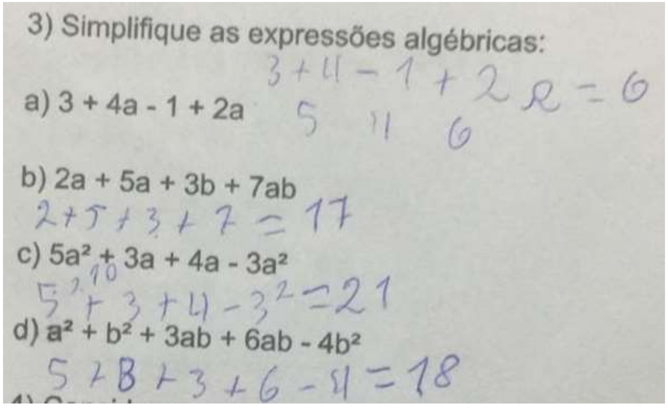

3) Simplifique as expressões algébricas:

a) 3 + 4a - 1 + 2a = 6 a

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Observa-se que o aluno interpreta que não há distinção entre os termos, realizando a soma direta de todos os coeficientes números e conservando a parte literal dos monômios. Em outras resoluções fez-se a soma dos coeficientes numéricos, no entanto, eliminou-se a parte literal dos monômios, tal como na resolução do aluno B5, expressa na Figura 5, abaixo:

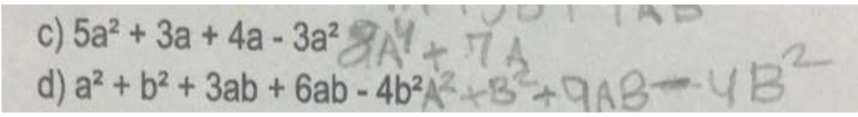
Figura 5: Resposta do aluno B5 à questão 3 da atividade diagnóstica



Fonte: dados da pesquisa (2022)

Outros erros de manipulação algébrica foram comuns, como por exemplo os expressos na Figura 6, que segue:

Figura 6: Resolução do aluno A17 à Questão 3 da atividade diagnóstica

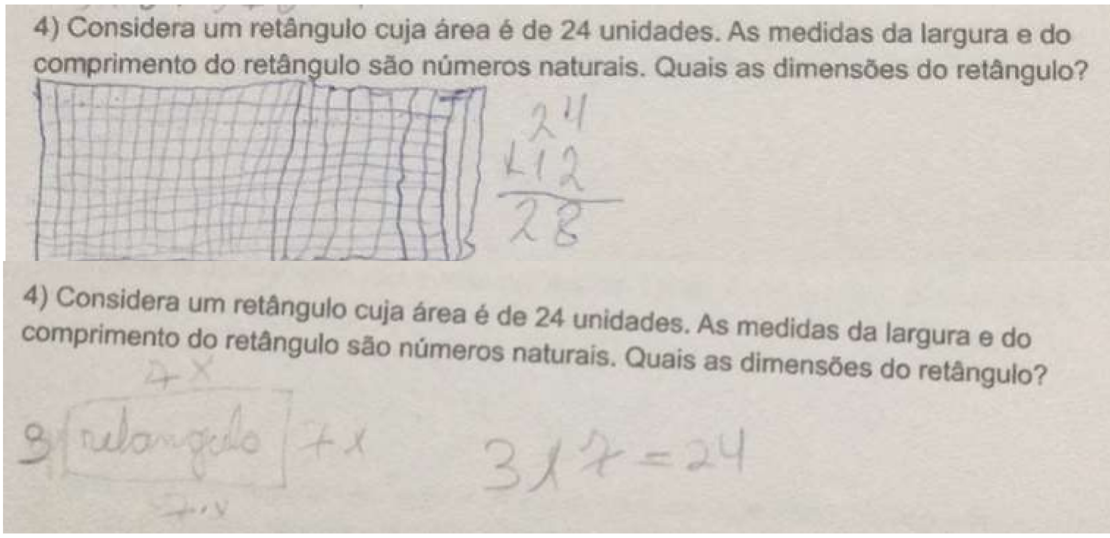


Fonte: dados da pesquisa (2022)

Vê-se que o aluno compreende quais os termos comuns e que deve operar com os mesmos, no entanto, soma ou subtrai qualquer número envolvido no enunciado, mesmo os números presentes como expoentes: $5a^2 + 3\,a^2 = 8a^4$. Isso mostra a predominância das operações aritméticas sobre as operações algébrica, indicando que a transição de uma a outra não está consolidada.

Tal consolidação se evidencia, também, pela interpretação de enunciados de situações-problema e determinação das incógnitas que tais enunciados não expõem diretamente. Este foi objetivo das questões 4 e 5. A Figura 7, abaixo, traz resoluções da Questão 4, cuja resposta correta foi dada por 8 alunos.

Figura 7 - Resolução dos alunos A10 e B8 à Questão 4 da atividade diagnóstica


4) Considera um retângulo cuja área é de 24 unidades. As medidas da largura e do comprimento do retângulo são números naturais. Quais as dimensões do retângulo?

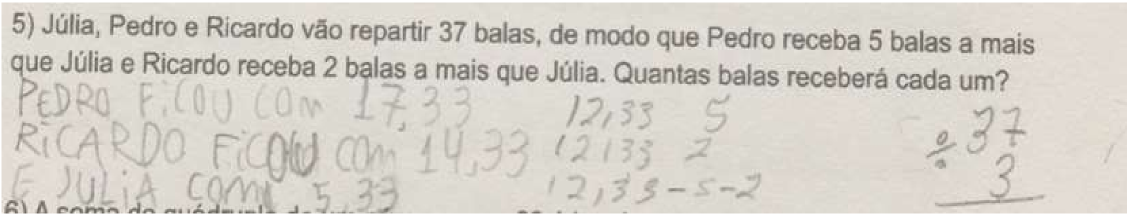
4) Considera um retângulo cuja área é de 24 unidades. As medidas da largura e do comprimento do retângulo são números naturais. Quais as dimensões do retângulo?

3x7=24

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Nota-se que em ambos os casos os alunos desenvolveram as primeiras etapas do pensamento algébrico (LINS,1992), do pensar aritmeticamente e pensar internamente, valendo-se de números e representações para modelar a situação, bem como de operações pertinentes ao campo semântico estabelecido para determinação de área. No entanto, a generalização, que é o passo que transcende a Aritmética, chegando à estrutura algébrica, não foi realizada. O mesmo acontece na resolução da Questão 5, de muitos alunos. Esta questão, expressa na Figura 8, nenhum aluno conseguir determinar a resposta correta.

Figura 8: Resolução do aluno B5 à Questão 5 da atividade diagnóstica


5) Júlia, Pedro e Ricardo vão repartir 37 balas, de modo que Pedro receba 5 balas a mais que Júlia e Ricardo receba 2 balas a mais que Júlia. Quantas balas receberá cada um?

PEDRO FICOU COM 17,33

RICARDO FICOU COM 14,33

E JULIA COM 5,33

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Ao observar a resolução do aluno B5 nota-se que o mesmo não transcendeu a barreira da Aritmética, valeu-se da estratégia de tentativas numéricas com as quais não chegou à resposta. O mesmo ocorreu com os demais alunos que tentaram resolver, outros afirmaram não saber como começar (15 alunos) deixando em branco a questão.

Diante desta descrição interpretativa compreende-se que há no grupo de sujeitos desta pesquisa grande dificuldade em trabalhar no escopo algébrico e também no aritmético, quando se constata que nem mesmo o trabalho com as quatro operações é consistente. Entende-se que tais dificuldades podem ser decorrentes da uma transição da Aritmética à Álgebra não bem constituída, uma passagem abrupta sem consolidar um fluxo que permitisse a consolidação do pensamento algébrico.

Tal constatação leva esta pesquisa à uma proposta, pautada na estruturação de uma dinâmica de ensino focada no pensamento algébrico, composta por aulas dialogadas e pelo trabalho com o software Geogebra. No tópico que segue se descreve como se deu o trabalho com este software.

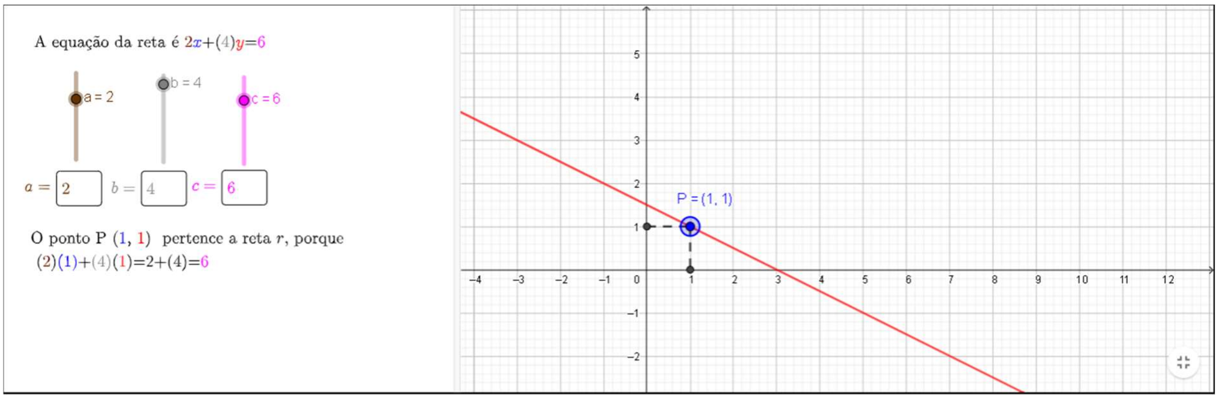
Apresentação do software GEOGEBRA

Os dados expressos na atividade diagnóstica apontam muitas dificuldades por parte dos alunos nos vários aspectos do campo semântico da Álgebra, da leitura às operações, indicando também a dificuldade da transição da Aritmética para a Álgebra. Diante disso, visando construir, ou reconstruir um fluxo entre a Aritmética e a Álgebra, neste trabalho fez-se uso didático-pedagógico do software GeoGebra (Instrumento 2). Para tanto, foram utilizados um notebook e um Datashow. O ideal seria que o trabalho com o aplicativo fosse em um laboratório de informática, onde cada discente tivesse acesso a um computador com o aplicativo instalado, porém a escola não dispõe desse ambiente. O projetor foi fornecido pela escola e notebook usado foi de propriedade do pesquisador.

Este encontro foi realizado na semana seguinte à atividade diagnóstica, pois foi preparado tendo como base as informações que o estudo da atividade oportunizou. Num primeiro momento do encontro foram apresentados, de modo geral, os principais erros apresentados pelo discente na atividade diagnóstica, destacando o que se caracteriza como uma estrutura algébrica. Em seguida, fez-se uma introdução histórica de atualizações sobre aplicativos matemáticos, chegando à atualidade, que traz o software GeoGebra com um dos softwares educacionais mais utilizados no mundo, com o qual se pode trabalhar sob perspectiva de diversas áreas da matemática, dentre as quais a Álgebra, que neste software pode ser estudada com direcionamento nos diferentes níveis de ensino. Esse encontro teve duração de 6HA, sendo 3HA em cada uma das duas turmas.

Neste encontro, foram realizadas algumas atividades no GeoGebra. A primeira foi a construção de gráficos de uma função afim, mostrando sua estrutura na forma $ax + by = c$. No qual poder-se-ia modificar os valores de a, b e c, resultando na variação da posição da reta no plano cartesiano, assim como nas coordenadas x e y. Como pode-se ver no exemplo da Figura 9.

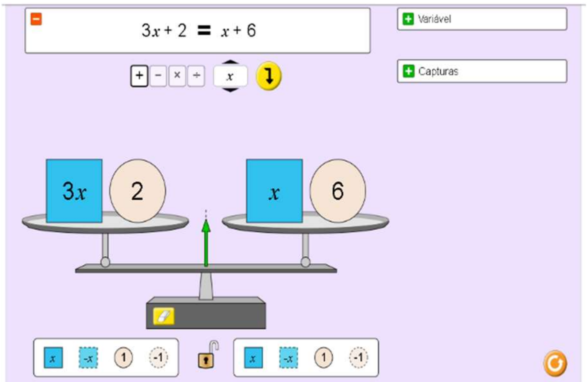
Figura 9: Reta e Equação GeoGebra



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/awhmme7v

A continuidade da apresentação do aplicativo se deu através da representação de equação com o simulador PhET (Physics Education Technology), que representa uma equação com e resolução de equação pelo "método da balança", tal como se pode verificar na Figura 10.

Figura 10: Simulador PHET

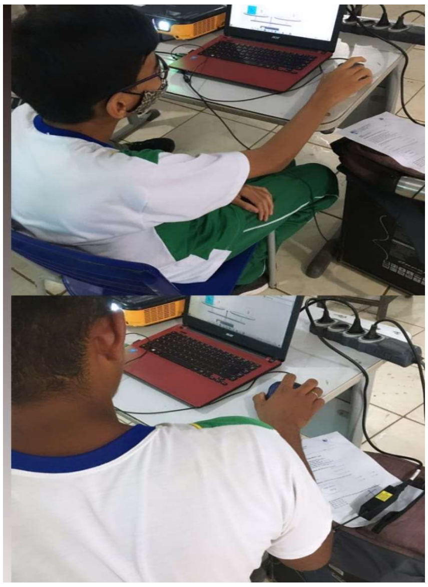


Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/mz6jb9wq

O simulador possibilita a compreensão da igualdade como equivalência entre dois lados, o que pode possibilitar o melhor entendimento de que uma operação que se realiza num dos lados deve ser também realizada no outro, para que a igualdade preserve sua qualidade de equivalência. Com esta ferramenta pode-se conduzir atividades para o desenvolvimento do pensamento algébrico, na construção definida por Lins (1992), intencionando; o *pensar aritmeticamente,* quando os alunos expressam os números presentes na equação e estimam números que ao substituir x, podem satisfazer a igualdade; *pensar internamente,* quando os alunos trabalham com os números e operações pertinentes ao campo da atividade proposta; *pensar analiticamente,* quando os alunos, após chegar a um resultado, realizam testes numéricos para verificar sua coerência.

Após a apresentação de como se trabalha com o aplicativo, alguns alunos foram convidados a resolver algumas equações no mesmo. Algumas imagens foram registradas, tal como as expressas na Figura 11, que segue:

Figura 11: Alunos resolvendo exercícios no simulador PhET no GeoGebra



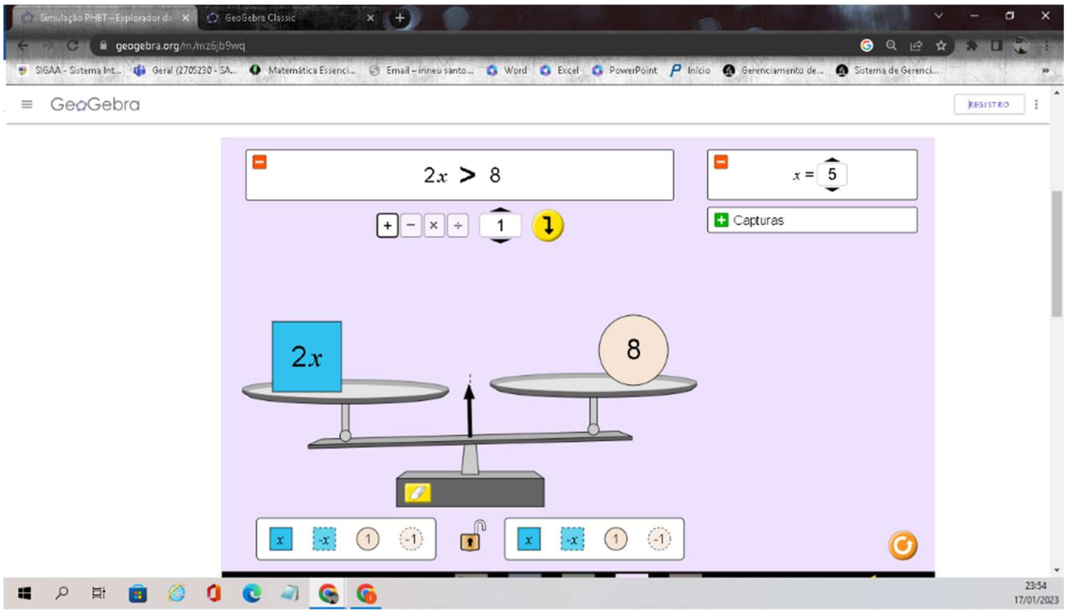
Fonte: registro da pesquisa (2022)

O trabalho dos alunos com o software se deu orientado por uma folha de atividades, com questões abertas/discursivas, com objetivo de avaliar se o GeoGebra, através das figuras, proporciona aos alunos uma forma mais dinâmica de visualizar as equações, e se contribui para o estímulo do pensar algebricamente.

Foi primeiramente exposto pelo pesquisador exemplos semelhantes aos da avaliação diagnóstica, mostrando dois modelos de representações na qual as sentenças poderiam ser representadas: modelo da balança e sistema cartesiano.

Com a representação do desequilíbrio da balança (tal como expresso na Figura 12), os alunos podem melhor compreender a diferença entre inequação e equação, constatando a desigualdade dos pesos quando comparados os dois pratos da balança e, consequentemente pode melhor entender as implicações de operações que se realizam em ambos os lados (pratos) do sinal, comprovado através da atividade complementar.

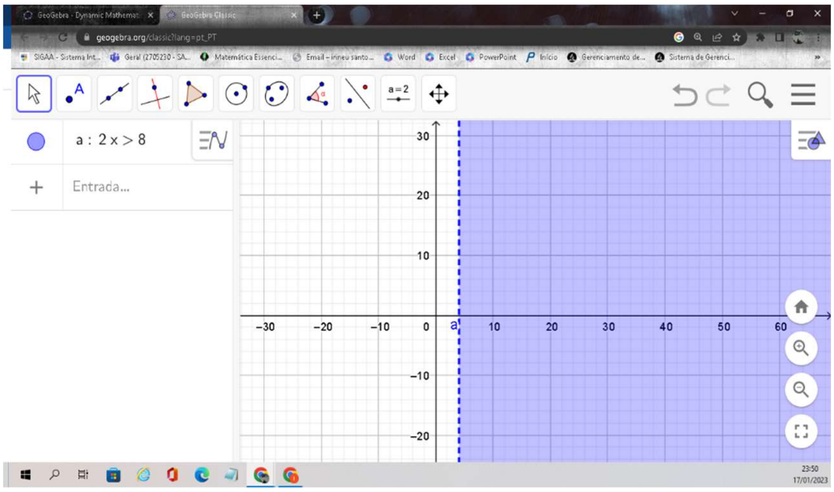
Figura 12: Representação do exercício no software por meio de balança



Fonte: https://www.GeoGebra.org/m/mz6jb9wq

Outro modelo apresentado pelo pesquisador no software foi o plano cartesiano (Figura 13), onde se destaca o valor da incógnita que satisfaz uma equação e o conjunto solução que satisfaz uma inequação, e isso de modo dinâmico, perceptível na variação dos valores de x e do sinal da sentença.

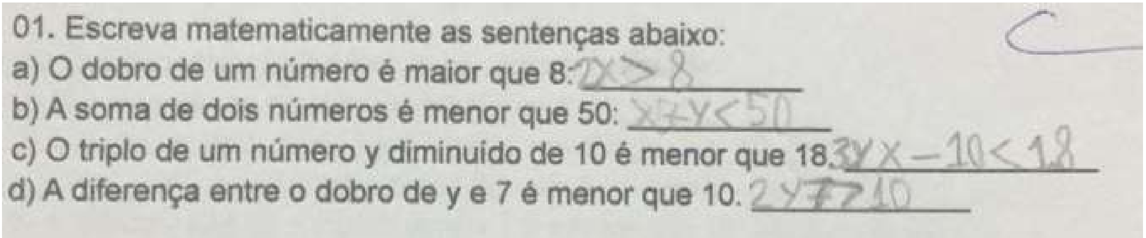
Figura 13: Representação do exercício no software por meio de gráficos



Fonte: https://www.GeoGebra.org/classic?lang=pt_PT

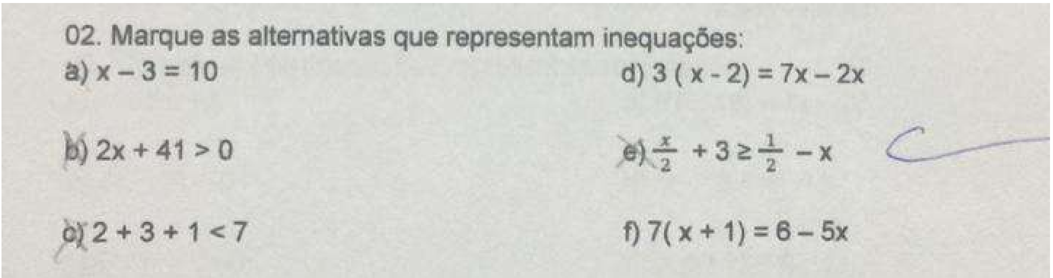
No mesmo encontro, após o trabalho com o software, os alunos foram convidados a responder algumas questões. As Figuras 14 e 15 expõem respostas à Questão 1 e 2, nas quais houve 25 e 34 acertos, respectivamente, o que indica que o trabalho com software foi significativo no que diz respeito à compreensão da estrutura de uma inequação, considerando que a atividade diagnostica anterior mostrou que tal compreensão não estava consolidada pela maioria dos alunos.

Figura 14: Resposta do aluno B1 à Questão 1 do trabalho mediado pelo GeoGebra


01. Escreva matematicamente as sentenças abaixo:
a) O dobro de um número é maior que 8: $2x > 8$
b) A soma de dois números é menor que 50: $x+y<50$
c) O triplo de um número y diminuído de 10 é menor que 18. $3yx-10<18$
d) A diferença entre o dobro de y e 7 é menor que 10. $2y7>10$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

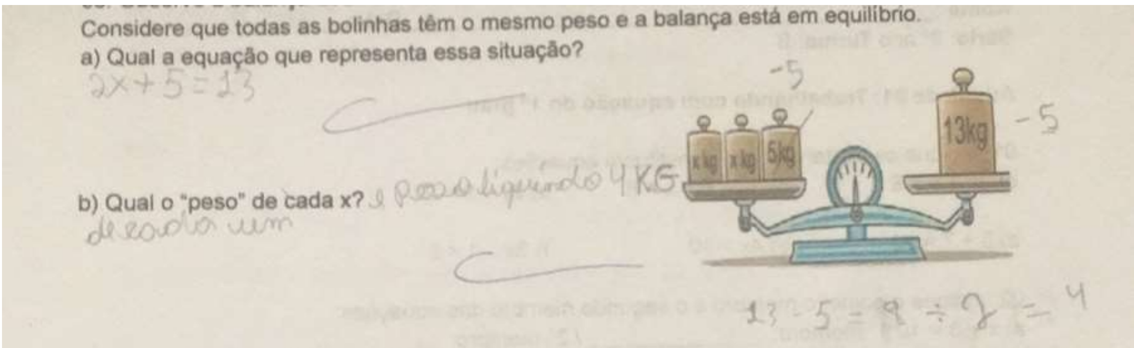
Figura 15: Resposta do aluno A7 à questão 2 do trabalho mediado pelo GeoGebra


02. Marque as alternativas que representam inequações:
a) $x - 3 = 10$
b) $2x + 41 > 0$
c) $2 + 3 + 1 < 7$
d) $3 (x - 2) = 7x - 2x$
e) $\frac{x}{2} + 3 \geq \frac{1}{2} - x$
f) $7(x + 1) = 6 - 5x$

Fonte: dados da pesquisa (2022)

No encontro foi desenvolvida a Questão 3, na qual se evidenciou o aprendizado de como resolver uma equação, sem se valer de movimentos usuais, tais como "passar para o outro lado com sinal trocado", que leva os alunos a erros em determinadas situações. No recorte trazido na Figura 16 o aluno B12 primeiramente representa a situação por meio de uma equação e, em seguida, simula as ações realizadas no software, subtraindo o mesmo peso em ambos os lados da balança, para preservar seu equilíbrio. Desse modo se reduz a possibilidade de erros, afirmação possível mediante os 30 acertos constatados na questão.

Figura 16: Resposta do aluno B12 à Questão 3 do trabalho mediado pelo GeoGebra


Considere que todas as bolinhas têm o mesmo peso e a balança está em equilíbrio.
a) Qual a equação que representa essa situação?
$2x+5=13$
b) Qual o "peso" de cada x? o peso é igual a 4 KG de cada um
$13-5=8 \div 2=4$

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

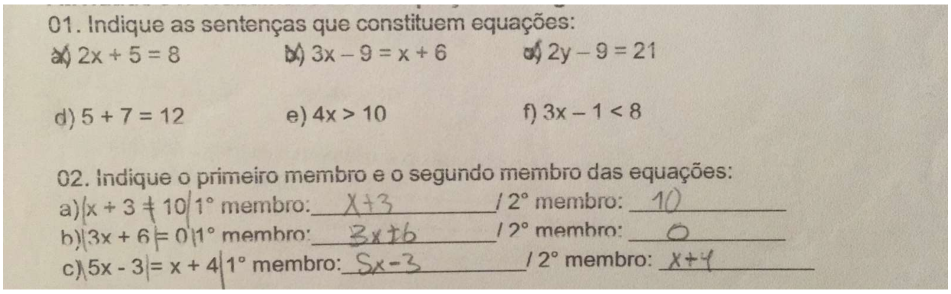
A simulação com a balança e o plano cartesiano permitiu variar valores para x, implicando variação dos conjuntos-solução e dos pesos dos pratos e, consequentemente do sinal os relaciona, podendo até mesmo transitar de uma desigualdade para uma igualdade. Esta percepção dada pelo dinamismo do software, entende-se ter contribuído à compreensão da distinção entre equação e inequação, bem como contribuído à aprendizagem de como realizar as operações nesses sistemas.

Esta atividade do cronograma da pesquisa, realizada com auxílio do GeoGebra entende-se como movimento do pesquisador visando proporcionar conhecimentos aos alunos que se mostraram ausentes na atividade diagnóstica. Um modo de verificar se tal movimento foi relevante, se contribuiu à aprendizagem dos alunos, é à posteriori trabalhar outras atividades com os alunos, intencionando verificar houve aprendizagem mediante proposta do pesquisador. Portanto, em um encontro dois dias após o trabalho com o software, foi realizada uma atividade avaliativa, descrita abaixo.

Atividade avaliativa

No terceiro encontro foi trabalhado o instrumento 3, atividade avaliativa, com duração de 2HA em cada turma, foi entregue uma lista de exercícios, na qual a primeira e segunda questão (Figura 17) tem o propósito de identificar se os alunos conseguiram reconhecer a estrutura de uma equação do 1º grau. Todos os 35 alunos acertaram ambas as questões.

Figura 17: Resposta do aluno A09 à Questão 1 da atividade avaliativa


01. Indique as sentenças que constituem equações:

a) $2x + 5 = 8$ b) $3x - 9 = x + 6$ c) $2y - 9 = 21$

d) $5 + 7 = 12$ e) $4x > 10$ f) $3x - 1 < 8$

02. Indique o primeiro membro e o segundo membro das equações:

a) $x + 3 = 10$ 1° membro: X+3 / 2° membro: 10

b) $3x + 6 = 0$ 1° membro: 3x+6 / 2° membro: 0

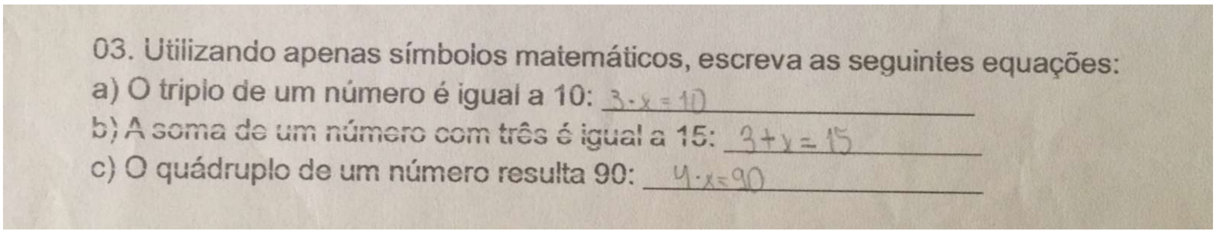
c) $5x - 3 = x + 4$ 1° membro: 5x-3 / 2° membro: x+4

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Ao analisarmos a resposta do aluno A09, o mesmo identificou a estrutura de uma equação do 1º grau, observando e relacionando de forma correta o 1º e 2º membro da equação. Vale ressaltar que na atividade diagnóstica, na questão destinada ao reconhecimento de estrutura, apenas 12 alunos responderam corretamente.

A Questão 3, expressa na Figura 18, solicita a determinação de um texto algébrico para o enunciado posto, solicitação esta similar ao que se pedia na Questão 5 da atividade diagnóstica, que nenhum dos alunos conseguiu resolver. Uma evidência de que houve aprendizado significativo mediante trabalho com software, é que na Questão 3 da atividade avaliativa, 32 alunos responderam corretamente todos os itens, dentre eles o aluno A01.

Figura 18: Resposta do aluno A01 à Questão 3 da atividade avaliativa


03. Utilizando apenas símbolos matemáticos, escreva as seguintes equações:

a) O triplo de um número é igual a 10: 3·x = 10

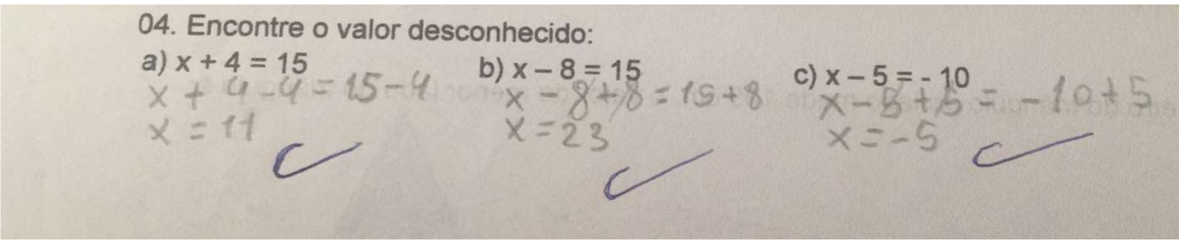
b) A soma de um número com três é igual a 15: 3+y = 15

c) O quádruplo de um número resulta 90: 4·x = 90

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Já a Questão 4 (Figura 19), referente à resolução de equações, equivalente à Questão 2 da atividade diagnóstica, foi respondida corretamente, em todos os itens, por 26 alunos, número que representa avanço na aprendizagem dos alunos, sendo que apenas 2 deles acertaram a questão similar na atividade diagnóstica.

Figura 19: Resposta do aluno B02 à Questão 4 da atividade avaliativa


04. Encontre o valor desconhecido:

a) x + 4 = 15
x + 4 − 4 = 15 − 4
x = 11

b) x – 8 = 15
x − 8 + 8 = 15 + 8
x = 23

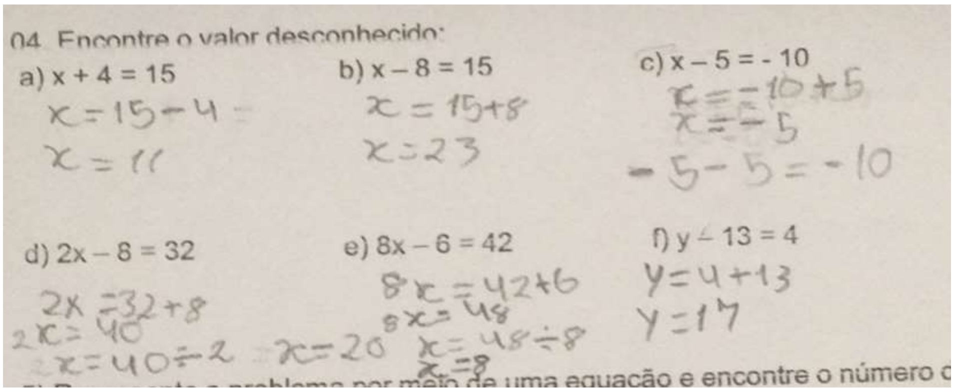
c) x – 5 = - 10
x − 5 + 5 = −10 + 5
x = −5

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Vê-se que o aluno resolveu as equações realizando operações equivalentes em ambos os membros da equação. Entende-se que o trabalho no software, com o método da balança tenha contribuído para a escolha deste modo de fazer.

Outros alunos resolveram a questão valendo-se da estratégia de isolamento da incógnita, levando ao segundo membro os termos independentes, tal como exemplifica a Figura 20:

Figura 20: Resposta do aluno B10 à Questão 4 da atividade avaliativa


04. Encontre o valor desconhecido:

a) x + 4 = 15
x = 15 − 4
x = 11

b) x – 8 = 15
x = 15 + 8
x = 23

c) x – 5 = - 10
x = −10 + 5
x = −5
−5 − 5 = −10

d) 2x – 8 = 32
2x = 32 + 8
2x = 40
x = 40 ÷ 2
x = 20

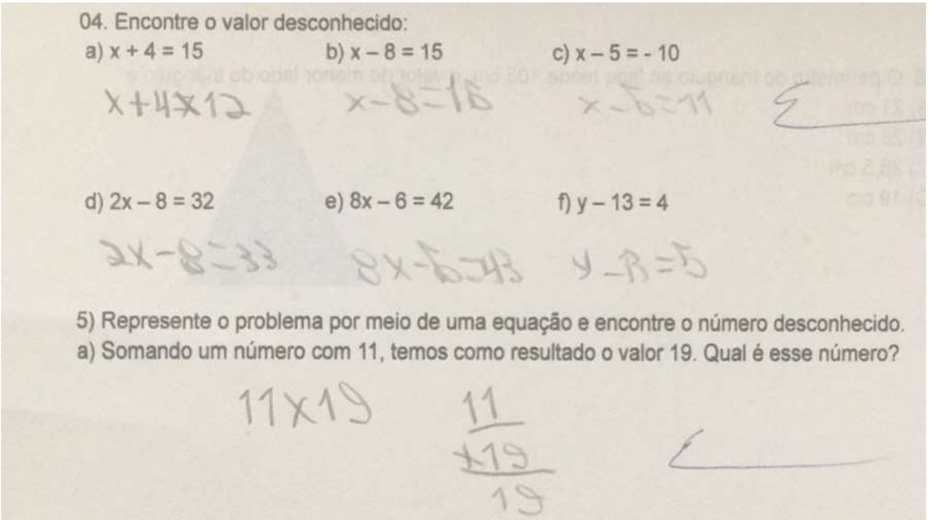
e) 8x – 6 = 42
8x = 42 + 6
8x = 48
x = 48 ÷ 8
x = 8

f) y – 13 = 4
y = 4 + 13
y = 17

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nesta estratégia muitos acertaram, compreendendo a transição entre os membros atrelada à mudança à operação inversa do termo a ser deslocado. No entanto, foi no trabalho com este método que houve mais erros, os 9 alunos que erraram a questão se valeram do mesmo, e erraram quando preservaram os sinais ao efetuar a mudança do termo do primeiro para o segundo membro. A Figura 20 apresenta a resposta de um doa alunos, que não apresenta necessariamente erro, mas, desconhecimento de como proceder, mesmo após o trabalho realizado com auxílio do software.

Figura 21: Resposta do aluno B15 à Questão 4 e 5 da atividade avaliativa

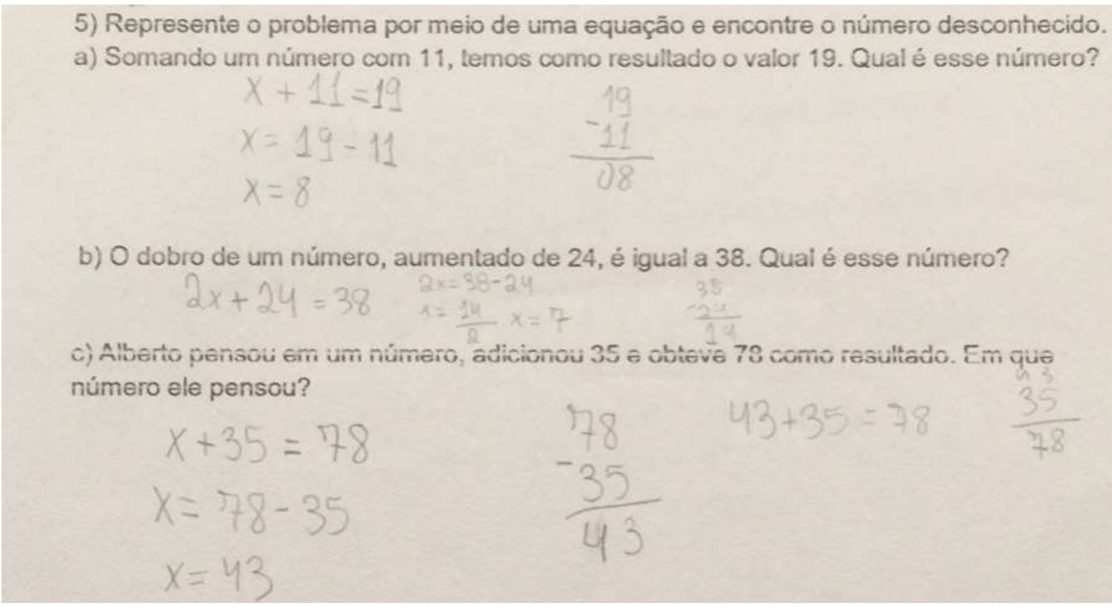


Fonte: Dados da pesquisa 2022

Esta constatação expõe que uma abordagem pode não ser suficiente para atingir todo um grupo de alunos, que se faz relevante buscar novas possibilidade de ensino. Para tanto, é preciso lançar olhar aos alunos que apresentaram dificuldades como as implícitas na Figura 21, para mediante diagnóstico, pensar modos pelos quais se possa melhor ensinar o conteúdo pretendido.

Por outro lado, entende-se que com a abordagem trabalhada, a maioria dos alunos desenvolveram princípios do pensamento algébrico, constituindo uma transição fluida entre Aritmética e Álgebra, primeiramente fazendo as devidas correspondências numéricas, operando com números, para em seguida inserir entes de generalização. Este movimento se destaca na Figura 22, que traz resposta à Questão 5, esta que 21 alunos conseguiram resolver corretamente. Questão também similar à Questão 2, da atividade diagnóstica, que na oportunidade não foi respondida corretamente por nenhum dos alunos.

Figura 22: Resolução do aluno à Questão 5 da atividade avaliativa


5) Represente o problema por meio de uma equação e encontre o número desconhecido.

a) Somando um número com 11, temos como resultado o valor 19. Qual é esse número?

$x + 11 = 19$

$x = 19 - 11$

$x = 8$

$19 - 11 = 08$

b) O dobro de um número, aumentado de 24, é igual a 38. Qual é esse número?

$2x + 24 = 38$ $2x = 38 - 24$ $x = \frac{14}{2}$ $x = 7$

$38 - 24 = 14$

c) Alberto pensou em um número, adicionou 35 e obteve 78 como resultado. Em que número ele pensou?

$x + 35 = 78$

$x = 78 - 35$

$x = 43$

$78 - 35 = 43$

$43 + 35 = 78$

$43 + 35 = 78$

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Diante dos resultados, compreende-se que o trabalho com software contribuiu à aprendizagem dos alunos, que apresentaram melhor resultados na atividade avaliativa, quando comparados com a atividade diagnóstica. Isto reforça a relevância de se pensar práticas de ensino balizadas por tecnologias digitais, especialmente focando temáticas que repetidas vezes são destacadas como complexas no ensino de Matemática, como a aqui enfatizada: a transição da Aritmética à Álgebra, sob perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Considerações Finais

Este estudo foi desenvolvido visando compreender *como o trabalho com o software GeoGebra contribui, ou pode contribuir ao desenvolvimento do pensamento algébrico*. Entende-se, mediante dados que o campo de pesquisa mostrou, que o trabalho com software possibilitou o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, tendo em vista que respostas na atividade diagnóstica evidenciaram que muitos dos alunos não conseguiam lidar com enunciados que solicitam interpretação e operação algébrica. Alguns se mostraram perplexos diante das atividades alegando não saber começar. Tendo como base este escopo inicial, o trabalho com software foi pensado pelo pesquisador, que conduziu um trabalho entendido aqui como significativo à aprendizagem dos alunos.

Tal afirmação se consolida nos resultados da atividade avaliativa. A análise dos dados expõe que os alunos fizeram uso das grandezas indeterminadas; generalizaram concepções a partir de um dado exemplo, usando símbolos para representar o problema de forma geral identificando como se raciocina para resolução do enunciado. Ou seja, entende-se que houve produção de significados para os objetos e a linguagem algébrica e, portanto, deu-se passos importantes na transição da Aritmética à Álgebra, transição que o diagnóstico mostrou estar inicialmente desconstruída no desenvolvimento matemático dos alunos.

Entende-se o papel do software GeoGebra neste desenvolvimento, atrelado à proposta didático-metodológica do pesquisador. O aspecto dinâmico e visual contribuiu à compreensão das operações algébricas, bem como da correspondência dessas operações com os sinais que determinam a regra do "equilíbrio" e do "desiquilíbrio" entre o primeiro e o segundo membro de equações e inequações. Entende-se que melhor se compreendeu os sinais de igualdade e de desigualdade ao se trabalhar com o software, especialmente na dinâmica permitida pelo PhET, da balança, quando no movimento proporcionado pelo dinamismo do software se percebe a mudança de sinal junto à variação do peso dos pratos.

Portanto, este trabalho traz dados a partir dos quais se possa pensar o ensino de álgebra. Entende-se que a realização se deu numa turma específica, com características específicas, mas é na junção das compreensões trazidas em trabalhos como este que se pode melhor planejar a prática em sala de aula, tendo em vista que além dos resultados concernentes à aprendizagem, são destacados os desafios, estes que podem se repetir nas diferentes propostas didático-pedagógicas nas salas de aula de matemática.

Bibliografia

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. (2017). **Pensamento algébrico: em busca de uma definição.** ***Paranaense de Educação Matemática**, Vol. 6, No 10*

ALVES, Antônio Maurício Medeiros; SILVEIRA, Denise Nascimento. **Uma leitura sobre as origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil.** 2017.

AMADO, Nélia, Juan Sanchez, and Jorge Pinto. **"A Utilização do GeoGebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler."** *Bolema: Boletim de Educação Matemática* 29 (2015): 637-657.

ARAÚJO, Josias Júlio De; FREDERICO, Da Silva Reis. **O Software GeoGebra numa proposta de formação continuada de professores de matemática do Ensino Fundamental**. 2017.

BITTAR, M. (2006). **Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da matemática. O estudo de um caso: o software Aplusix.** *III SIPEM– Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 1-12.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz M. **Fundamentos e Metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental.** 2ª. Ed – Campo Grande. MS: Ed. UFMS, 2005.

BORRALHO, António; BARBOSA, Elsa. Exploração de padrões e pensamento algébrico. **Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education (Projeto Padrões)**, p. 59-68, 2009.

BORRALHO, António & Barbosa, Elsa. (2017). **Pensamento Algébrico e exploração de Padrões**. http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2009_14.pdf Acessado em : 21/04/2022 às 21:20.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamenta**l. – Brasília : MEC/SEF, 1997. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf Acessado em : 19/04/2022 às 15:20.

BRUM, Lauren Darold, and Helena Noronha Cury. **"Análise de Erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental."** (2013).

BORGES, Márcia de Freitas Vieira. Inserção da Informática no Ambiente Escolar: inclusão digital e laboratórios de informática numa rede municipal de ensino. In: **Anais do Workshop de Informática na Escola**. 2008.

BORGES, Márcia de Freitas Vieira. Inserção da Informática no Ambiente Escolar: inclusão digital e laboratórios de informática numa rede municipal de ensino. In: **Anais do Workshop de Informática na Escola**. 2008.

COELHO, Flávio Ulhoa; AGUIAR, Marcia. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, p. 171-187, 2018.

DA SILVA, Roberto Carlos Delmas; DOS SANTOS, Fernanda Viana; ALVES, Manoel Messias Santos. **Obstáculos epistemológicos e o processo de ensino e aprendizagem matemática: um olhar sobre o conceito de equação do 1º grau.** Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online), v. 8, n. 1, 2018.

DIAS, Marcos José Custódio & ANGELIM, José Aurimar dos Santos. 2018. **Um olhar reflexivo-formativo acerca do pensamento algébrico no ensino fundamental.** http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID9141_17092018152353.pdf Acesso em: 24/04/2022 ás 09:30

DUQUIA, Bruna da Silveira Isnardi. **Considerações sobre os erros na resolução de equação do 1º grau com uma incógnita**. 2021. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pelotas.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática, trad. **Higyno H. Domingues. Brasil: Editora UNICAMP**, 2011.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. **Interdisciplinaridade matemática com GeoGebra na matemática escolar.** Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 33, p. 348-367, 2019.

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega, RIBEIRO, Alessandro J & PONTE, João Pedro. 2021. **Prática profissional de professores dos anos iniciais e o pensamento algébrico: contribuições a partir de uma formação continuada**. *Educação Matemática Pesquisa,* **v. 23 n. 1 (2021): Volume 23.1, 2021, https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/49720** Acesso em: 22/04/2022 às 13:35.

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega; RIBEIRO, Miguel; RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. Zetetiké**, v. 25, n. 3, p. 496-514, 2017.

FREUDENTHAL, Hans. Change in mathematics education since the late 1950's-ideas and realisation: An ICMI Report. **Educational studies in mathematics**, v. 9, n. 2, p. 143-145, 1978.

FROTA, M. C. R., & BORGES, O. (2004). **Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática**. *Anais da 27ª reunião anual da Anped.*

GADANIDIS, George; DE CARVALHO BORBA, Marcelo; DA SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Autêntica, 2016.

http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/194-secretarias-112877938/secad-educacao-continuada-223369541/18730-inclusao-digital Acesso em: 28/12/2022 ás 16:21

https://sae.digital/tecnologia-educacional-sae/ Acesso em 28/12/2022 ás 17:56

https://www.moderna.com.br/didaticos/livro/matematica-imenes-lellis-8-ano Acesso em 28/12/2022 ás 22:34

Kaput, J. (2008). **What is algebra? What is algebraic reasoning?** In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

LINS, Romulo Campos. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. Tese de Doutorado. University of Nottingham.

LEAL, Jéssica da Silva. **Dificuldades e possibilidades para o ensino aprendizagem da Álgebra, nos anos finais do ensino fundamental**. Caruaru: O Autor, 2017.

MARQUES, Ana Paula. 2018. **Desenvolvimento do pensamento algébrico: construindo significados para conteúdos de Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental.** https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/GD2_ana_marques.pdf Acesso em: 24/04/2022 ás 09:00

MIQUELINO, Luís Humberto; NEVES, José Divino; CARVALHO, Luís Sérgio. O ensino e a aprendizagem da Álgebra nos anos finais do ensino fundamental e o uso das tecnologias de informaçao e comunicaçao. In: **Anais do Encontro de Pesquisa em Educação e Congresso Internacional de Trabalho Docente e Processos Educativos**. 2013. p. 107-117.

NASCIMENTO, Eimard GA do. **"Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola."** *XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN* 8457 (1808): 2012.

NEGROMONTE, Mayra Aliete Oliveira et al. **Construção do pensamento algébrico no ensino fundamental: dificuldades.** Brazilian Journal of Development, v. 5, n. 10, p. 20597-20610, 2019.

NOBREGA FERREIRA, M. C.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, C. M. **Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: investigando a compreensão de professores acerca do Pensamento Algébrico. Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 25, 5 jul. 2018.

NORONHA, Helena, and Marcelo De Freitas. **Pensamento algébrico e análise de erros:** algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. *Revista de Educação, Ciências e Mathematics* 1.1 (2011): 101-113.

NUNES, G. C., Nascimento, M. C. D., & de Alencar, M. A. C. (2016). **Pesquisa científica: conceitos básicos**. *ID on line. Revista de psicologia*, *10*(29), 144-151

OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **O Movimento da Matemática Moderna:** história de uma revolução curricular. (2011).

OLIVEIRA, M. C. A.; PIETROPAULO, R. C. **Traços de "Modernidade" nos artigos de matemática da Revista Escola Secundária** (2008).

PEREIRA, José. **DIFICULDADES DOS ALUNOS EM APRENDER ÁLGEBRA**. 2017. http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/handle/123456789/80 Acesso em: 24/04/2022 às14:40

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **"A tecnologia aliada ao ensino de matemática."** (2012).

PINHEIRO, Prisciane Valleriote. **Uma proposta para o ensino e aprendizagem de equações e inequações do 1º grau através de recursos lúdicos e manipuláveis.** 2019 https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2020/02/170461445_PRISCIANE_DA_SILVA_VALLERIOTE.pdf Acesso em 15/08/2022 ás 00:47.

RAABE, André; GOMES, Eduardo Borges. Maker: uma nova abordagem para tecnologia na educação. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 26, n. 26, p. 6-20, 2018.

RADFORD, L. (2021). O ensino-aprendizagem da Álgebra na teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), **Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural** (pp. 171-195). Livraria da Física.

RESENDE, Ma Flávia Grecco. Tecnologia e educação. **Revista Estudos e Negócios Academics**, v. 1, n. 2, p. 68-74, 2021.

Revista Eletrônica de matemática. UFSC, Santa Catarina, SC, Brasil - - - eISSN: 1981-1322 - está licenciada com uma Licença Creative Commons - Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional. Acessado em : 19/04/2022 às 17:30.

RIGHI, Flávia; PORTA, Leonardo; SCREMIN, Greice. **Pensamento algébrico: uma análise de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática, v. 16, p. 1-21, 2021.

SILVA, D. A., & CIRÍACO, K. T. (2020). **O LIVRO DIDÁTICO "A CONQUISTA DA MATEMÁTICA" E A INCLUSÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO CICLO DA ALFABETIZAÇÃO.** ***Crítica Educativa***, *6*(1), 1–23. https://doi.org/10.22476/revcted.v6.id444 Acessado em : 19/04/2022 às 14:50.

SILVA, Cristiane Barcella. **Introdução a Álgebra no ensino fundamental: o "X" da questão**. 2016.. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/134265 Acesso em: 24/04/2022 às 11:35

SILVA, Juliano da. **O ensino da Álgebra no ensino fundamental: dificuldades e desafios.** 2013. http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/21981/3/MD_ENSCIE_III_2012_39.pdf

Acesso em: 24/04/2022 às 15:30

SILVA, Alison Luan Ferreira da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano.** 2019. 246f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) -

Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

SILVA, N. M. ; PINHEIRO, J. M. L. . **ÁLGEBRA NA PONTA DOS DEDOS: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DA EJA/ENSINO FUNDAMENTAL**. In: XIV ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (XIV EBEM), 2011, BAHIA. ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011.

Szymanski, M. L. S., & Martins, J. B. J. (2017). **Pesquisas sobre a formação matemática de professores para os anos iniciais do ensino fundamental.** ***Educação***, *40*(1), 136-146. https://doi.org/10.15448/1981-2582.2017.1.22496 Acesso em: 24/04/2022 às 11:00

VALENTE, José. **"Diferentes usos do computador na educação."** *Em aberto* 12.57 (1993).

Apêndice

Apêndice A

Autorização da diretora

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezado(a) Diretor(a),

Os alunos da turma do 8º ano do Centro Integrado de Educação de Davinópolis, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática Licenciatura, da UEMASUL, realizado pelo acadêmico e professor de matemática dos referidos alunos, Irineu Antonio Nascimento dos Santos. A pesquisa será, realizada na própria Escola, durante algumas aulas de matemática, com o seguinte tema: O TRABALHO COM SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: UM OLHAR AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, onde os alunos irão aprender Equações e Inequação do 1º grau através do desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de aulas atrativas envolvendo jogos e materiais manipuláveis. Tendo como objetivo principal a melhora no ensino-aprendizagem do seu filho(a), pedimos sua autorização para que ele(a) possa participar das atividades, e que os registros das atividades possam ser publicados. Desde já, agradeço, e peço que aprovando a participação do seu filho(a), destaque e preencha o formulário a seguir:

- -

Eu, ____, diretor(a) do Centro Integrado de Ensino de Davinópolis, autorizo a participação da turma do 8º ano na pesquisa sobre USO DO GEOGEBRA NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: UM OLHAR AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO ESCOLAR BÁSICA, desenvolvida pelo pesquisador, Irineu Antônio Nascimento dos Santos.

____
Assinatura

Imperatriz- Ma, 11 de agosto de 2022.

Apêndice B

Autorização dos Responsáveis

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezado(a) Diretor(a),

Os alunos da turma do 8º ano do Centro Integrado de Educação de Davinópolis, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática Licenciatura, da UEMASUL, realizado pelo acadêmico e professor de matemática dos referidos alunos, Irineu Antonio Nascimento dos Santos. A pesquisa será, realizada na própria Escola, durante algumas aulas de matemática, com o seguinte tema: O TRABALHO COM SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: UM OLHAR AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, onde os alunos irão aprender Equações e Inequação do 1º grau através do desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de aulas atrativas envolvendo jogos e materiais manipuláveis. Tendo como objetivo principal a melhora no ensino-aprendizagem do seu filho(a), pedimos sua autorização para que ele(a) possa participar das atividades, e que os registros das atividades possam ser publicados. Desde já, agradeço, e peço que aprovando a participação do seu filho(a), destaque e preencha o formulário a seguir:

- -

Eu, ____, autorizo a participação do meu filho(a) na pesquisa desenvolvida pelo pesquisador Irineu Antônio Nascimento dos Santos.
Nome do aluno: ____

Imperatriz- Ma, 11 de agosto de 2022

Apêndice C

Atividade Diagnóstica

NOME:____ SÉRIE:
DATA:_____/______/_______

Atividade Diagnóstica

1) Quais das seguintes expressões são equações?

( ) $3x + 1 = 16$	( ) $30 - 5 = 25$
( ) $2x + 4 > 12$	( ) $7x + 4$
( ) $x - 1 + 7 = 5x$	( ) $26 + 1 = 3 \cdot 9$

2) Resolva as seguintes equações:

a) $16x - 215 = 265$ b) $3x + 5 = 2x$ c) $7x - 4x + 8 = 0$ d) $30 - x + 7x + 3x = 3$

3) Simplifique as expressões algébricas:

a) $3 + 4a - 1 + 2a$

b) $2a + 5a + 3b + 7ab$

c) $5a^2 + 3a + 4a - 3a^2$

d) $a^2 + b^2 + 3ab + 6ab - 4b^2$

4) Considera um retângulo cuja área é de 24 unidades. As medidas da largura e do comprimento do retângulo são números naturais. Quais as dimensões do retângulo?

5) Júlia, Pedro e Ricardo vão repartir 37 balas, de modo que Pedro receba 5 balas a mais que Júlia e Ricardo receba 2 balas a mais que Júlia. Quantas balas receberá cada um?

Apêndice D

Atividade Complementar

Atividade complementar

1.Escreva matematicamente as seguintes sentenças abaixo:
a) O dobro de um número é maior que é 8:__________________
b) A soma de dois números é menor que 50:____________________
c) O triplo de um número y diminuído de 10 é menor que 18:_______________
d) A diferença entre o dobro de y e 7 é menor que 10:_________________

2.Marque as alternativas que representam inequações:

a) x - 3 = 10

b) 2x + 41 > 0

c) 2 + 3 + 1 < 7

d) 3 (x - 2) = 7x - 2x

e) $\frac{1}{2} + 3 \geq \frac{1}{2} - x$

f) 7(x + 1) = 6 - 5x

3.
Considere que todas as bolinhas tem o mesmo peso e a balança está em equilíbrio.
a)Qual a equação que representa essa situação?

b) Qual o “peso” de cada x?

Apêndice D

Atividade Avaliativa

Atividade Avaliativa

1.Indique as sentenças que constituem equações:

a) $2x + 5 = 8$ b) $3x - 9 = x + 6$ c) $2y - 9 = 21$

d) $5 + 7 = 12$ e) $4x > 10$ f) $3x - 1 < 8$

2.Indique o primeiro membro e o segundo membro das equações:

a) $x + 3 = 10$ 1º membro:_________________/ 2º membro:_______________

b) $3x + 6 = 0$ 1º membro:_________________/ 2º membro:_______________

c) $5x + 3 = x + 4$ 1º membro:________________/ 2º membro:________________

3. Utilizando apenas símbolos matemáticos, escreva as seguintes sentenças:

a) O triplo de um número é igual a 10: _________________________

b) A soma de um número com três é igual a 15:_________________

c) O quádruplo de um número resulta 90: ______________________

4. Encontre o valor desconhecido:

a) $x + 4 = 15$ b) $x - 8 = 15$ c) $x - 5 = -10$

d) $2x - 8 = 32$ e) $8x - 6 = 42$ f) $y - 13 = 4$

5. Represente o problema por meio de uma equação e encontre o número desconhecido.

A) Somando um número com 11, temos como resultado o valor 19. Qual é esse número?

b) O dobro de um número, aumentando de 24, é igual a 38. Qual é esse número?

c) Alberto pensou em um número, adicionou 35 e obteve 78 como resultado. Em que número ele pensou?