UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
PROGRAMA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES CAMINHOS DO SERTÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PABLO MIGUEL ARAÚJO MARINHO

UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA SOBRE ALGUNS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES

Amarante
2026

PABLO MIGUEL ARAÚJO MARINHO

UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA SOBRE ALGUNS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof.Dr. Dieme Pereira da Silva

Amarante-MA
2026

M338a

Marinho, Pablo Miguel Araujo

Uma abordagem matemática sobre alguns sistemas de amortização. / Pablo Miguel Araujo Marinho. – Amarante do Maranhão, MA, 2026.

44 f. ;il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Programa de Formação de Professores Caminhos do Sertão – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, Imperatriz, MA, 2026.

1. Sistema de amortização price. 2. Sistema de amortização americano. 3. Sistema de amortização constante. 4. Valor devedor. I. Título.

CDU 51

Ficha elaborada pela Bibliotecária: **Clemilda Izaias Santos CRB – 13/626**

PABLO MIGUEL ARAÚJO MARINHO

UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA SOBRE ALGUNS SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura, do Programa de Formação de Professores Caminhos do Sertão, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, como requisito para obtenção de título de Licenciado em Matemática. Orientador(a): Dr. Dieme Pereira da Silva

APROVADO EM: 15/06/2026

BANCA EXAMINADORA

Dieme Pereira da Silva

Dieme Pereira da Silva

Fernando Silva de Araújo

Fernando Silva de Araújo

gov.br
Documento assinado digitalmente
THALYSON PATRICK MARTINS DA SILVA
Data: 01/07/2026 11:44:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Thalyson Patryck Martins da Silva

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de força, sabedoria e sustento durante toda esta caminhada acadêmica. Sua presença foi essencial em cada desafio enfrentado e em cada conquista alcançada, permitindo que este trabalho fosse concluído com dedicação e perseverança. À minha família, em especial à minha esposa que sempre me motivou e esteve ao meu lado desde o início, também à minha mãe, pai, expresso a mais profunda gratidão pelo amor, apoio incondicional, incentivo constante e compreensão nos momentos de ausência e dedicação aos estudos. Cada palavra de encorajamento foi fundamental para que este objetivo se tornasse realidade. Ao professor orientador, Dr. Dieme Pereira da Silva, deixo os meus mais sinceros agradecimentos pela orientação, paciência, disponibilidade e pelos conhecimentos compartilhados ao longo da construção deste trabalho. Sua contribuição foi indispensável para o desenvolvimento desta pesquisa. Por fim, agradeço aos membros da banca examinadora pela disponibilidade em avaliar este projeto e pelas valiosas contribuições, observações e sugestões, que certamente enriqueceram este estudo e colaboraram para o meu crescimento acadêmico e profissional. A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso, os meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos noções sobre os sistemas de amortização Price, Sistema de amortização Americano (SAA) e Sistema de Amortização Constante (SAC), contextualizando-os historicamente e explicitando a teoria matemática que fundamenta as fórmulas e os resultados relacionados à amortização. Além disso, utilizaremos representações gráficas para ilustrar a teoria e demonstrar o comportamento das componentes de um empréstimo ao longo de sua vigência. Por fim, com base na teoria apresentada e na resolução de um problema proposto, o leitor será capaz de analisar e identificar qual sistema de amortização é mais vantajoso em situações semelhantes.

Palavras Chaves: Juro; Sistema de Amortização Price; Sistema de Amortização Americano; Sistema de Amortização Constante, Juro; Valor Devedor

ABSTRACT

In this work, we will present notions concerning the Price amortization system, the American Amortization System (AAS), and the Constant Amortization System (CAS), contextualizing them historically and explaining the mathematical theory underlying the formulas and results related to amortization. Furthermore, graphical representations will be employed to illustrate the theory and demonstrate the behavior of the components of a loan throughout its term. Finally, based on the presented theory and the solution of a proposed problem, the reader will be able to analyze and identify which amortization system is more advantageous in similar situations.

Keywords: Interest; Price Amortization System; American Amortization System; Constant Amortization System; Interest; Outstanding Balance

Sumário

1 INTRODUÇÃO **2**

1 Contexto Histórico 3

2 Noções Preliminares 7

2.1 Noções Gerais de Sequências Númericas 7

2.2 Progressão Geométricas 8

2.3 Noções de Matemática Financeira 10

2.4 Financiamentos e Empréstimos 12

2.5 Séries de Pagamentos 13

2 Sistemas de Amortização **17**

1 Sistema de Amortização Price 18

2 Sistema de Amortização Constante 24

3 Sistema de Amortização Americano 29

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS **33**

Lista de Figuras

1.1 Retrato de Richard Price, por Benjamin West 5

2.1 Empréstimo com sistema Price sem prazo de carência 18
2.2 Empréstimo com Sistema Price com prazo de carência 19
2.3 Sistema de Amortização Constante 26
2.4 Sistema SAC com prazo de carência 26
2.5 Sistema SAA Sem prazo de carência 30
2.6 Sistema SAA com prazo de carência $\mathfrak{m}$. 30

Lista de Tabelas

1.1 Abreviaturas 11

2.1 Tabela de amortização do sistema Price 23
2.2 Tabela Sistema Sac 27
2.3 Tabela de Sistema SAA 31

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Na Antiguidade, já existiam registros de práticas relacionadas às operações financeiras, especialmente aquelas envolvendo a cobrança de juros, prática que durante muito tempo foi moralmente condenada pela religião cristã. Com o passar dos séculos, essas operações passaram por um processo de aperfeiçoamento, resultando na sofisticação das ferramentas financeiras e na melhor organização das atividades comerciais. Entre os setores que mais evoluíram nesse contexto destaca-se o setor bancário, principalmente no que se refere às operações de empréstimos e financiamentos.

Como toda atividade econômica, as operações financeiras de crédito têm como finalidade a obtenção de lucros por parte das instituições financeiras, ao mesmo tempo em que buscam atender às necessidades financeiras de seus clientes. Entretanto, um dos principais fatores que tornam os empréstimos menos atrativos são os elevados encargos financeiros incidentes nessas operações, sobretudo as taxas de juros. Nesse contexto, surge o seguinte questionamento: como tornar as operações de empréstimos e financiamentos simultaneamente atrativas para os clientes e lucrativas para as instituições financeiras?

Uma das ferramentas desenvolvidas para responder a essa questão foi a criação dos sistemas de amortização. Esses sistemas têm como objetivo organizar e facilitar o pagamento das dívidas, permitindo que as instituições financeiras obtenham rentabilidade e, ao mesmo tempo, oferecendo condições de pagamento mais acessíveis aos clientes.

Mas como funciona a amortização de um empréstimo? O termo "amortização", derivado do verbo "amortizar", significa "fazer uma dívida diminuir gradativamente". Em termos financeiros, a amortização corresponde ao processo de redução do saldo devedor ao longo do tempo por meio do pagamento periódico de prestações. Popularmente, muitas pessoas associam a amortização ao pagamento antecipado de parcelas, prática que possibilita a redução do valor total da dívida devido à diminuição dos juros futuros. Embora nem todos reconheçam esse procedimento como um tipo de amortização, ele contribui significativamente para tornar os empréstimos mais atrativos.

Segundo Assad, os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam, essencialmente, da forma pela qual o principal da dívida e os encargos financeiros são restituídos ao credor. Do ponto de vista matemático, esses sistemas constituem ferramentas importantes, cuja fundamentação teórica permite deduzir fórmulas e resultados que auxiliam tanto instituições financeiras quanto clientes durante as operações de crédito.

Atualmente, em razão dos avanços tecnológicos, os cálculos relacionados aos sistemas de amortização são realizados por softwares e aplicativos capazes de fornecer instantaneamente diversos resultados associados

a operações de empréstimos e financiamentos. Consequentemente, grande parte dos clientes desconhece os diferentes tipos de amortização, o comportamento de suas variáveis e, em muitos casos, qual sistema é mais adequado para determinada operação financeira. Além disso, outro fator que dificulta a disseminação desse conhecimento é a pouca abordagem do tema na educação básica. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por meio da habilidade EM13MAT303, estabelece que, ao final do ensino médio, o estudante seja capaz de resolver problemas envolvendo juros simples e compostos. No entanto, os conteúdos relacionados aos sistemas de amortização não são aprofundados de maneira suficiente para proporcionar aos jovens uma compreensão adequada de sua importância prática.

Com o objetivo de introduzir esses conteúdos, este trabalho apresentará noções sobre os principais sistemas de amortização utilizados em operações financeiras: o Sistema Price, o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Amortização Americano (SAA). Inicialmente, será apresentado um breve contexto histórico acerca da criação desses sistemas, bem como os conceitos matemáticos necessários para a compreensão da teoria envolvida.

No Capítulo 2, será desenvolvida a teoria referente aos três sistemas de amortização mencionados anteriormente, dividindo-se o capítulo em três seções. Ao final de cada seção, será utilizado o respectivo sistema para resolver o seguinte problema:

Problema 1

"João deseja comprar um automóvel no valor de R$ 150.000,00. Sabendo que ele possui apenas R$ 50.000,00 e que o banco ofereceu um financiamento de R$ 100.000,00, a uma taxa de 2% ao mês, a ser pago em 48 meses, determine o valor das prestações, o juro, a amortização e o custo total do veículo em cada sistema de amortização."

Por fim, com base na teoria apresentada e nos resultados obtidos na resolução do problema proposto, será realizada uma análise comparativa entre os três sistemas de amortização estudados, a fim de verificar qual deles apresenta as condições mais vantajosas para João na contratação do financiamento.

1 Contexto Histórico

O contexto histórico de empréstimos e financiamentos acompanha a própria evolução das sociedades humanas. A ideia de "pegar algo agora e pagar depois" existe há milhares de anos, mas foi mudando conforme a economia, a política e a tecnologia avançaram.

Na antiguidade, mais precisamente na Mesopotâmia, já existiam leis que estabeleciam regras que normatizava o pagamento de juros por empréstimos de grãos entre agricultores. Segundo Emanuel Bouzon, em O Código de Hamurabi,

> § 49
> "Se um awilum tomou (emprestada) prata de um mercador e deu ao mercador um campo preparado para a cevada ou para o sésamo e disse-lhe: "cultiva o campo, a cevada ou o sésamo, que foi produzido, recolhe e leva"; se um agricultor produziu no campo cevada ou sésamo, no tempo da colheita, o proprietário do campo tomará a cevada ou o sésamo, que foi produzido no campo, e dará ao mercador a cevada, correspondente à prata que ele tomou emprestada do mercador, seus juros, e as despesas do cultivo."

Segundo a lei 49, do Código de Hamurabi, quando um agricutor tomava emprestado grãos de cervadas, ou uma quantidade de prata, com um determinado mercador, o respectivo agricutor deveria devolver ao

mercador a mesma quantidade, acrescida de quantidade proporcional ao total emprestado. Isso comprova que a existência operação de empréstimos com compessação, já era uma prática comum na antiguidade.

As práticas do modelo de empréstimos ja existente na antiguidade se pertuaram na idade média, mesmo com a população sob a esfera de influência da Igreja Católica, que por acaso condenava a prática dos empréstimos com compensações. A igreja católica chamava essa prática de "usúria"e os praticantes de "usurarius"que nas palavras do historiador francês Jacques Le Goff, os usurários são ladrões, pois vendedores de tempo que não lhes pertencem (Le Goff, 1988).

A forte influencia da igreja limitava operações de empréstimos formais. Basicamente, as operações eram dominadas pelos cambistas (camponeses medievais), que operavam em feiras e mercados, trocando uma miríade de moedas de diversas origens e valores. Essa função primordial, embora vital para o comércio inter-regional, refletia a ausência de um sistema monetário unificado e dependia fortemente da expertise individual na avaliação da pureza e aceitação de cada moeda (CIPOLLA, 1993).

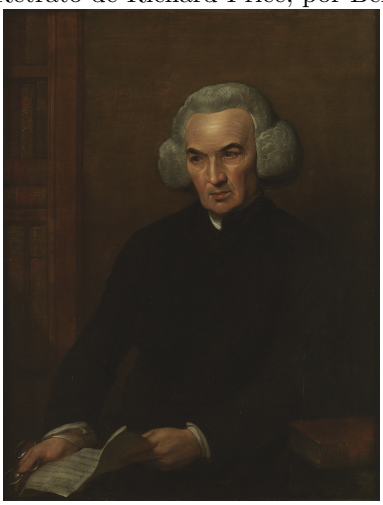
Todavia a dificuldade imposta pela igreja católica não impediu o desenvolvimento de operações de emprestimos com compensações, que posteriormete ficaria conhecido como "agiotagem". Mesmo sob o controle social e politico da Igreja Católica, houve uma evolução nas operações de emprétimos. A familia médici foi a pioneira na utilização formal dessas práticas através de instuições finaceiras localizadas nas principais cidades da época, como em Roma, Veneza, Milão, Genebra, Bruges, Londres e Lyon. Embora a troca de informação não fosse instântanea, essas isntituições eram interligadas de modo a facilitar as operações finaceiras. Essa estrutura permitia a movimentação eficiente de fundos e a gestão de transações complexas através de instrumentos como as letras de câmbio (BRAUDEL, 1982).

Com o pioneirismo da familia médice e a formalização das práticas de emprestimos por instituições finaceiras, buscou se a evolução destas operações de modo que tornasse-as atrativas para os clientes e lucrativas para as instuições finaceiras. Uma das alternativas criadas a época permitia operações de empréstimos com taxa de juros e possibilidade de amortizar o valor devido no decorrer da vigência do prazo de pagamento. Um dos primeiros métodos de amortização conhecido foi o Sistema Price.

O Sistema de Amortização Price, também chamado de Sistema Francês, surgiu em meados do século XVIII, período marcado por transformações econômicas e intelectuais na Europa. A Inglaterra vivia o início da Revolução Industrial, um período de grande efervescência econômica, científica e social, que também incluía o nascimento do capitalismo e a luta por ideais democráticos. Foi nesse contexto histórico de desenvolvimento que o matemático e atuário galês Richard Price desenvolveu o Sistema de Amortização Price. Os seus conhecimentos matemáticos e econômicos sobre juros compostos, anuidades e cálculos atuariais forneceram a base teórica para a criação de um método de pagamento com prestações constantes ao longo do tempo. Em uma época em que o crédito ainda era pouco padronizado e frequentemente baseado em acordos informais, os avanços matemáticos de Price representaram um salto significativo na formalização das operações financeiras. A consolidação de técnicas de cálculo financeiro ocorreu paralelamente ao fortalecimento das instituições bancárias e seguradoras, que buscavam modelos mais seguros e previsíveis para concessão de crédito em um ambiente econômico cada vez mais dinâmico.

Richard Price $(1723 - 1791)$ foi um ministro religioso e filósofo galês que, ao aplicar conhecimentos de probabilidade e demografia a problemas práticos de seguros e pensões, desenvolveu o método matemático que originou o Sistema de Amortização Price. Em 1771, Price publicou a obra "*Observations on Reversionary Payments*", (Observações sobre Pagamentos Reversíveis), na qual apresentou a fórmula para calcular pagamentos periódicos e fixos (anuidades) capazes de liquidar uma dívida inicial somada aos juros que se

Figura 1.1: Retrato de Richard Price, por Benjamin West



Fonte: Wikipedia.

acumulam período a período, ou seja, juros compostos. Essa fórmula é a base do sistema que hoje leva seu nome, caracterizado por prestações constantes ao longo do financiamento.

Embora tenha sido criado por um inglês, o método de Price foi aprimorado e amplamente difundido na França no século XIX. Por essa razão, ele é também passou a ser amplamente conhecido como Sistema Francês de Amortização.

A criação do Sistema Price está diretamente ligada às necessidades econômicas e sociais que emergiam no contexto pré-industrial. O crescimento do comércio, o aumento das transações financeiras e a expansão das atividades produtivas exigiam mecanismos mais eficientes de financiamento. Até então, os empréstimos eram marcados por grande incerteza, com formas de cobrança pouco uniformes e alto risco para credores e devedores. A ausência de um método padronizado dificultava o planejamento financeiro e limitava a expansão do crédito.

A previsibilidade das prestações fixas oferecida pelo sistema facilitou o planejamento financeiro de empresários e investidores, permitindo que assumissem compromissos de financiamento com maior segurança. Além disso, o modelo contribuiu para fortalecer o sistema bancário, que passou a operar com maior padronização e menor risco, ampliando a oferta de crédito para diferentes setores da economia. Essa expansão do crédito foi fundamental para sustentar o ritmo acelerado de inovação tecnológica e crescimento produtivo característico da Revolução Industrial.

Assim como o sistema Price, O Sistema de Amortização Constante (SAC) tem suas origens associadas ao desenvolvimento das atividades bancárias e financeiras ocorrido na Europa entre os séculos XVIII e XIX, período marcado pela expansão do comércio, pelo fortalecimento do capitalismo industrial e pelo crescimento das instituições de crédito. Embora não exista um único criador oficialmente reconhecido do Sistema de Amortização Constante, sua formulação está relacionada à evolução da Matemática Financeira focada nas práticas bancárias modernas. Com esse cenário de desenvolvimento rápido, urgência de demanda e a falta de organização bancária impulsionou-se a utilização de diversos sistemas de amortização, incluindo o SAC, ganharam importância e passaram a ser utilizados em larga escala.

No Brasil, o contexto histórico do Sistema de Amortização Constante está diretamente relacionado ao processo de urbanização e modernização econômica ocorrido ao longo do século XX. Entre as décadas de

1940 e 1960, o país passou por intenso crescimento urbano e industrial, impulsionado pela migração populacional para os grandes centros urbanos. Esse processo elevou significativamente a demanda por habitação e ampliou a necessidade de financiamento imobiliário. Segundo Lachtermacher e Faro, quando fianciamento está sujeito a taxa de juro simples se torna um sistema mais vantajoso que o sistemas Price na obtenção de finaciamentos imobiliários, pois neste sistema o juro incidido sobre o saldo devedor é menor sistema Price. Consequentemente, é um sistema mais utilizado.

Um outro sistema de amortização que foi criado e é utilizado até hoje em operações finaceiras é o Sistema de Amortização Americano . O Sistema de Amortização Americano, abreviado por (SAA), tem suas raízes na evolução do mercado financeiro dos Estados Unidos, precisamente este método ganhou notoriedade na década de 1980. Sua origem está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento do sistema de securitização de recebíveis, um mecanismo financeiro que foi crucial para resolver a grave crise do financiamento imobiliário na época.

Para enfrentar a crise, o governo norte-americano criou grandes empresas patrocinadas pelo governo (GSEs), como a *Fannie Mae* (Federal National Mortgage Association) e a *Freddie Mac* (Federal Home Loan Mortgage Corporation). A *Fannie Mae* foi criada em 1938, mas foi na década de 1980 que seu papel se expandiu dramaticamente. A Freddie Mac, por sua vez, foi criada em 1970. Essas empresas tinham (e ainda têm) a missão de fornecer liquidez, estabilidade e acessibilidade ao mercado de hipotecas. Mais precisamente, o governo, através da Fannie Mae e da Freddie Mac, passou a comprar esses créditos imobiliários (as hipotecas) dos bancos originais. Em seguida, essas empresas agrupavam os créditos adquiridos e os utilizavam como lastro para emitir novos títulos no mercado financeiro, os chamados títulos lastreados em hipotecas (Mortgage-Backed Securities, ou MBS). Esses títulos eram vendidos a investidores institucionais, como fundos de pensão e seguradoras, que forneciam o dinheiro. Com o dinheiro obtido, a Fannie Mae e a Freddie Mac compravam mais créditos dos bancos, fechando o ciclo e aumentando a liquidez do sistema.

Em busca de maior liquidez para enfrentar períodos de instabilidade econômica, foi desenvolvido o Sistema de Amortização Americano (SAA). A principal característica desse sistema consiste em proporcionar ao tomador do empréstimo maior disponibilidade de capital ao longo da vigência do contrato, uma vez que a amortização do principal ocorre integralmente apenas na última prestação. Durante os períodos anteriores, o devedor realiza somente o pagamento dos juros incidentes sobre o saldo devedor, mantendo inalterado o valor da dívida principal até o vencimento final da operação.

2 Noções Preliminares

A noção de amortização de finaciamentos ou empréstimos tem como base os conceitos de matemática finaceira, como por exemplo, juros, parcelas, Valores futuro e Valores presentes e etc. Por isso, para intuir o leitor deste texto, apresentaremos as noções necessárias de matemática finaceira, bem como a teoria matemática que justifica as fórmulas e resultados. Iniciaremos apresentando os conceitos gerais de sequência de números reais, e em seguida apresentar os conceitos de Progressão Geométrica. Vale ressaltar que a fórmula para calcular o valor de uma prestação no Sistema de Amortização tem como base a teoria de sequências.

Após apresentar os conceitos de sequências, e em particular, o conceitos de Progressão Geométrica, introduziremos os conceitos de matemática finaceira, dando ênfase nos conceitos de série de pagamentos.

2.1 Noções Gerais de Sequências Númericas

As fórmulas que descrevem parcelas de finaciamentos e Sequências(Séries) Uniformes de pagamentos são deduzidas via noção de sequências de números reais conhecidas como Progressão Geométrica (PG), pois os pagamentos em uma determinada operação fincanceira é modelado como uma função cujo o domínio é conjunto dos números naturais e o contradomínio é o conjunto dos numéros reais, onde os elementos do domínio é o período(*tempo*) de vigência do empréstimo, e como é de conhecimento geral, este tipo de função é conhecida como sequências de números reais. Por isso, objetivando auxiliar a leitura e o entendimento do texto, apresentaremos alguns conceitos gerais de sequências de números reais.

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $\mathfrak{a} : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$*, que associa a cada número natural* $\mathfrak{n}$ *um número real* $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ *, chamado o* $\mathfrak{n}$*-ésimo termo da sequência.*

Observação 2.1. *As sequências de números reais são denotadas por* $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\in\mathbb{N}}$*,* $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})$*, ou* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{n}, \ldots)$*.*

Como as funções podem ser classificadas como Função injetiva, sobrejetiva ou mesmo função bijetiva, então, pela Definição 2.1, se a sequência $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant}$ é em particular uma função injetiva, diz se que $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant 1}$ é uma sequência de termo dois-à-dois distintos.

Por outro lado, considerando a sequência $\mathfrak{a} : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ como uma função, então o conjunto imagem desta função recebe um nome especial, ele se chama dos termos de uma sequência $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant 1}$, e é definido por $\mathfrak{a} : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathfrak{a}(\mathbb{N}) = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{n}\}.$$

Além disso, pela noção de construção do conjunto dos números reais, por *Cortes de Dedekind* ou *Sequência de Cauchy*, observa-se que o conjunto $\mathbb{R}$ é munido de uma relação de ordem $\leqslant$, então é razoável supor que sob determinadas condições, o conjunto $\mathfrak{a}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ também pode admitir uma relação de ordem induzida pelo conjunto $\mathbb{R}$. Por isso, pode-se concluir que sob deteminadas hipóteses, as sequência $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant 1}$ podem ser classificadas como sequência crescente, decrescente ou alternada.

Definição 2.2. *Seja* $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant 1}$ *uma sequência de números reais. Dizemos que* $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant 1}$ *é uma sequência crescente quando* $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+1}$*, para todo* $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$*. Analogamente, diz-se que* $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}\geqslant 1}$ *é uma sequência crescente quando* $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{a}_{\mathfrak{n}+1}$*, para todo* $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$*.*

O principal objeto de estudo da teoria de sequência é a noção de limites. Este conceito tem como aplicação matemática teoria topológicas da reta real, bem como a teoria de limites de funções reais e continuidade de funções reais.

Definição 2.3. Limite de Sequências

Seja $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *uma sequência de números reais. Diz-se que o número real* a *é limite da sequência* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *e escreve*

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n, \text{ ou } a = \lim a_n, \quad \text{ou} \quad a = \lim_n a_n,$$

quando dado $\epsilon > 0$, *dado arbitrariamente, for possível obter um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n - a| < \epsilon$, *sempre que* $n > n_0$.

Com a noção de limite de sequência pode se expandir esse campo de estudo, ou seja, aplicar a noção de convergência de sequencia na investigação e solubilidade de alguns problemas matemáticos. Dentre esses problemas, pode-se destacar o seguinte problema:

Dado uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geqslant 1}$, gostaríamos de determinar a soma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \tag{1.1}$$

Resolver a equação (1.1) significa determinar a soma dos termos da sequência $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Para tanto, deve-se proceder da seguinte forma: Defina a sequência $(s_n)_{n\geqslant 1}$ dada por

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

e em seguida, estude a sua convergência. Assim, se a sequência $(s_n)_{n\geqslant 1}$ é convergente, então a soma dada em (1.1) se aproxima de um número real, e neste caso é dada por:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \tag{1.2}$$

O processo descrito anteriormente, isto é, a evaluação da soma infinita dos termos de $(a_n)_{n\geqslant 1}$, descrita na Equação (1.1), é conhecida como teoria de séries infinitas.

Quando a sequência $(s_n)_{n\geqslant 1}$, dizemos que a série infinita é uma série divergente. No nosso texto, apresentaremos apenas exemplos de séries convergentes.

2.2 Progressão Geométricas

Na Seção (2.1) apresentamos alguns conceitos gerais de sequências de números reais. Entretando, estamos interessados em estudar um tipo especial de sequência, onde cada termo desta sequência é obtido através do produto entre o termo antecessor e um constante. Essas sequências são conhecidas como Progressão Geométricas (PG). Nesta seção, apresentaremos as noções e propriedades deste tipo de sequência.

Definição 2.4. *Progressão Geométrica*

Chama-se Progressão Geométrica uma sequência $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *dada pela seguinte fórmula de recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = r a_{n-1}, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *com* $n \geqslant 2$.

Em outros termos, uma Progressão Geométrica é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo termo, é obtido através através do produto do termo anterior por uma constante r qualquer. A constante r chama-se razão da Progressão Geométrica $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Observação 2.2. *A razão de uma Progressão Geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é obtida através da razão entre o $n-$ésimo e $(n-1)$-ésimo termo da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, a constante q é a razão da Progressão Geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quando*

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Observação 2.3. *Quando nos referirmos a uma Progressão Geométrica, iremos utilizar apenas a abreviatura* **(P.G)**.

Exemplo 2.1. *A sequência $(1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots)$ é uma Progressão Geométrica de razão $q = 2$, pois $q = \frac{2^n}{2^{n-1}}$.*

As **(P. G)** pode ser classificadas de acordo com o valor da razão, ou mesmo, de acordo coma natureza dos seus elementos.

Proposição 2.1. *Seja $(a_n)_{n\geqslant 1}$ uma* **(P.G)**, *de razão q, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *A sequência $(a_n)_{n\geqslant 1}$ é uma* **(P.G)** *crescente, se satisfaz uma das afirmações:*

   i) $a_n > 0$, *para todo* $n \geqslant 1$, *e* $q > 1$.

   ii) $a_n < 0$, *para todo* $n \geqslant 1$, *e* $0 < q < 1$.

2. *A sequência $(a_n)_{n\geqslant 1}$ é uma* **(P.G)** *decrescente, se satisfaz uma das afirmações:*

   i) $a_n > 0$, *para todo* $n \geqslant 1$, *e* $0 < q < 1$.

   ii) $a_n < 0$, *para todo* $n \geqslant 1$, *e* $1 < q$.

Demonstração. Consulte [9]. □

Usando o argumento de Indução Finita e a Definição 2.4 para obter uma fórmula para o n-ésimo termo da **(P.G)**.

Proposição 2.2. *Seja $(a_n)_{n\geqslant 1}$ uma* **(P.G)**, *de razão q, então*

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Demonstração. Consulte [9] □

Assim como no estudo de um sequência arbitrária, o ponto chave da teoria de **PG** é determinar a soma de seus termos. Por isso, iremos proceder como em (1.1), isto é, dado uma $(a_n)_{n\geqslant 1}$ uma **PG** de razão $q \neq 1$, como na Definição 2.4, tem-se que a soma dos primeiros termo de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ é dada por

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.3}$$

Por outro lado, ao multiplicarmos a igualdade (1.3), obtemos a seguinte igualdade:

$$qs_n = q(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} qa_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}. \tag{1.4}$$

Subtraindo as igualdades (1.3) e (1.4),

$$\begin{aligned}(q-1)s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &= a - a^{n+1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da **PG** $(a_n)_{n\geqslant 1}$ é dada

$$s_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}. \tag{1.6}$$

Mais precisamente, fica provado o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja $(a_n)_{n\geqslant 1}$ uma* **PG** *de razão $q \neq 1$. Então, a soma dos n termos da* **PG** *é dado por*

$$s_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}. \tag{1.7}$$

Pela Proposição (2.2), a identidade (1.7) pode ser definda em função do primeiro termo e da razão da **PG** $(a_n)_{n\geqslant 1}$, ou seja,

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{1.8}$$

Agora, se quisermos determinar a soma dos infinitos termos da **PG** $(a_n)_{n\geqslant 1}$ é suficiente calcular o limite da sequência $(s_n)_{n\geqslant 1}$ dada em (1.8), isto é,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{1.9}$$

Portanto, para $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Isto implica que a sequência $(s_n)_{n\geqslant 1}$ converge, e como consequência o limite de $(s_n)_{n\geqslant 1}$ é o valor da soma dos infintos termo de $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

2.3 Noções de Matemática Financeira

Os sistemas de amortização que serão estudados nesse texto possuem caracteristicas próprias, como o parcelamento, fluxo de caixa e valor futuro. Por isso, nesta seção, iremos introduzir alguns conceitos de matemática finaceira que são ultilizado para definir e caracterizar estes sistemas. Iniciaremos apresentando os conceitos de taxa de juro, Valor presente (PV), Valor Futuro (FV).

Definição 2.5. *O juro (**J**) é o pagamento (ou recebimento) pelo uso de um valor monetário por um determinado período de tempo.*

O juro pode ser compreendido como sendo custo do crédito ou remuneração do capital aplicado. Informalmente, o juro pode ser entendido como o custo do dinheiro.

Definição 2.6. *O Valor Presente* (PV) *ou Capital Inicial é o valor monetário que serve de base para o cálculo dos juros.*

A abreviatura do nome Valor Presente (PV) vem da sua tradução em lingua inglesa, *Present Value*. A partir de agora, quando nos referimos a *Valor Presente*, iremos escrever a abreviatura (PV).

A partir da noção de (PV), pode-se definir a taxa de juro.

Definição 2.7. *A taxa de juro* i *é o coefciente obtido da relação dos juros* (J) *com o capital* (PV)*, que pode ser representado em forma percentual ou unitária (decimal), isto é:*

$$\mathtt{i} = \frac{\mathsf{J}}{\mathsf{PV}}. \tag{1.10}$$

Nas taxas de juros, deve-se ter uma parte numérica para um referido período de tempo. Por isso, quando de trata em aplicação de taxa de juros ao mês, ou ano, ou ao bimestre, ou ao semestre, ou ao dia, ou ao trimestre pode ser abreviado da seguinte forma:

Tabela 1.1: Abreviaturas

Por extenso	**Abreviada**
ao dia	a.d.
ao mês	a.m.
ao bimestre	a.bim.
ao trimestre	a.trim.
ao semestre	a.s.
ao ano	a.a.

Fonte: Tabela elaborada pelo autor (2026)

Definição 2.8. *Prazo ou Períodos* (n) *é o tempo necessário que um certo capital, aplicado a uma taxa de juros necessita para produzir um montante.*

Geralmente, nas operações financeiras utiliza-se o mês e o ano comercial, cujos números de dias são de 30 e 360, respectivamente e o juro assim calculado é chamado de juro comercial e a contagem dos dias para cobrança ou pagamento dos juros deve ser feita de forma exata. Normalmente, em uma operação finaceira, nos referimos a este intervalo de tempo como sendo o período de vigência da operação.

Definição 2.9. *O Montante ou Valor Futuro* (FV) *é a soma do capital com o juro do período nas operações com valores únicos, ou o valor acumulado resultante de uma série de pagamentos , tais como os planos de capitalização.*

Ao falarmos de capitalização, estamos nos referindo a ação de efetuar a aplicação de um capital a uma certa taxa de juro por um determinado período de tempo. Ao final deste período de tempo, o Valor futuro poderá ser calculado de duas formas: capitalização simples (ou juros simples) e capitalização composta (ou juros compostos).

No regime de capitalização simples, o juro J dado em cada período é sempre igual, e é definido pelo produto do valor presente (PV) pela taxa de juro i. Por outro lado, pelo regime de capitalização composta, o juro J varia com o tempo.

Considere o valor presente (PV) aplicado a uma taxa de juro i, pelo um período n . Pelo regime de capitalização simples, o valor futuro (FV) é dado pela soma dos juros aplicado nos n períodos, ou seja,

$$\mathsf{FV} = \underbrace{\mathsf{PV}\cdot\mathtt{i} + \mathsf{PV}\cdot\mathtt{i} + \ldots + \mathsf{PV}\cdot\mathtt{i}}_{\mathtt{n}-\text{vezes}} = \mathsf{PV}\cdot\mathtt{i}\cdot\mathtt{n}. \tag{1.11}$$

Por outro lado, pelo regime de capitalização composta, o valor futuro no primeiro período é dado pela soma do valor presente (PV) com o produto do valor presente (PV) pela taxa de juro i, ou seja,

$$\mathsf{PV}_1 = \mathsf{PV} + \mathsf{PV} \cdot \mathtt{i} = \mathsf{PV} \cdot (1 + \mathtt{i}). \tag{1.12}$$

Analogamente, o valor presente no segundo período (PV_2) pela soma do valor presente no primeiro período com o produto do valor presente (PV_1) pela taxa de juro i, ou seja,

$$\mathsf{PV}_2 = \mathsf{PV}_1 + \mathsf{PV}_1 \cdot \mathtt{i} = \mathsf{PV}_1(1 + \mathtt{i}). \tag{1.13}$$

Por (1.12), o valor presente (PV_2) é dado por

$$\mathsf{PV}_2 = \mathsf{PV}_1 \cdot (1 + \mathtt{i}) = \mathsf{PV} \cdot (1 + \mathtt{i})(1 + \mathtt{i}) = \mathsf{PV} \cdot (1 + \mathtt{i})^2 \tag{1.14}$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, define se o valor futuro no terceiro período por

$$\mathsf{PV}_3 = \mathsf{PV}_2 \cdot (1 + \mathtt{i}) = \mathsf{PV} \cdot (1 + \mathtt{i})^3. \tag{1.15}$$

Assim, pode-se deduzir que o valor futuro (FV) do capital aplicado com a taxa de juro i, ao longo dos n períodos, é dado por

$$\mathsf{FV} = \mathsf{PV}(1 + \mathtt{i})^{\mathtt{n}}. \tag{1.16}$$

Assim, quando se efetua uma operação com taxa de juro composto, o valor futuro da operação é dada pela Fórmula (1.16).

2.4 Financiamentos e Empréstimos

O ponto central de estudo deste texto é a apresentação de alguns sistemas de amortização, e a partir das noções apresentadas, explicitar a análise de qual tipo de amortização é mais eficiente para cada tipo de operação finaceira. Mais precisamente, estudaremos quais tipos de amortização poderão ser mais eficiente em uma operação de finaciamento ou empréstimo. Por isso, apresentaremos algumas informações sobre os tipos de financiamentos e empréstimos.

Definição 2.10. *Conceitualmente uma operação de crédito é um contrato realizado entre duas partes, na qual um consumidor, denominado tomador ou devedor (pessoa física ou pessoa jurídica), e um credor, celebram uma transação na qual o credor coloca à disposição do tomador ou devedor um montante de recursos financeiros, que deverá ser devolvido em um prazo determinado acrescido de um rendimento denominado juros (ZANINI, 2020).*

O Finaciamento é um tipo de operação finaceira. Mais precisamente, o *Finaciamento* é uma operação em que uma instituição financeira fornece crédito para a compra de um bem ou serviço, como um imóvel, veículo ou investimento empresarial, e o cliente devolve esse valor em parcelas mensais, com juros e encargos definidos nos termos do contrato.

Por outro lado, o *empréstimos* é uma operação finaceira onde a instituição finaceira fornece créditos que poderão ser utilizados sem uma vinculação específica.

Os finaciametos poderão ser classificados:

- Financiamento Imobiliário;

- Financiamento Estudantil;
- Financiamento Veicular;
- Financiamento Empresarial;
- Finaciamento Pessoal ou Consignado.

Com diversidade de operações finaceiras ainda pode haver outros tipos de finaciamentos que não estão incluídos naqueles listados anteriores. Uma característica predominante nas operações de financiamento é um custo para obtenção deste tipo créditos.

Definição 2.11. *Custo Efetivo Total* ***(CET)*** *corresponde a todos os encargos e despesas incidentes nas operações de crédito e de arrendamento mercantil financeiro, contratadas ou ofertadas a pessoas físicas ou pessoas jurídicas.*

Para facilitar a obtenção deste tipo de financiamento, as instituições financeiras dividem o **(CET)** das operações de financiamento em parcelas iguais, por um período de tempo n. Entretanto, a medida em que o intevalo de tempo aumenta, o **(CET)** é dividido em uma grande quantidade de parcelas. Por isso, dependendo das cicunstâncias econômicas presentes, as instituições financeiras poderão ter prejuízos. Para compensar os possíveis prejuízos e claro, obter lucros, essas operações são realizadas aplicando uma taxa de juro composto.

Normalmente, o **(CET)** de um financiamento é dividido em parcelas cujo o valor é igual. Esse procedimento é conhecido como *Série Uniforme de Pagamentos.* A Na próxima subseção, iremos intoduzir estas noções.

2.5 Séries de Pagamentos

Em geral, quando se realiza uma operação de emprestímo o capital, a instiutuição deverá receber o capital emprestado de uma só vez (pagamento à vista) ou em através de uma sucessão de pagamentos. Como já mencionado, esse processo é conhecido como *Série de Pagamentos.*

As séries de pagamentos podem ser classificadas quanto ao período, periódicidade, ao prazo, valor dos termos e momento dos pagamentos.

Definição 2.12. *Chama-se série uniforme de pagamentos uma série de "*n*"pagamentos (ou recebimentos) iguais e sucessivos. caso contrário, dizemos que a série de pagamentos é não-uniforme.*

Na série Uniforme de pagamentos, o primeiro pagamento (recebimento) ocorre no final do período 1 e o último no final do período "n".

Definição 2.13. *Séries de Pagamentos Periódicas são aquelas que os pagamentos ocorrem em intervalos de tempo iguais.Caso contrário, a série de pagamentos se chama Séries Uniforme de Pagamentos Não-Periódicas.*

Definição 2.14. *Séries de Pagamentos Temporárias são aquelas que possuem duração limitada ou finitas, ou seja, os pagamentos são realizadas em período determinado de tempo. Caso contrário, dizemos que a série de pagamento é infinita.*

A maioria dos empréstimos são realizados através de série de pagamentos temporários, onde o prazo de pagamento é uma quantidade de meses múltiplo de 12.

As série de pagamentos também podem ser classificadas quanto ao vencimento do primeiro pagamento.

Definição 2.15. *Chama-se Série de Pagamentos Imediata quando o primeiro pagamento ocorre exatamente no primeiro período da série.*

Por outro lado, quando o primeiro pagamento não ocorre no primeiro período da série, ou seja, ocorrerá em período subsequentes, diremos que a série de pagamento é uma série de pagamento deferida.

Quanto ao momento dos pagamento, pode-se ainda classificar a série de pagamento como antecipada ou postecipada.

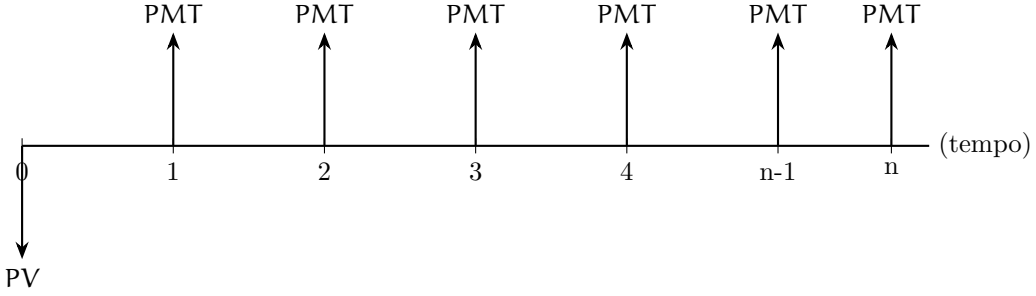
Definição 2.16. *Chama-se série de pagamento antecipada aquelas em que o primeiro pagamento ocorre no momento "*0*"da série de pagamento.*

Por outro lado, quando o primeiro pagamento ocorre apenas após o negócio, diremos que esta série de pagamentos é umas série postecipada.

Na maioria das operações financeiras do tipo empréstimo ou capitalização, o valor investido ou o valor a ser pago é dividido em quantidades iguais, por um determinado período de tempo, populamente conhecido como divisão em parcelas ou prestações. Uma prestação é cada uma das partes em que se divide o pagamento de uma dívida ou compra a prazo. Denotaremos uma prestação pela sigla **PMT**, que vem da tradução em inglês "*Payment*"que siginifica pagamento ou recebimento.

Através de um diagrama é possível representar a disposição das prestações ou parcelas durante uma operação finaceira do tipo série uniforme de pagamentos. Considere uma série uniforme, simultaneamente, temporária, constante, imediata, postecipada e periódica, em um período de n meses. No diagrama abaixo é possível indentificar que a linha horizontal representa o prazo em quem ocorrerá o pagamento enquanto as linhas verticais, representam a disposição das prestações em cada período de tempo.

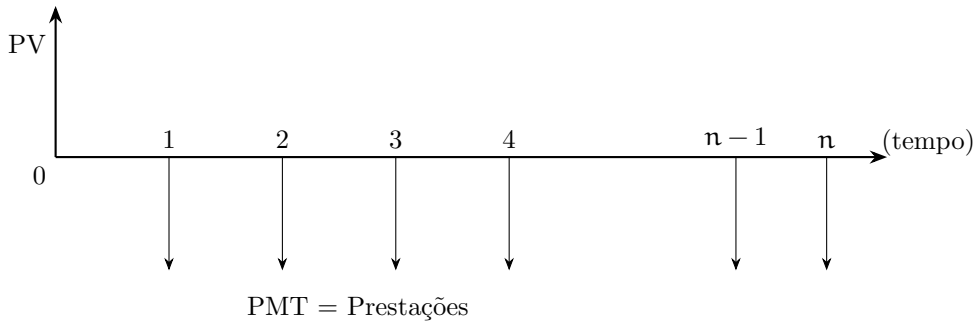
Diagrama 1: Série Uniforme de Pagamentos



Fonte: Imagem elaborada por IA

Além disso, por meio do próprio diagrama, é possível identificar o período de início dos pagamentos, bem como o período em que a operação será liquidada, permitindo, assim, determinar o tipo de série de pagamentos adotada. No Diagrama 1, também se pode observar a operação financeira sob a perspectiva do agente responsável pelo recebimento dos pagamentos. De maneira análoga, a mesma operação pode ser representada sob a perspectiva do agente responsável pela realização dos pagamentos. Observe o diagrama a seguir:

Diagrama 2: Série Uniforme de Pagamento



Fonte: Imagem elaborada por IA

No Diagrama 2, o valor presente (PV) é o valor da dívida constituida. Observando as características das opereações que envolvem séries de pagamentos uniforme, vamos determinar uma fórmula para calcular o valor prestacação PMT.

De fato, suponha que uma empresa finaceira forneceu um empréstimo de um valor (PV) para uma determinada pessoa física ou jurídica por um período de n meses, aplicada a uma taxa de juro composto i. Note que, o valor presente (PV) será dividido em n prestações iguais, isto é, o valor presente (PV) será a soma dos valores das prestações PMT. O valor presente (PV) é dado por

$$\begin{aligned} PV &= \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{PMT}{(1+i)^n} \\ &= PMT \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \\ &= \frac{PMT}{(1+i)^n} \cdot \left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) + 1 \right]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Note que a soma em (1.17) é uma PG de razão $r = 1+i$. Pela fómula da soma dos n primeiros termo de uma PG dada em (1.8),

$$\begin{aligned} 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n &= \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Assim, de (1.17) e (1.18),

$$PV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}. \tag{1.19}$$

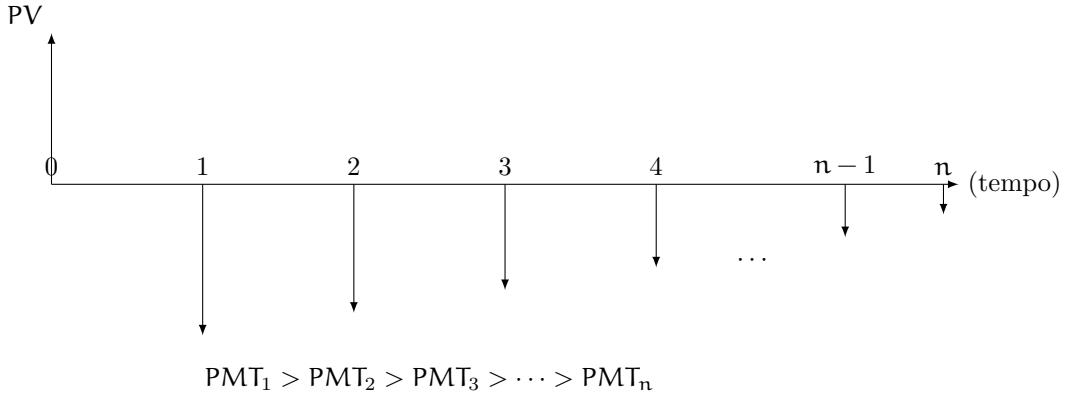
Portanto, em uma série de pagamentos uniformes é possível utilizar a teoria de PG's para dertminar o valor da prestação do empréstimo.

Em operações financeiras do tipo financiamento, o valor presente (PV) é o valor financiado. Além disso, esse tipo de série de pagamento é mais utilizadas em empréstimos cujo o sistema de amortização usado é o Sistema Price.

Definição 2.17. *Uma série de pagamentos decrescentes (ou gradiente decrescente) é um formato de quitação de dívidas onde o valor das parcelas diminui progressivamente ao longo do tempo*

Esse tipo de série de pagamentos é amplamente utilizado em operações financeiras que adotam o Sistema de Amortização Constante (SAC) ou o Sistema de Amortização Americano (SAA). O cálculo do valor da prestação PMT depende diretamente da taxa de amortização e do saldo devedor. Assim, ao serem apresentadas as noções referentes ao Sistema de Amortização Americano e ao Sistema de Amortização Constante, também serão expostas as fórmulas utilizadas para o cálculo das prestações ou parcelas. O diagrama abaixo representa uma série de pagamentos decrescentes.

Diagrama 3: Séries de Pagamentos Decrescentes



Fonte: Imagem elaborada por IA

Como se pode observar, a medida que o tempo $\mathtt{t}$ avança, o valor das prestações $\mathsf{PMT}_{\mathtt{i}}$, com $\mathtt{i} = 1, 2, \ldots, \mathtt{n}$, tende a diminuir. Consequentemente, o saldo devedor também tende a diminuir. Na próximo capítulo, apresentaremos as fómulas para calcular a prestação em operações finaceiras do tipo série de pagamentos decrescentes no contexto do sistema de amortização americano.

Capítulo 2

Sistemas de Amortização

Ao longo desta seção, apresentaremos os conceitos sobre três tipo de sistema de amortização: Sistema de Amortização Price, Sistema de Amortização Americano e Sistema de Amortização Constante. Mais presicamente, introduziremos as noções matemáticas que são bases para estes métodos. Além disso, apresenteremos algumas representações gráficas que drescevem o comportamento das prestações, saldo devedor e amortização ao longo tempo. Vale ressaltar que os gráficos que serão apresentados no texto são gerados por inteligência artificial.

Os sistemas de amortização de empréstimos ou financiamentos são métodos utilizados por credores ou instituições financeiras para recuperar o valor principal emprestado, acrescido dos encargos financeiros correspondentes. Esses valores e encargos são estabelecidos em contratos firmados entre as partes envolvidas — instituição financeira e cliente — com o objetivo de proporcionar retorno financeiro à instituição e possibilitar a obtenção de crédito por pessoas físicas ou jurídicas.

Nos contratos celebrados, define-se qual sistema de amortização será aplicado à operação financeira. Em muitos casos, entretanto, esses contratos apresentam terminologias técnicas desconhecidas pela maioria das pessoas. Dessa forma, antes de apresentar os três principais sistemas de amortização, serão abordados alguns conceitos fundamentais para a compreensão do tema.

Definição 0.1. *Os encargos financeiros representam os juros da operação, caracterizando-se como custo para o devedor e retorno do capital para o credor.*

Geralmente, os encargos finaceiros podem ser pré-fixados ou pós-fixados. O que distinguem essas duas modalidades é aplicação da taxa de juro.

Definição 0.2. *Saldo Devedor representa o valor principal da dívida, em determinado momento, após a dedução do valor já pago ao credor a título de amortização.*

Como já mencionado anteriormente, o saldo devedor pode ser dividido em diversas prestações, onde os valores das respectivas prestações dependem diretamente do sistema de amortização utilizado na operação finaceira. Entretanto, a prestação pode ser definida da seguinte forma:

$$Prestação = Amortização + Encargos\ Financeiros. \tag{2.1}$$

Em algumas operações finaceiras o credor permite a postegação do valor principal ou mesmo a postegação do valor da prestação, isto é, quando o pagamento é dividido em prestações, o credor permite que o

cliente pague a primeira prestação após um certo período posterior a celebração do contrato. Este período é conhecido como prazo de carência.

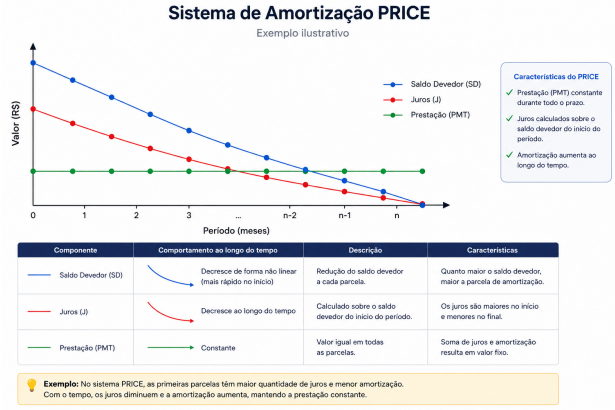
1 Sistema de Amortização Price

O Sistema de Amortização Price, também conhecido com sistema de Amortização Francês, é dos muitos sistemas de amortização utilizados em mercados pelo mundo, principalmente em pais como Inglaterra e Portugal. Na América do Sul, este sistema é amplamente adotado pelo Brasil em operações de financiamentos imobiliários e veiculares. Quando nos referirmos ao Sistema de Amortização Price, iremos chamá-lo apenas de "Sistema Price".

O Sistema Price se caracteriza pela previsibilidade no cálculo das prestações, pois é entrisicamente relacionado ao sistema de série de pagamentos uniforme. Por esse motivo, o valor da prestação PMT permanece constante durante toda a operação finaceira. Por outro lado, uma caracterisitica particular do Sistema Price é sobre o cálculo dos encargos finaceiros da operação, isto é, os juros capitados através do empréstimo de capital.

Os juros incidem sobre o Saldo Devedor SD, isto causa um crescimento na parcela de amortização. Em outros termos, no Sitema Price os juros decrescem e as amortizações crescem ao longo do tempo. Entretanto, mesmo havendo o crescimento das amortizações, isto não implica em crescimento dos valores das prestações PMT. O gráfico abaixo explícita a evolução da amorticação, o decrescimento do juro e a constância dos valores das prestações em uma operação de empréstimo sem prazo de carência.

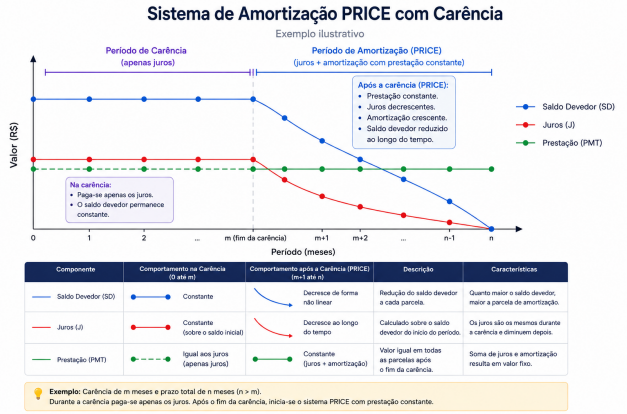
Figura 2.1: Empréstimo com sistema Price sem prazo de carência



Fonte: Imagem elaborada por IA

Por outro lado, quando o empréstimo com amotização do tipo Price admite um prazo de carência de m períodos, observa se que dentro do prazo de carência o cliente paga apenas os encargos finaceiros da operação, daí o saldo devedor permanece constante até a finalização do prazo de carência. Após o fim do prazo de carência, o comportamento das componentes da operação financeira se assemelham aos empréstimos sem prazo de carência com sistema Price. Veja o gráfico:

Figura 2.2: Empréstimo com Sistema Price com prazo de carência



Fonte: Imagem elaborada por IA

Tendo como base as noções de Progressões Geométricas e Séries de Pagamentos Uniformes, apresentaremos as fórmulas matemáticas que permitem descrever algebricamente o comportamento das prestações, do saldo devedor e da amortização no Sistema Price.

Definição 1.1. *A Amortização (Amort) no Sistema Price é definido pela diferença entre a prestação* PMT *e o Juro* J*, isto é,*

$$Amort = \mathsf{PMT} - \mathsf{J} \tag{2.2}$$

.

A amortização no primeiro período também pode ser calculado por uma fómula que depende da taxa de juro $\mathtt{i}$, a prestação PMT e o valor financiado PV, ou seja,

$$\mathrm{Amort}_1 = \mathsf{PMT} - \mathsf{PV} \cdot \mathtt{i}. \tag{2.3}$$

Por outro, lado pela teoria de Séries de Pagamento Uniforme, a prestação PMT é definida pela Fómula (1.19),

$$\mathsf{PMT} = \frac{\mathtt{i} \cdot (1+\mathtt{i})^{\mathtt{n}}}{(1+\mathtt{i})^{\mathtt{n}} - 1}\mathsf{PV}. \tag{2.4}$$

Considerando que a operação de empréstimo foi realizado em $\mathtt{n}$ período, definimos a amortização em um período $\mathtt{k}$ por

$$\mathrm{Amort}_{\mathtt{k}} = \mathrm{Amort}_1 \cdot (1+\mathtt{i})^{\mathtt{k}-1} \tag{2.5}$$

onde $1 \leqslant \mathtt{k} \leqslant \mathtt{n}$.

Com a noção de prestação e amortização, podemos definir o saldo devedor e estabelecer uma fómula para calcular o saldo devedor em qualquer período $\mathtt{k}$.

Definição 1.2. *O saldo devedor* SD *na operação finaceira com Sistema Price é definido pela diferença entre valor devido no início de cada intervalo de tempo e amortização naquele período.*

Vamos supor que a operação financeira não possui período de carência e que seja dividida em n prestações PMT, isto é, a operação será efetivada em n períodos. Além disso, suponha que o saldo devedor inicial seja PV. Então, pela Definição 1.2 o saldo devedor no primeiro período SD_1 é dado por

$$SD_1 = PV - Amort_1, \tag{2.6}$$

onde $Amort_1$ é amortização no primeiro período. Novamente, pela Definição 1.2 e pela Fórmula (2.5), o saldo devedor no segundo período SD_2 é dado por

$$\begin{aligned} SD_2 &= SD_1 - Amort_2 \\ &= PV - Amort_1 - Amort_2 \\ &= PV - Amort_1 - Amort_1 \cdot (1+i). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Repetindo o argumento, obteremos que

$$SD_3 = PV - Amort_1 - Amort_1 \cdot (1+i) - Amort_1 \cdot (1+i)^2. \tag{2.8}$$

Na obtenção dos saldos devedores SD_1, SD_2 e SD_3, observamos que quando o tempo evolui, o saldo devedor se aproxima de uma PG com razão $r = (1+i)$. Logo, o saldo devedor no período k é dado por

$$\begin{aligned} SD_k &= SD_{k-1} - Amort_k \\ &= PV - Amort_1 - Amort_1(1+i) - \ldots - Amort_1(1+i)^{k-2} - Amort_k \\ &= PV - Amort_1 - Amort_1(1+i) - \ldots - Amort_1(1+i)^{k-2} - Amort_1(1+i)^{k-1} \\ &= PV - Amort_1 \left[1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{k-1}\right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pela Fórmula (1.8),

$$1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{k-1} = \frac{(1+i)^k - 1}{i}. \tag{2.10}$$

O valor financiado PV e amortização no primeiro período $Amort_1$ podem ser definido por fómulas que dependem da prestação e taxa de juro i, assim o saldo devedor SD_k é dado por

$$\begin{aligned} SD_k &= PV - Amort_1 \frac{(1+i)^k - 1}{i} \\ &= PV - (PMT - PV \cdot i) \frac{(1+i)^k - 1}{i} \\ &= PV(1+i)^k - PMT \frac{(1+i)^k - 1}{i} \\ &= PMT(1+i)^k \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} - PMT \frac{(1+i)^k - 1}{i} \\ &= \frac{PMT}{i} \left[\frac{(1+i)^{n+k} - (1+i)^k}{(1+i)^n} - (1+i)^k + 1 \right] \\ &= PMT \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i \cdot (1+i)^{n-k}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, o saldo devedor em qualquer período é dado por

$$\mathsf{SD}_k = \mathsf{PMT}\frac{(1+i)^{n-k}-1}{i\cdot(1+i)^{n-k}} \tag{2.12}$$

Ou seja, sabendo o valor da prestação e a taxa de juro aplicada, pode se determinar o saldo devedor em qualquer período.

Os juros são calculados sobre o saldo devedor apurado no início de cada período, o qual corresponde ao saldo existente ao final do período imediatamente anterior. De forma análoga ao desenvolvimento realizado para o saldo devedor, é possível obter uma fórmula explícita para o cálculo dos juros, em função do saldo devedor no período k e da taxa de juros i. Logo, o juro sobe o saldo devedor em um período k é dado por

$$J_k = \mathsf{SD}_{k-1}\cdot i \tag{2.13}$$

Como já mencionado, ao se considerar uma operação financeira no Sistema de Amortização Price com prazo de carência m, as prestações permanecem constantes ao longo do período de amortização, assim como os juros e as amortizações correspondentes. Dessa forma, as fórmulas apresentadas em (2.5), (2.12) e (2.13) permanecem válidas. Contudo, a aplicação dessas expressões torna-se efetiva apenas após o término do período de carência.

Para aplicar a teoria de Sistema de Amortização Price, iremos solucionar o problema 1:

"João deseja comprar um automóvel no valor de R$ 150.000,00. Sabendo que ele possui apenas R$ 50.000,00 e que o banco ofereceu um financiamento de R$ 100.000,00, a uma taxa de 2% ao mês, a ser pago em 48 meses, determine o valor das prestações, o juro, a amortização e o custo total do veículo em cada sistema de amortização."

De fato, veja que o valor finaciado é $\mathsf{PV} = 100.000$, a taxa de juro é $i = 2\%$ e o período de vigência é $n = 48$ meses. No Sistema de Amortização Price as prestações PMT são todas constantes e dadas pela Fómula (2.1), isto é,

$$\mathsf{PMT} = \frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\mathsf{PV}. \tag{2.14}$$

Aplicando aos valores do problema,

$$\begin{aligned}\mathsf{PMT} &= \frac{0,02\cdot(1+0,02)^{48}}{(1+0,02)^{48}-1}100000\\ &= 2000\frac{1,02^{48}}{1,02^{48}-1}\\ &= 3260,18\end{aligned} \tag{2.15}$$

Logo, todas as 48 prestações são iguais $\mathsf{PMT} = 3260,18$.

Por outro lado, o saldo devedor no início do empréstimo, isto é, em $n = 0$ é o valor a ser finaciado $\mathsf{PV} = 100.000$. Daí, a amortização em $n = 1$ é dada pela Fómula (2.16), ou seja,

$$\text{Amort}_1 = 3260,18 - 100000\cdot 0,02 = 3260,18 - 2000 = 1260,18. \tag{2.16}$$

Pela fómula (2.5) é possível calcular a amortização do empréstimo em qualquer período

$$\text{Amort}_2 = 1.260,18 \cdot (1+\mathtt{i})^{2-1} = 1.260,18 \cdot 1,02 = 1.285,38. \tag{2.17}$$

Em $\mathtt{n} = 3$, a amortização é dada por

$$\text{Amort}_3 = \text{Amort}_1 \cdot (1+0,02)^{3-1} = 1.260,18 \cdot 1,02^2 = 1.260,18 \cdot 1,0404 = 1.311,09. \tag{2.18}$$

Prosseguindo da mesma forma podemos determinar todas as amortizações em todos os 48 meses. Em particular, a amortização em $\mathtt{n} = 48$ é dado por

$$\text{Amort}_{48} = \text{Amort}_1 \cdot (1+0,02)^{48} = 1.260,18 \cdot 2,5363 = 3.196,19 \tag{2.19}$$

Conhecendo os valores das amortizações, podemos derteminar o juro e o saldo devedor em cada um dos 48 meses. Pela Fórmula (2.6), o saldo devedor em $\mathtt{n} = 1$ é dado por

$$\mathsf{SD}_1 = \mathsf{PV} - \text{Amort}_1 = 100.000 - 1.260,18 = 98.739,82. \tag{2.20}$$

Pela Fómula (2.12) pode-se calcular o saldo devedor em qualquer período $\mathtt{k}$, utilizando apenas o valor da prestação PMT e o valor da taxa de juro $\mathtt{i}$. No segundo mês, o saldo devedor é igual

$$\begin{aligned}\mathsf{SD}_2 &= \mathsf{PMT}\frac{(1+0,02)^{48-2}-1}{0,02\cdot(1+0,02)^{48-2}}\\ &= 3260,18\frac{(1,02)^{46}-1}{0,02\cdot(1,02)^{46}}\\ &= 97.454,44\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ao proseguirmos com a plicação da Fórmula (2.12) determinaremos todos os saldos devedores. Em particular, o saldo devedor no mês $\mathtt{n} = 47$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathsf{SD}_{47} &= 3260,18\frac{(1+0,02)^{48-47}-1}{0,02\cdot(1+0,02)^{48-47}}\\ &= 3260,18\frac{1,02-1}{0,02\cdot 1,02}\\ &= \frac{3260,18}{1,02}\\ &= 3196,55\end{aligned} \tag{2.22}$$

Finalmente, no mês $\mathtt{n} = 48$ o saldo devedor é nulo. Resta apenas calcular o o juro sobre o empréstimo durante os 48 meses. Para isso, usaremos a Fórmula (2.13). De fato, o juro em $\mathtt{n} = 1$

$$\mathsf{J}_1 = \mathsf{SD}_0 \cdot \mathtt{i} = 100.000 \cdot 0,02 = 2000. \tag{2.23}$$

No segundo mês o jurdo é dado por

$$\mathsf{J}_2 = \mathsf{SD}_1 \cdot 0,02 = 98.739,82 \cdot 0,02 = 1974,80. \tag{2.24}$$

Ao prosseguirmos com o argumento obteremos todos os dados sobre o empréstimo tomado por João. A Tabaela 2.1 lista todos os valores das componentes do empréstimo durante todo os 48 meses.

Tabela 2.1: Tabela de amortização do sistema Price

Parcela	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor (R$)
1	3.260,18	2.000,00	1.260,18	98.739,82
2	3.260,18	1.974,80	1.285,38	97.454,44
3	3.260,18	1.949,09	1.311,09	96.143,35
4	3.260,18	1.922,87	1.337,31	94.806,04
5	3.260,18	1.896,12	1.364,06	93.441,98
6	3.260,18	1.868,84	1.391,34	92.050,64
7	3.260,18	1.841,01	1.419,17	90.631,47
8	3.260,18	1.812,63	1.447,55	89.183,92
9	3.260,18	1.783,68	1.476,50	87.707,42
10	3.260,18	1.754,15	1.506,03	86.201,39
11	3.260,18	1.724,03	1.536,15	84.665,24
12	3.260,18	1.693,30	1.566,88	83.098,36
13	3.260,18	1.661,97	1.598,21	81.500,15
14	3.260,18	1.630,00	1.630,18	79.869,97
15	3.260,18	1.597,40	1.662,78	78.207,19
16	3.260,18	1.564,14	1.696,04	76.511,15
17	3.260,18	1.530,22	1.729,96	74.781,19
18	3.260,18	1.495,62	1.764,56	73.016,63
19	3.260,18	1.460,33	1.799,85	71.216,78
20	3.260,18	1.424,34	1.835,84	69.380,94
21	3.260,18	1.387,62	1.872,56	67.508,38
22	3.260,18	1.350,17	1.910,01	65.598,37
23	3.260,18	1.311,97	1.948,21	63.650,16
24	3.260,18	1.273,00	1.987,18	61.662,98
25	3.260,18	1.233,26	2.026,92	59.636,06
26	3.260,18	1.192,72	2.067,46	57.568,60
27	3.260,18	1.151,37	2.108,81	55.459,79
28	3.260,18	1.109,20	2.150,98	53.308,81
29	3.260,18	1.066,18	2.194,00	51.114,81
30	3.260,18	1.022,30	2.237,88	48.876,93
31	3.260,18	977,54	2.282,64	46.594,29
32	3.260,18	931,89	2.328,29	44.266,00
33	3.260,18	885,32	2.374,86	41.891,14
34	3.260,18	837,82	2.422,36	39.468,78
35	3.260,18	789,38	2.470,80	36.997,98
36	3.260,18	739,96	2.520,22	34.477,76
37	3.260,18	689,56	2.570,62	31.907,14

38	3.260,18	638,14	2.622,04	29.285,10
39	3.260,18	585,70	2.674,48	26.610,62
40	3.260,18	532,21	2.727,97	23.882,65
41	3.260,18	477,65	2.782,53	21.100,12
42	3.260,18	422,00	2.838,18	18.261,94
43	3.260,18	365,24	2.894,94	15.367,00
44	3.260,18	307,34	2.952,84	12.414,16
45	3.260,18	248,28	3.011,90	9.402,26
46	3.260,18	188,05	3.072,13	6.330,13
47	3.260,18	126,60	3.133,58	3.196,55
48	3.260,18	63,93	3.196,25	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Como o empréstimo com sistema price tem como característica prestações constantes, então o custo efetivo total é dado pela soma das prestações com o valor da entrada, isto é,

$$\text{CeT} = 50.000 + 48 \cdot 3260,18 = 50.000 + 156.488,64 = 206.488,64. \tag{2.25}$$

Deste valor, a quantia de $56.488,64$ foi o juro cobrado sobre o empréstimo. Na próxima seção, apresentaremos as noções de Sistema de Amortização Constante, e com isso solucionaremos o O problema 1.

2 Sistema de Amortização Constante

Quando se realiza operações empréstimos ou finaciamento utilizando o sistema de amortização constante, abreviado por (SAC), observamos que estas operações possuem algumas características que a distingue do sistema de amortização price. Mais precisamente, o sistema de amotização constante tem como principal característica a amortização igual do valor principal em todo o período de vigência do empréstimo ou finaciamento.

Além disso, nesta operações envolvendo o sistema de amortização (SAC), os juros encidem sobre o saldo devedor. Com isso, o montante do juro ou valor futuro decresce após o pagamento de cada amortização. Consequentemente, pela fórmula da prestação danda em (2.1), pode-se concluir que a prestação tende decrescer com o tempo na forma de uma progressão aritmética.

No sistema de amortização (SAC) a Amortização (Amort) é definida pela divisão do valor financiado pelo quantidade de prestações. Mais precisamente,

$$\text{Amort} = \frac{\mathsf{PV}}{\mathfrak{n}} \tag{2.26}$$

onde PV é o valor do financiamento e $\mathfrak{n}$ número de prestações.

Como a amortização é constante em todo o período de vigência do empréstimo ou finaciamento, tem-se

$$\frac{\mathsf{PV}}{\mathfrak{n}} = \text{Amort}_1 = \text{Amort}_2 = \ldots = \text{Amort}_{\mathfrak{n}}, \tag{2.27}$$

onde $\text{Amort}_1, \text{Amort}_2, \ldots, \text{Amort}_{\mathfrak{n}}$ são as amortizações em cada período. Daí, pode se concluir que

$$\mathsf{PV} = \text{Amort}_1 + \text{Amort}_2 + \ldots + \text{Amort}_{\mathfrak{n}}. \tag{2.28}$$

Portanto, o valor finaciando PV é igual a soma dos valores das amortizações no período.

O saldo devedor pode ser deduzido a partir da equação (2.28), isto é, sendo Amort_1 no primeiro período, tem-se que o saldo devedor no primeiro período é dado por $SD_1 = PV - \text{Amort}_1$. Analogamente, sabendo que Amort_2 é amortização do valor financiando PV no segundo período e SD_1 é valor devido no financiamento, tem-se que que o saldo devedor no segundo período é definido por $SD_2 = SD_1 - \text{Amort}_2$. Proseguindo com o mesmo argumento, tem-se o saldo devedor no n-ésimo período é definido por $SD_n = SD_{n-1} - \text{Amort}_n$.

Agora, como a amortização é constante em todos os períodos, podemos concluir que o saldo devedor decresce em progressão aritmética com razão $r = \frac{PV}{n}$.

Com a noção de amortização e saldo devedor apresentados anteriormente pode-se determinar uma fórmula para calcular o juro em operações de empréstimos ou financiamentos com sistema de amortização constante. De fato, sendo PV o valor financiado, tem-se que o juro sobre o valor financiando no período $n = 1$ é definido pelo produto do valor financiado PV pela taxa de juro i, isto é,

$$J_1 = PV \cdot i. \tag{2.29}$$

Como a taxa de juro é aplicada sobre o saldo devedor no respectivo período, tem-se que o juro sobre o valor financiado no segundo período, denotado por J_2, é definido por

$$J_2 = SD_1 \cdot i = (PV - \text{Amort}_1) \cdot i = (PV - \frac{PV}{n}) \cdot i. \tag{2.30}$$

Prosseguindo com o mesmo argumento, tem-se que o juro calculado em que k—ésimo período é dado por

$$\begin{aligned} J_k &= \left(PV - \frac{PV}{n} - \frac{PV}{n} - \ldots - \frac{PV}{n}\right) \cdot i \\ &= \left(PV - (k-1)\frac{PV}{n}\right) \cdot i \\ &= (n + 1 - k)\,\frac{PV}{n} \cdot i \end{aligned} \tag{2.31}$$

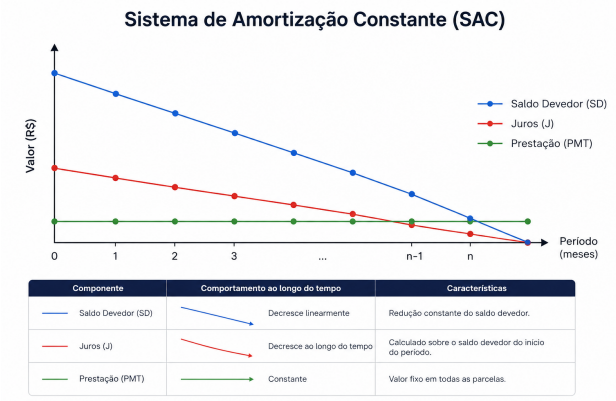
Observe que pela redução constante do saldo devedor, os juros diminuem linearmente ao longo do tempo, isto é, o juro se comporta na forma de uma progressão aritmética de razão $r = \frac{PV}{n}$.

Pela fórmula (2.31) podemos estabelecer uma fómula para o cáclulo da prestação de um empréstimo ou financiamento com sistema de amortização constante. De fato, A prestação PMT no k- ésimo período do respectivo empréstimo é definida por

$$\begin{aligned} PMT_k &= \text{Amortização} + \text{Juro} \\ &= \frac{PV}{n} + (n + 1 - k)\,\frac{PV}{n} \cdot i \\ &= \text{Amort} + J_k \end{aligned} \tag{2.32}$$

O gráfico a seguir descreve o comportamento das componentes de uma operação financeira ao longo do tempo

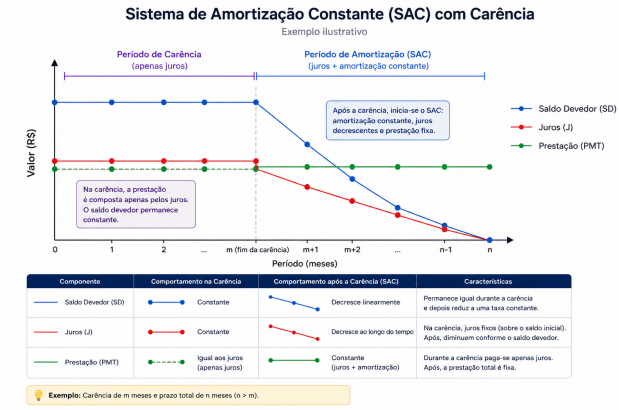
Figura 2.3: Sistema de Amortização Constante



Fonte: Imagem elaborada do IA

As fórmulas apresentadas anteriormente não mencionaram a existência de prazo de carência. Entretanto, elas podem ser aplicadas da mesma forma; contudo, a representação gráfica torna-se um pouco diferente da Figura 2.6.

Figura 2.4: Sistema SAC com prazo de carência



Fonte: Imagem elaborada do IA

Pela representação gráfica da Figura 2.6, pode-se observar que, em empréstimos com prazo de carência, o sistema de amortização constante (SAC) passa a ser aplicado apenas após o término desse período. Assim, durante o prazo de carência, as prestações PMT permanecem constantes, enquanto o saldo devedor SD somente começa a decrescer após o fim da carência.

Para aplicar a teoria de Sistema de Amortização Price, vamos solucionar o Problema 1:

"João deseja comprar um automóvel no valor de R$ 150.000,00. Sabendo que ele possui apenas R$ 50.000,00 e que o banco ofereceu um financiamento de R$ 100.000,00, a uma taxa de 2% ao mês, a ser pago em 48 meses, determine o valor das prestações, o juro, a amortização e o custo total do veículo em cada sistema de amortização."

De fato, analogamente a resolução pelo Sistema de Amortização Price, tem-se que a taxa de juro é igual $\mathtt{i} = 2\%$, o valor finaciado(Valor devido) é $PV = 100.000$ e o período de vigência do empréstimo em que

joão solicitou é $\mathtt{n} = 48$ meses. No sistema (SAC) a amortização é constante e pode ser definido pela Fórmula (2.33). Logo, a amortização do emprestimo é dado por

$$\text{Amort} = \frac{100.000}{48} = 2083,33 \tag{2.33}$$

Com a descoberta do valor da amortização podemos determinar os valores das prestações, juros e saldo devedor. Primeiramente, vamos determinar o juro. Com efeito, pela fórmula (2.29) o juro em $\mathtt{n} = 1$ é dado por

$$\mathtt{J}_1 = \mathtt{PV} \cdot \mathtt{i} = 100.000 \cdot 0,02 = 2000. \tag{2.34}$$

Pela Fórmula (2.30), o juro em $\mathtt{n} = 2$ é dado pelo

$$\mathtt{J}_2 = (\mathtt{PV} - \text{Amort}_1) \cdot \mathtt{i} = (100.000 - 2083,33) \cdot 0,02 = 1958,33 \tag{2.35}$$

Os juros incididos nos demais períodos são determinados pela fórmula (2.31). Por exemplo, o juro em $\mathtt{n} = 47$ é dado por

$$\mathtt{J}_{47} = (48 + 1 - 47)\frac{100.000}{48} \cdot 0,02 = \frac{2000}{24} = 83,33. \tag{2.36}$$

Agora, pela Fómula (2.32), o valor de cada prestação é determinado pela soma da amortização com o valor do juro naquele período. Por (2.33) e (2.34), primeira prestação é dada por

$$\mathtt{PMT}_1 = \text{Amort} + \mathtt{J}_1 = 2083,33 + 2000 = 4083,33. \tag{2.37}$$

Os valores das prestações, juro e o saldo devedor em cada período na vigência do empréstimo é dado pela tabela

Tabela 2.2: Tabela Sistema Sac

Parcela	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor (R$)
1	4.083,33	2.000,00	2.083,33	97.916,67
2	4.041,67	1.958,33	2.083,33	95.833,34
3	4.000,00	1.916,67	2.083,33	93.750,01
4	3.958,33	1.875,00	2.083,33	91.666,68
5	3.916,67	1.833,33	2.083,33	89.583,35
6	3.875,00	1.791,67	2.083,33	87.500,02
7	3.833,33	1.750,00	2.083,33	85.416,69
8	3.791,67	1.708,33	2.083,33	83.333,36
9	3.750,00	1.666,67	2.083,33	81.250,03
10	3.708,33	1.625,00	2.083,33	79.166,70
11	3.666,67	1.583,33	2.083,33	77.083,37
12	3.625,00	1.541,67	2.083,33	75.000,04
13	3.583,33	1.500,00	2.083,33	72.916,71
14	3.541,67	1.458,33	2.083,33	70.833,38

15	3.500,00	1.416,67	2.083,33	68.750,05
16	3.458,33	1.375,00	2.083,33	66.666,72
17	3.416,67	1.333,33	2.083,33	64.583,39
18	3.375,00	1.291,67	2.083,33	62.500,06
19	3.333,33	1.250,00	2.083,33	60.416,73
20	3.291,67	1.208,33	2.083,33	58.333,40
21	3.250,00	1.166,67	2.083,33	56.250,07
22	3.208,33	1.125,00	2.083,33	54.166,74
23	3.166,67	1.083,33	2.083,33	52.083,41
24	3.125,00	1.041,67	2.083,33	50.000,08
25	3.083,33	1.000,00	2.083,33	47.916,75
26	3.041,67	958,33	2.083,33	45.833,42
27	3.000,00	916,67	2.083,33	43.750,09
28	2.958,33	875,00	2.083,33	41.666,76
29	2.916,67	833,33	2.083,33	39.583,43
30	2.875,00	791,67	2.083,33	37.500,10
31	2.833,33	750,00	2.083,33	35.416,77
32	2.791,67	708,33	2.083,33	33.333,44
33	2.750,00	666,67	2.083,33	31.250,11
34	2.708,33	625,00	2.083,33	29.166,78
35	2.666,67	583,33	2.083,33	27.083,45
36	2.625,00	541,67	2.083,33	25.000,12
37	2.583,33	500,00	2.083,33	22.916,79
38	2.541,67	458,33	2.083,33	20.833,46
39	2.500,00	416,67	2.083,33	18.750,13
40	2.458,33	375,00	2.083,33	16.666,80
41	2.416,67	333,33	2.083,33	14.583,47
42	2.375,00	291,67	2.083,33	12.500,14
43	2.333,33	250,00	2.083,33	10.416,81
44	2.291,67	208,33	2.083,33	8.333,48
45	2.250,00	166,67	2.083,33	6.250,15
46	2.208,33	125,00	2.083,33	4.166,82
47	2.166,67	83,33	2.083,33	2.083,49
48	2.125,00	41,67	2.083,33	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Pela Tabela (2.2) é possível conluir que os valores das prestações, saldo devedor e do juro decrescem com evolução do tempo, enquanto a amortização permanece constante. Além disso, o custo efetivo total é dado pela soma de todos os valores das prestações com o valor da entrada, isto é,

$$\text{CeT} = 50.000 + \text{Soma dos Valores das Prestações} = 50.000 + 149.000 = 199.000. \tag{2.38}$$

Na próxima seção, iremos explorar um outro tipo de amortização que é comumente utilizado nas operações nos Estados Unidos, mas que não pe muito comum no mercado financeiro brasileiro.

3 Sistema de Amortização Americano

O Sistema de Amortização Americano (SAA) constitui um dos diversos sistemas de amortização empregados por bancos e instituições financeiras em operações de empréstimos e financiamentos. Tal modelo é amplamente adotado no mercado financeiro norte-americano, uma vez que apresenta uma estrutura distinta dos sistemas Price e SAC no que se refere às modalidades de quitação do capital financiado. Considerando a relevância desse sistema no contexto da Matemática Financeira, serão apresentadas, nesta seção, suas principais noções teóricas e características operacionais.

O sistema SAA caracteriza-se pela constância das prestações PMT. Entretanto, diferentemente dos sistemas Price e SAC, nesse modelo de financiamento a liquidação do capital devido à instituição financeira ocorre somente ao final do $\mathfrak{n}$-ésimo período de vigência do contrato. Em virtude dessa particularidade, emergem os seguintes questionamentos:

1. O sistema SAA é isento de encargos financeiros?

2. Em operações de empréstimo sob o sistema SAA, o pagamento é efetuado em parcela única?

Para responder as duas questões acima, vamos supor que seja realizado um empréstimo de um valor PV, sujeito a uma taxa de juro $\mathfrak{i}$, por um período $\mathfrak{n}$, sem um prazo de carência. O sistema SAA não prevê amortização durante o período intermediário do empréstimo, ou seja, o cliete paga o juro incidindo sobre o valor PV divido em prestações definidas por

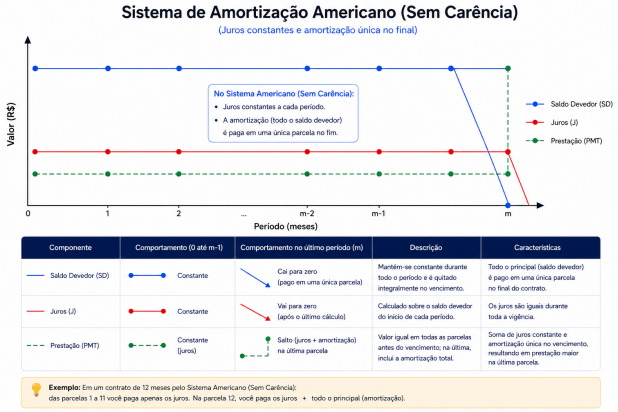
$$\mathsf{PMT}_k = \mathsf{PV} \cdot \mathfrak{i}, \tag{2.39}$$

onde PMT_k é a k-ésima prestação e $1 \leqslant k \leqslant \mathfrak{n}$. O Juro total sobre o empréstimo J é dado pela soma das $\mathfrak{n}$ prestações constantes $\mathsf{PMT}_k = \mathsf{PMT}$, isto é,

$$\mathsf{J} = \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}-1} \mathsf{PMT}_k = (\mathfrak{n}-1) \cdot \mathsf{PMT}. \tag{2.40}$$

No caso de empréstimos com sistema de amortização SAA, o contratante paragará $\mathfrak{n}-1$ parcelas iguais a PMT, e no $\mathfrak{n}$—ésimo período, ele pagará uma prestação PMT juntamente com todo o valor devido PV, isto é, a última prestação é dada por $\mathsf{PMT}_\mathfrak{n} = \mathsf{PMT} + \mathsf{PV}$. Dessa forma, pode se concluir que em empréstimos com sistema SAA, o valor devido PV permence constante por todo o período de vigência do empréstimo. O gráfico abaixo detalha o comportamento das variáveis deste empréstimo.

Figura 2.5: Sistema SAA Sem prazo de carência



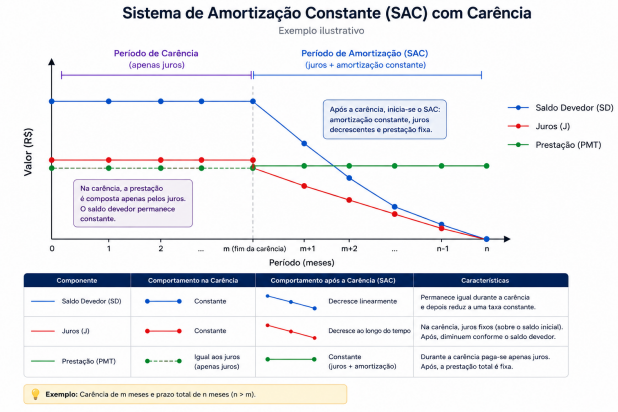
Fonte: Imagem elaborada do IA

Pelo gráfico, observa-se que, no último período, a dívida é amortizada de forma mais acelerada. Além disso, ao final do contrato de empréstimo, o montante total devolvido pelo cliente à instituição financeira corresponde à soma do valor principal PV com os encargos financeiros J. Dessa forma, o custo efetivo total do empréstimo é dado por

$$\mathrm{CET} = \mathrm{PV} + \mathrm{J}. \tag{2.41}$$

Quando o empréstimo apresenta um prazo de carência $\mathfrak{m}$, durante esse intervalo o cliente realiza apenas o pagamento das prestações correspondentes aos juros J. Após o término do período de carência, inicia-se o processo de amortização da dívida, possibilitando, consequentemente, a liquidação do empréstimo. O gráfico a seguir representa a evolução de empréstimos com prazo de carência.

Figura 2.6: Sistema SAA com prazo de carência $\mathfrak{m}$.



Fonte: Imagem elaborada do IA

Em uma operação de empréstimo, o cliente tem como objetivo sanar algumas dívida ou fazer investimentos. Por isso, dependendo do valor tomado de empréstimo e as condições finaceiras, o pagamento da ultima prestação poderá ter um valor elevado, o que dificultar o pagamento. Isto causará inadiplencia, e com isso, gerar prejuízo a instituição finaceira. Para contornar este problema, as instituições finaceiras criaram

um fundo de amortização conhecido como *sking fund*. Este fundo é um regime de capitalização aplicado a uma taxa de juro diferente a taxa de aplicada ao valor devido PV e com pagamentos periódicos durante o período de vigência. Este fundo tem como objetivo principal a liquidação do empréstimo. Os empréstimos com SAA e com aditivo de um *sking fund* também é conhecido como "*SAA com duas taxas*".

Finalmente, vamos aplicar o sistema (SAA) na resolução do Problema 1. Observaremos que as fórmulas que determinam as componetes do empréstimos são bem menos complexas que as fórmulas do sistema Price e SAC. Isso torna este sistema mais acessível, não necessitando do uso de software. Considere o seguinte problema:

"João deseja comprar um automóvel no valor de R$ 150.000,00. Sabendo que ele possui apenas R$ 50.000,00 e que o banco ofereceu um financiamento de R$ 100.000,00, a uma taxa de 2% ao mês, a ser pago em 48 meses, determine o valor das prestações, o juro, a amortização e o custo total do veículo em cada sistema de amortização."

De fato, Considere $\mathsf{PV} = 100.000$, $\mathfrak{i} = 2\%$ e $\mathfrak{n} = 48$. Então, como as prestações são sempre constante e o sistema so amortizará a dívida na última prestação, temos que 47 as prestações são dadas por :

$$\mathsf{PMT} = 100.000 \cdot 0,02 = 2000 \tag{2.42}$$

O saldo devedor permanecerá constante por 47 meses, e no 48 mês a dívida será liquidada, onde a prestação do 48 é dada pela soma do valor da prestação PMT com o valor devido $\mathsf{PV} = 100.000$. A Tabela (2.3) descreverá todos os valores das componentes no decorrer da vigência do empréstimo solicitado por João.

Tabela 2.3: Tabela de Sistema SAA

Parcela	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor (R$)
1	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
2	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
3	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
4	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
5	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
6	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
7	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
8	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
9	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
10	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
11	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
12	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
13	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
14	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
15	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
16	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
17	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
18	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
19	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
20	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00

21	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
22	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
23	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
24	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
25	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
26	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
27	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
28	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
29	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
30	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
31	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
32	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
33	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
34	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
35	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
36	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
37	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
38	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
39	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
40	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
41	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
42	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
43	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
44	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
45	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
46	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
47	2.000,00	2.000,00	0,00	100.000,00
48	102.000,00	2.000,00	100.000,00	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Pela Tabela 2.3, podemos determinar o custo efetivo total do empréstimo solicitado pelo João. Mais precisamente, verificaremos que durante os 47 meses, o João pagou apenas o juro referente ao empréstimo. Daí, o custo efetivo total é :

$$\text{CeT} = 50.000 + 47 \cdot 2000 + 102.000 = 246.000 \tag{2.43}$$

Capítulo 3

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao estudarmos os três sistemas de amortização entendemos que cada um dos respectivos sistema possui características distintas que o diferem dos demais, deixando os atrativos para alguns modelos de empréstimos e não para outros. Quando aplicamos cada um desses sistemas a um problema real, as características de cada um desses sistema ficamm mais evidentes.

No problema 1, analisamos os empréstimos na pespectiva dos três sistemas de amortização, considerando as mesmas condições(Taxa de juro, prazo de vigência e valor financiado). Observamos na prática o comportamento das componente do empréstimo e assim verificamos qual é o sistema de amortização é mais adequado para João.

Ao analisarmos este empréstimo sobre a pespectiva do custo efetivo total, verificamos que se João adotar sistema Price, ele pagará ao fim do prazo 206.000, com sistemo SAC joão pagará 199.000 e por último, se joão usar o sistema SAA, então ao final do prazo, ele desembosará um valor de 246.000. Dessa forma, Olhando do ponsto de vista do custo efetivo total, vemos que o sistema SAA é o menos atrativos e Sistema Constante é o mais atrativo.

Por outro lado, se João estiver buscando prestações de baixo valor, o sistema SAA é mais atrativo apenas nas 47 primeiras prestações, pois a última prestação possui valor elevado, visto que João deverá liquidar o saldo remanescente da dívida. Já no sistema SAC, as prestações iniciais apresentam valores mais elevados, mas decrescem gradativamente ao longo do tempo. Por sua vez, se João estiver preparado para pagar um valor fixo durante todo o financiamento, o sistema de amortização mais adequado nessa situação é o Sistema Price. Além disso, se João utilizar o Sistema Price e antecipar o pagamento de prestações, poderá obter descontos no valor devido, pois, pela Definição (2.1), o valor da prestação é dado pela soma da amortização com os juros. E como o valor dos juros é menor nas últimas prestações, a antecipação reduz o montante de juros a ser pago, gerando economia para o devedor. Dessa forma, neste quesito, o Sistema Price é mais vantajoso que o sitemas SAA, visto que no sitema SAA o juro é constante.

Observando todos os dados e informações apresentados, pode-se concluir que a escolha do sistema de amortização mais vantajoso para uma determinada operação financeira depende de alguns fatores existentes no momento da contratação, como o poder aquisitivo do cliente, a taxa de juros e o prazo de vigência do empréstimo. Por isso, antes de efetuar qualquer operação financeira do tipo empréstimo, é recomendável realizar uma ampla pesquisa sobre as condições oferecidas pela instituição financeira.

Referências Bibliográficas

[1] ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática financeira e suas aplicações*. São Paulo: Atlas, 2012.

[2] BAGATINI, Anderson Fernando. *Sistemas de amortização de empréstimos*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Campus Erechim, Erechim, 2010.

[3] BORNATTO, Gilmar.*Matemática financeira.*[Apostila / material de apoio]. Brasil, s.d.

[4] BRAUDEL, Fernand. *Civilization and Capitalism, 15th–18th Century: The Wheels of Commerce*. v. 2. New York: Harper & Row, 1982.

[5] CIPOLLA, Carlo M. *Before the Industrial Revolution: European Society and Economy, 1000–1700*. 3. ed. W. W. Norton & Company, 1993.

[6] COHEN, Megan. *Historical Echoes: The Creation of the Contemporary U.S. Mortgage*. New York: Federal Reserve Bank of New York, 2012.

[7] FREITAS, Bruno Gomes de; MOREIRA, Valéria Guimarães. Uma abordagem sobre Sistemas de Amortização à luz da Educação Financeira. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 7, n. 46, 2022.

[8] HALTER, Bárbara. *Uso do sistema americano para operações de empréstimos e financiamentos*. 2013.

[9] IEZZI, Gelson et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013. Coleção em 11 v.12

[10] LACHTERMACHER, Gerson; FARO, Clovis de. *Sistemas de Amortização no Regime de Juros Simples: Uma Metodologia Geral*. Revista Estudos e Negócios Academics, v. 3, n. 6, p. 3–23, 2023

[11] LE GOFF, Jacques. *Your Money or Your Life: Economy and Religion in the Middle Ages*. University of Chicago Press, 1988.

[12] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[13] LUCHESA, Claudio José; MANTOVAN, Edson A.; MACHADO, Cristiane Ribas. *Sistema Price de amortização: juros simples?. Revista de Informação Legislativa*, Brasília, v. 49, n. 195, p. 97–110, jul./set. 2012.

[14] MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática financeira*. São Paulo: Atlas, 2008.

[15] SAMANEZ, Carlos Patrício. *Matemática Financeira*. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

[16] SOUZA, Thales Kroth de. *Finança Renascentista: Inovações Financeiras da Família Médici e a Gênese do Setor Bancário Moderno*. Zenodo, 2025.

[17] ZANINI, J. *Operações de Crédito Liberação*. Disponível em: https://m2msaber.com.br/blog/operacoes-de-credito-liberacao. Acesso em: 03 maio 2026.