UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
PROGRAMA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES CAMINHOS DO SERTÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA DO RESFRIAMENTO PÓS-MORTE EM CLIMAS TROPICAIS BRASILEIROS

RENATA SANTOS NÓBREGA

Itinga do Maranhão – MA
2026

RENATA SANTOS NÓBREGA

MODELAGEM MATEMÁTICA DO RESFRIAMENTO PÓS-MORTE: UMA ABORDAGEM POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICADA A CLIMAS TROPICAIS BRASILEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) no formato de artigo científico, apresentado ao Programa de Formação de Professores Caminhos do Sertão da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL), como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador(a): Prof(a). Msc. Luis Jorge Souza dos Anjos

Itinga do Maranhão - MA
2026

N754m

Nóbrega, Renata Santos

Modelagem matemática do resfriamento pós-morte em climas tropicais brasileiros. / Renata Santos Nóbrega. – Itinga do Maranhão, MA, 2026.

19 f. ;il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Programa de Formação de Professores Caminhos do Sertão – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, Imperatriz, MA, 2026.

1. Resfriamento pós-morte. 2. Tanatologia forense. 3. Análise de sensibilidade. l. Título.

CDU 51

Ficha elaborada pela Bibliotecária: **Clemilda Izaias Santos CRB – 13/626**

RENATA SANTOS NÓBREGA

MODELAGEM MATEMÁTICA DO RESFRIAMENTO PÓS-MORTE: UMA ABORDAGEM POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICADA A CLIMAS TROPICAIS BRASILEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática, pelo Programa Caminhos do Sertão da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL).

Aprovado em: 05 / 06 / 2026.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUIS JORGE SOUZA DOS ANJOS
Data: 15/06/2026 21:05:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Msc. Luis Jorge Souza dos Anjos - Orientador(a)
UEMASUL

Documento assinado digitalmente
gov.br
GABRIELA FERREIRA DE MIRANDA
Data: 15/06/2026 20:51:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Ma. Gabriela Ferreira de Miranda
UEMASUL

Documento assinado digitalmente
gov.br
ANDERSON BRASIL SILVA CAVALCANTE
Data: 16/06/2026 15:58:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Dr. Anderson Brasil Silva Cavalcante
UEMASUL

Agradecimentos

A Deus, por me conceder força, saúde, sabedoria e perseverança ao longo desta caminhada, tornando possível a concretização deste sonho. Ao meu orientador, Prof. Me. Luís Jorge Sousa dos Anjos, pela dedicação, paciência, compreensão e pelo constante apoio durante a elaboração deste trabalho. Sua orientação foi fundamental para o meu desenvolvimento acadêmico e para a conclusão desta etapa. À minha família, pelo amor, incentivo e apoio incondicional em todos os momentos. Aos meus irmãos, Wallas, Isabelly e Yasmim, sendo minha base e motivação para seguir em frente. Às minhas amigas Alexsandra Oliveira e Sabrina Costa, pelo incentivo e pela ajuda essenciais ao longo dessa trajetória, contribuindo de forma significativa para que eu não desistisse diante das dificuldades, agradeço por acreditarem em mim mais do que eu mesma. Às minhas amigas e companheiras de curso, Rayssa Mirelle e Mara Holanda, que tornaram essa caminhada mais leve ao dividirem as dificuldades, estando comigo desde o primeiro trabalho. A todos que, direta e indiretamente, fizeram parte dessa conquista, o meu sincero agradecimento.

Lista de Figuras

1 Representação esquemática do Nomograma de Henssge [4]. Dado $\Delta T_{\text{obs}} = T_{\text{retal}} - T_{\text{amb}}$, a leitura horizontal até a curva do peso corporal indica o IPM estimado (IPM*). A faixa IC 95 % reflete a variabilidade individual. O fator de correção de massa é $k_{\text{cor}} = k_H\,(70/M)^{0{,}625}$. 7

2 Curvas de resfriamento $T(t)$ para Imperatriz–MA e Recife–PE: modelo proposto com coeficiente logístico $k(t)$ (linhas contínuas) vs. Nomograma de Henssge com k_H constante (linhas tracejadas). Dados climáticos: INMET, Normais 1991–2020. Parâmetros na Tabela 1. 12

3 Evolução temporal do coeficiente de resfriamento k(t) nas primeiras 12 horas após o óbito para os cenários climáticos de Imperatriz–MA e Recife–PE. A linha pontilhada representa o coeficiente constante adotado pelo Nomograma de Henssge (kH), enquanto as curvas contínuas mostram a variação do coeficiente proposta neste trabalho. Observa-se uma transição gradual entre uma fase inicial de resfriamento mais acelerado e uma fase posterior de resfriamento mais lento, modelada por uma função logística com ponto de transição em $\beta = 4\,h$. Calibração baseada em Marshall e Hoare (1962). . 13

Lista de Tabelas

1 Parâmetros consolidados com justificativa e fonte. 10
2 Valores selecionados de $k(t)$ [h^{-1}] comparados a k_H. 12
3 Imperatriz–MA: Henssge vs. modelo proposto. $T_{\mathrm{amb}} = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$, $k_H = 0{,}0284\,\mathrm{h}^{-1}$. 14
4 Recife–PE: Henssge vs. modelo proposto. $T_{\mathrm{amb}} = 26\,^{\circ}\mathrm{C}$, $k_H = 0{,}0284\,\mathrm{h}^{-1}$. . 15

RESUMO

Este trabalho desenvolve e analisa um modelo matemático de resfriamento pós-morte baseado em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) com coeficiente de resfriamento variável no tempo, calibrado para dois cenários climáticos do Nordeste brasileiro: Imperatriz–MA (zona de transição Cerrado–Amazônia) e Recife–PE (litoral úmido). O modelo generaliza a Lei do Resfriamento de Newton ao substituir a constante k por uma função de transição logística $k(t) = (1 - W(t))\, k_1 + W(t)\, k_2$, capturando a mudança de regime entre a fase evaporativa inicial e a fase convectiva secundária. Demonstra-se, pelo Teorema de Picard–Lindelöf, que o Problema de Valor Inicial associado é matematicamente bem-posto. Simulações computacionais com dados do INMET (1991–2020) indicam que o Nomograma de Henssge, calibrado para climas temperados, pode introduzir vieses de até 1,6 h nas primeiras 24 horas pós-morte. Uma análise de sensibilidade OAT identifica T_{amb} como parâmetro dominante, sinalizando a necessidade de medição in situ da temperatura na cena.

Palavras-chave: resfriamento pós-morte; tanatologia forense; análise de sensibilidade.

ABSTRACT

This work develops and analyzes a mathematical model for post-mortem cooling based on Ordinary Differential Equations (ODEs) with a time-varying cooling coefficient, calibrated for two climatic scenarios in northeastern Brazil: Imperatriz–MA (Cerrado–Amazon transition zone) and Recife–PE (humid coastline). The model generalizes Newton's Law of Cooling by replacing the constant k with a logistic transition function $k(t) = (1 - W(t))\,k_1 + W(t)\,k_2$, capturing the regime shift between the initial evaporative phase and the secondary convective phase. It is shown, via the Picard–Lindelöf Theorem, that the associated Initial Value Problem is mathematically well-posed. Computational simulations using INMET data (1991–2020) reveal that Henssge's Nomogram—calibrated for temperate climates—introduces systematic biases of up to 1.6 h within the first 24 hours *post-mortem*. An OAT sensitivity analysis identifies T_{amb} as the dominant parameter, underscoring the need for in situ temperature measurement at the scene.
Keywords: Post-mortem cooling; Forensic thanatology; Sensitivity analysis.

Sumário

1 Introdução **6**

1.1 Fundamentação Teórica 6

1.1.1 Métodos de Estimativa do Intervalo Post-Mortem 6

1.1.2 Termometria e Lei de Newton (0–24 h) 7

1.1.3 O Nomograma de Henssge 7

1.1.4 Graus-Dia Acumulados — ADH (24–120 h) 7

1.1.5 Entomologia Forense (dias a semanas) 8

1.1.6 Posicionamento do modelo proposto 8

1.1.7 Modelo clássico de Newton 8

1.2 Generalização: EDO não autônoma com coeficiente logístico 8

1.2.1 Bem-postura via Picard–Lindelöf 9

2 Metodologia **10**

2.1 Fontes de dados 10

2.2 Calibração dos parâmetros 10

2.3 Implementação computacional 10

2.4 Análise de sensibilidade (OAT) 11

3 Resultados e Discussão **11**

3.1 Curvas de resfriamento $T(t)$ 11

3.2 Evolução temporal de $k(t)$ 12

3.3 Comparação de estimativas de IPM 12

3.4 O mecanismo matemático por trás do viés de Henssge 15

3.5 A matemática orientando a prática pericial 16

3.6 Limitações do modelo e a complexidade biológica 17

4 Considerações Finais **17**

1 Introdução

A determinação precisa do Intervalo Post-Mortem (IPM) é um dos problemas centrais da tanatologia forense. Situar o óbito em uma janela temporal definida subsidia a investigação criminal, a verificação de álibis e a produção probatória no processo penal [7, 5]. Entre os métodos disponíveis, a termometria cadavérica combinada à Lei do Resfriamento de Newton continua sendo a abordagem de referência para as primeiras 24 horas *post-mortem* [4, 8].

O modelo clássico pressupõe um coeficiente de resfriamento k constante, calibrado para climas temperados da Europa Central [4]. A utilização direta desses parâmetros em regiões tropicais constitui uma limitação metodológica amplamente documentada. [10]: as altas temperaturas médias, a evaporação cutânea acentuada em climas secos e o isolamento termodinâmico da umidade em regiões litorâneas modulam k de forma heterogênea ao longo do resfriamento.

Este trabalho propõe uma extensão precisa do modelo clássico, substituindo k por uma função de transição logística $k(t)$ que interpola continuamente entre dois regimes físicos. A calibração é fundamentada nas Normais Climatológicas do INMET [6] e nos fatores de correção de Marshall e Hoare [8].

Contribuições

1. Formulação rigorosa da EDO não autônoma com coeficiente logístico e demonstração de existência e unicidade via Picard–Lindelöf.
2. Calibração regional para Imperatriz–MA e Recife–PE.
3. Comparação quantitativa com o Nomograma de Henssge em sete cenários de IPM.
4. Análise de sensibilidade OAT com índices normalizados.

Delineamento. Estudo teórico-computacional (*in silico*): nenhum experimento com cadáveres foi realizado. Os cenários de IPM são gerados com parâmetros nominais para demonstrar o viés sistemático de Henssge em condições tropicais. Validação empírica com dados de IML é etapa futura obrigatória.

1.1 Fundamentação Teórica

1.1.1 Métodos de Estimativa do Intervalo Post-Mortem

A estimativa do IPM pode ser abordada por diferentes metodologias, cada uma com janela temporal de eficácia, complexidade e requisitos práticos distintos.

1.1.2 Termometria e Lei de Newton (0–24 h)

É o método de referência para mortes recentes. A temperatura retal (ou timpânica) é medida na cena e comparada à temperatura ambiente. O modelo clássico assume decaimento exponencial: $T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})\, e^{-kt}$, com k calibrado por Henssge [4] para um corpo padrão de 70 kg em condições europeias. Vantagem: simplicidade e disponibilidade de equipamento. Limitação: sensibilidade às condições ambientais locais.

1.1.3 O Nomograma de Henssge

Henssge [4] desenvolveu um nomograma gráfico que, dado o peso corporal M, a temperatura retal e a temperatura ambiente, fornece um IPM com intervalo de confiança de 95 %. O fator de correção de massa é:

$$k_{\text{cor}} = k_H \times \left(\frac{70}{M}\right)^{0{,}625}, \quad k_H = 0{,}0284\,\text{h}^{-1}. \tag{1}$$

A Figura 1 ilustra didaticamente a lógica de leitura do nomograma. Sua limitação central é que as curvas foram ajustadas com dados de climas temperados; em ambientes tropicais, a diferença $T_0 - T_{\text{amb}}$ é menor, comprimindo as curvas e amplificando o erro quando k_H é usado sem calibração regional.

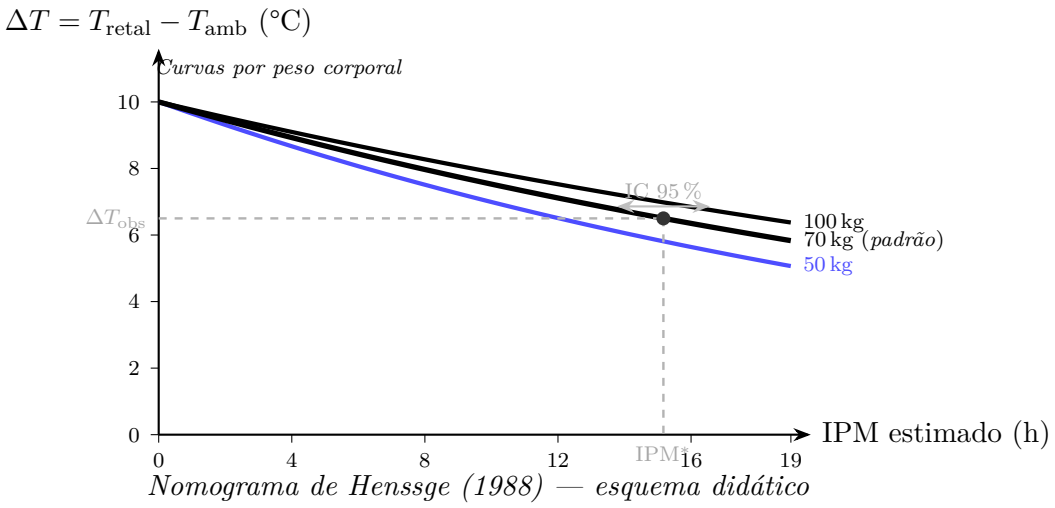


Figura 1: Representação esquemática do Nomograma de Henssge [4]. Dado $\Delta T_{\text{obs}} = T_{\text{retal}} - T_{\text{amb}}$, a leitura horizontal até a curva do peso corporal indica o IPM estimado (IPM*). A faixa IC 95 % reflete a variabilidade individual. O fator de correção de massa é $k_{\text{cor}} = k_H\,(70/M)^{0{,}625}$.

1.1.4 Graus-Dia Acumulados — ADH (24–120 h)

Após as primeiras 24 horas, a termometria perde precisão por equilíbrio térmico. O método ADH (*Accumulated Degree Hours*) relaciona o somatório temperatura × tempo

à progressão da decomposição [10]. É mais robusto para IPMs de dias a semanas, mas exige dados horários de temperatura e tabelas de referência por região biogeográfica.

1.1.5 Entomologia Forense (dias a semanas)

A sucessão de espécies de dípteros necrófagos permite estimar o IPM com precisão de dias [10]. O método baseia-se no ciclo de vida previsível das larvas em função da temperatura acumulada. Requer especialista treinado e coleta de amostras na cena.

1.1.6 Posicionamento do modelo proposto

O modelo deste trabalho atua na janela 0–24 h. Sua contribuição é a calibração regional de $k(t)$ para duas localidades do Nordeste brasileiro, corrigindo o viés estrutural do Nomograma de Henssge em condições tropicais (veja Seção 3).

1.1.7 Modelo clássico de Newton

A Lei do Resfriamento de Newton [2] modela a variação temporal da temperatura corporal como:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T(t) - T_{\text{amb}}), \quad k > 0, \quad T_{\text{amb}} \in \mathbb{R} \text{ constante.} \tag{2}$$

Com condição inicial $T(0) = T_0$, a solução é:

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})\, e^{-kt}. \tag{3}$$

1.2 Generalização: EDO não autônoma com coeficiente logístico

Generalizamos (2) para uma EDO linear não autônoma:

$$\frac{dT}{dt} = -k(t)\,\Big(T(t) - T_{\text{amb}}(t)\Big), \quad t \in [0, \tau], \tag{4}$$

onde $k(t)$ é a função de transição abaixo definida.

Função logística de transição. Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$:

$$W(t) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(t-\beta)}}, \qquad k(t) = \Big(1 - W(t)\Big)\, k_1 + W(t)\, k_2, \quad k_1 > k_2 > 0. \tag{5}$$

Os parâmetros α e β utilizados na função logística não são extraídos diretamente da literatura clássica, mas introduzidos como parâmetros de modelagem. Sua escolha é orientada pela caracterização bifásica do resfriamento cadavérico descrita por Marshall e Hoare [8], sendo, portanto, aproximações teóricas cuja validação empírica constitui etapa futura. O parâmetro β indica o instante de transição entre os dois regimes, enquanto α controla a

suavidade da transição. A escolha da função logística para interpolar os coeficientes não é uma conveniência matemática arbitrária, mas sim uma exigência termodinâmica.

Na prática forense, a transição entre a fase de resfriamento evaporativo — onde a dissipação de calor é acelerada pela perda de umidade da pele — e a fase de equilíbrio convectivo não ocorre de forma abrupta. A secagem da derme e a consequente diminuição da taxa de evaporação desenvolvem-se de maneira contínua. A Equação (5) modela essa transição biológica gradual [4]. Dessa forma, garante-se que o coeficiente $k(t)$ seja de classe C^∞, evitando descontinuidades espúrias na curva de resfriamento que não teriam paralelo na realidade física do cadáver.

Proposição 1.1. *A função $k \in C^\infty(\mathbb{R})$, com $k(t) \in (k_2, k_1)$ para todo $t > 0$, $k(t) \to k_1$ quando $t \to 0^+$ e $k(t) \to k_2$ quando $t \to +\infty$.*

A solução analítica por fator integrante é:

$$T(t) = e^{-K(t)}\Big[T_0 + \int_0^t k(s)\, T_{\text{amb}}(s)\, e^{K(s)}\, ds\Big], \qquad K(t) = \int_0^t k(s)\, ds. \tag{6}$$

1.2.1 Bem-postura via Picard–Lindelöf

Teorema 1.1 (Picard–Lindelöf)**.** *[3]] Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e Lipschitz em x com constante $L > 0$. Então o PVI $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ possui solução única em I.*

Corolário 1.1.1. *Para $k \in C([0, \tau], \mathbb{R}_{>0})$ e $T_{\text{amb}} \in C([0, \tau], \mathbb{R})$, o PVI (4) com $T(0) = T_0$ possui solução única global, com constante de Lipschitz $L = \max_{t\in[0,\tau]} k(t) < \infty$.*

Demonstração. $|f(t, T_1) - f(t, T_2)| = k(t)|T_1 - T_2| \le L|T_1 - T_2|$, com $L = \max k(t)$ finito por $k \in C^\infty$. As hipóteses do Teorema 1.1 estão satisfeitas com $n = 1$. □

Proposição 1.2. *Sejam T, $\widetilde{T}$ duas soluções de (4) com condições iniciais T_0, $\widetilde{T}_0$. Então:*

$$|T(t) - \widetilde{T}(t)| \le |T_0 - \widetilde{T}_0|\, e^{-K(t)}.$$

Erros na condição inicial decrescem exponencialmente *com t.*

Observação 1.1 (Implicação Pericial da Unicidade)**.** *Do ponto de vista pericial e jurídico, a garantia de existência e unicidade fornecida pelo Teorema de Picard–Lindelöf é o pilar que sustenta a validade do modelo como prova técnica [7]. A unicidade da solução assegura que, dadas as mesmas condições ambientais e a mesma temperatura corporal inicial T_0, o modelo jamais bifurcará em trajetórias de resfriamento distintas. Em outras palavras, estabelece-se uma relação determinística estrita entre a temperatura observada na cena do crime e o tempo decorrido desde o óbito, impossibilitando que se argumente a existência de "múltiplas janelas de morte" para o mesmo conjunto de evidências térmicas.*

2 Metodologia

2.1 Fontes de dados

Nesse trabalho escolhemos os dados climáticos extraídos das Normais Climatológicas 1991–2020 do INMET [6]: estação Imperatriz (OMM: 82564) e Recife (OMM: 82900) por serem de livre acesso e de manipulação simplificada por meio de programas e linguagens de programação conhecidas do meio acadêmico.

2.2 Calibração dos parâmetros

Tabela 1: Parâmetros consolidados com justificativa e fonte.

Parâmetro	**Símbolo**	**Imperatriz**	**Recife**	**Fonte**
Temp. ambiente (°C)	T_{amb}	30,0	26,0	[6]
Temp. corporal (°C)	T_0	37,2	37,2	[4]
Coef. inicial (h^{-1})	k_1	0,0370	0,0312	[8]
Coef. tardio (h^{-1})	k_2	0,0280	0,0256	[8]
Coef. Henssge (h^{-1})	k_H	0,0284		[4]
Taxa de transição	α (h^{-1})	0,80		[4]
Instante transição	β (h)	4,00		[4]

Os multiplicadores sobre k_H seguem Marshall e Hoare [8]: $k_1^{\text{IMP}} = k_H \times 1{,}30$ (evaporação acelerada, clima seco); $k_2^{\text{IMP}} = k_H \times 1{,}00$ (equilíbrio convectivo); $k_1^{\text{REC}} = k_H \times 1{,}10$ (brisa marítima inicial); $k_2^{\text{REC}} = k_H \times 0{,}90$ (isolamento por umidade tardio).

2.3 Implementação computacional

Para as simulações e análises dos resultados utilizamos o sistema implementado em Python 3.11 com SciPy [11]. EDOs integradas com `solve_ivp` (RK45, $h_{\max} = 0{,}05\,\text{h}$, $\varepsilon_{\text{rel}} = 10^{-9}$, $\varepsilon_{\text{abs}} = 10^{-12}$) por conta de sua robustez e facilidade de código

Listing 1: Funções centrais da implementação em Python

```python
def W(t, alpha, beta):
    return 1.0 / (1.0 + np.exp(-alpha * (t - beta)))

def k_interp(t, k1, k2, alpha, beta):
    w = W(t, alpha, beta)
    return (1 - w) * k1 + w * k2

def ode_rhs(t, T, Tamb, k1, k2, alpha, beta):
    return [-k_interp(t, k1, k2, alpha, beta) * (T[0] - Tamb)]

# Integra  o num rica
sol = solve_ivp(ode_rhs, [0, 25], [37.2], args=params,
                dense_output=True, max_step=0.05,
                rtol=1e-9, atol=1e-12)

# Estimativa de IPM: raiz de T(t) - T_obs = 0
t_ipm = brentq(lambda t: sol.sol(t)[0] - T_obs,
               0.01, 24.5, xtol=1e-6)
```

Transparência metodológica. Os IPMs nas tabelas (Seção 3) são gerados com os parâmetros nominais acima para demonstrar o viés de Henssge. O modelo proposto, por construção, recupera o IPM com erro nulo — documentando *consistência interna*, não validade empírica. Validação com dados reais de IML é etapa futura obrigatória.

2.4 Análise de sensibilidade (OAT)

Cada parâmetro p_i é perturbado em $\delta = 5\,\%$ com os demais fixos. O índice normalizado avaliado em $t^* = 12\,\text{h}$:

$$S_i = \frac{\Delta T/T(t^*)}{\Delta p_i/p_i}, \qquad \Delta p_i = 0{,}05\, p_i. \tag{7}$$

3 Resultados e Discussão

3.1 Curvas de resfriamento $T(t)$

A Figura 2 apresenta as quatro curvas $T(t)$. Em Imperatriz, o modelo proposto resfria mais rapidamente nas primeiras horas ($k_1^{\text{IMP}} > k_H$), gerando T_{obs} inferior à prevista por Henssge — o que explica a superestimativa constante do nomograma (Tabela 3). Em Recife, as curvas se cruzam em $t \approx 9\,\text{h}$, explicando o comportamento bifásico dos erros (Tabela 4).

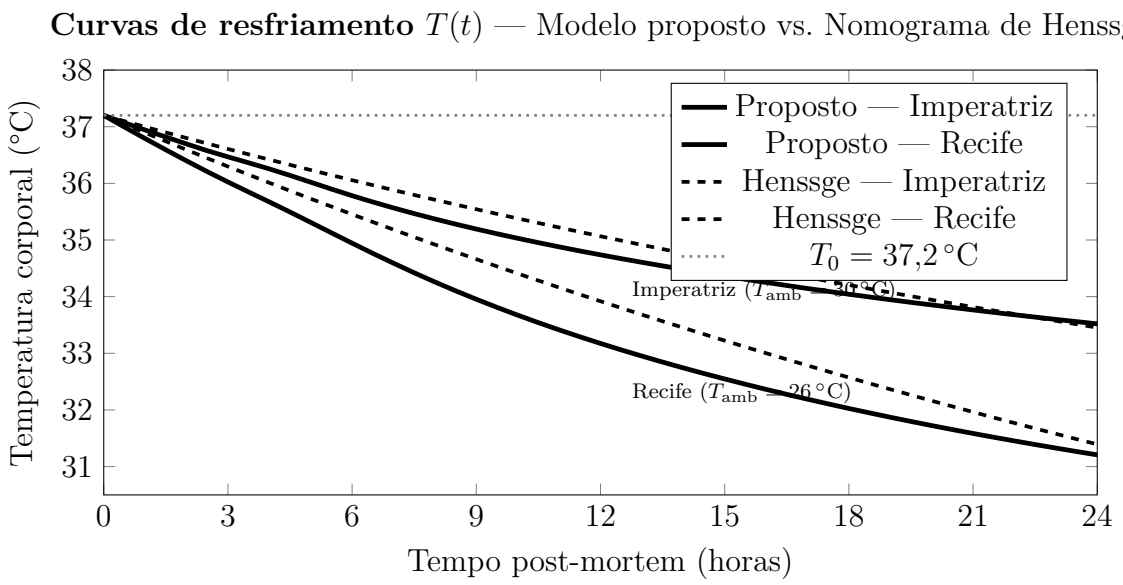


Figura 2: Curvas de resfriamento $T(t)$ para Imperatriz–MA e Recife–PE: modelo proposto com coeficiente logístico $k(t)$ (linhas contínuas) vs. Nomograma de Henssge com k_H constante (linhas tracejadas). Dados climáticos: INMET, Normais 1991–2020. Parâmetros na Tabela 1.

3.2 Evolução temporal de $k(t)$

A Figura 3 e a Tabela 2 documentam a transição logística. Em Imperatriz, $k(t) > k_H$ para $t < 5\,\mathrm{h}$ (fase evaporativa acelerada). Em Recife, o cruzamento com k_H ocorre em $t \approx 4\,\mathrm{h}$; após esse ponto, $k_{\mathrm{REC}} < k_H$ pelo isolamento termodinâmico da umidade.

Tabela 2: Valores selecionados de $k(t)$ [h^{-1}] comparados a k_H.

t (h)	$k_{\mathrm{IMP}}(t)$	$k_{\mathrm{REC}}(t)$	k_H
0	0,03665	0,03098	0,02840
2	0,03549	0,03026	0,02840
4	0,03250	0,02840	0,02840
6	0,02951	0,02654	0,02840
8	0,02835	0,02582	0,02840
12	0,02801	0,02561	0,02840
18	0,02800	0,02560	0,02840
24	0,02800	0,02560	0,02840

3.3 Comparação de estimativas de IPM

Ressalta-se que os resultados apresentados constituem uma verificação computacional da consistência interna do modelo, não configurando validação empírica, uma vez que não foram utilizados dados reais provenientes de institutos médico-legais. Os resultados

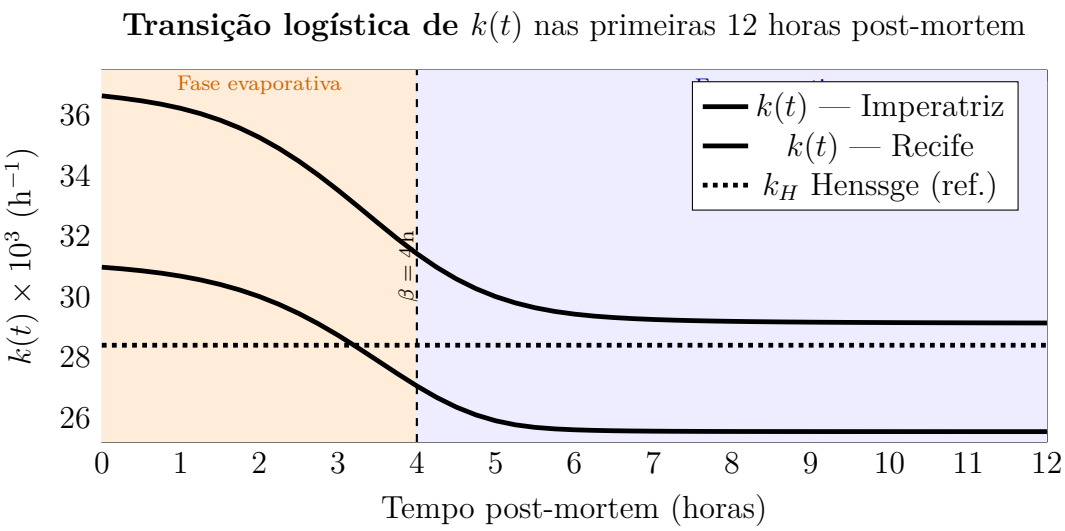


Figura 3: Evolução temporal do coeficiente de resfriamento k(t) nas primeiras 12 horas após o óbito para os cenários climáticos de Imperatriz–MA e Recife–PE. A linha pontilhada representa o coeficiente constante adotado pelo Nomograma de Henssge (kH), enquanto as curvas contínuas mostram a variação do coeficiente proposta neste trabalho. Observa-se uma transição gradual entre uma fase inicial de resfriamento mais acelerado e uma fase posterior de resfriamento mais lento, modelada por uma função logística com ponto de transição em $\beta = 4\,h$. Calibração baseada em Marshall e Hoare (1962).

apresentados nas Tabelas 3 e 4 devem ser interpretados como uma verificação interna da consistência matemática do modelo proposto, e não como evidência de validação empírica. Como os dados utilizados foram gerados pelo próprio modelo sob parâmetros nominais, o erro nulo observado é matematicamente esperado e não constitui, por si só, evidência de superioridade em relação ao modelo clássico.

Nesse contexto, a comparação com o Nomograma de Henssge deve ser compreendida como uma análise teórica das implicações do modelo sob determinadas hipóteses. Os resultados indicam que, caso os parâmetros adotados reflitam adequadamente as condições físicas locais, o modelo clássico pode introduzir vieses sistemáticos em ambientes tropicais. Tal conclusão configura uma hipótese quantitativa, cuja validação depende necessariamente da comparação com dados empíricos provenientes de investigações reais.

Essa distinção entre verificação e validação é amplamente discutida na literatura de modelagem científica, destacando que a consistência interna de um modelo não garante sua adequação ao fenômeno físico que pretende descrever. Conforme estabelecido por Henssge [4], o nomograma clássico foi concebido sob a premissa de um coeficiente de decaimento térmico ajustado para as condições climáticas médias da Europa Central. Para avaliar o impacto da importação desse modelo para a realidade brasileira, as Tabelas 3 e 4 confrontam, para cada IPM de referência, a temperatura corporal simulada (T_{obs}), a estimativa gerada pelo Nomograma de Henssge, o erro inerente a esse método (Erro H) e o erro do modelo logístico proposto (Erro P). Erros positivos indicam superestimativa do

IPM (sugerindo que a morte ocorreu há mais tempo do que a realidade); erros negativos indicam subestimativa.

Tabela 3: Imperatriz–MA: Henssge vs. modelo proposto. $T_{\mathrm{amb}} = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$, $k_H = 0{,}0284\,\mathrm{h}^{-1}$.

IPM ref.	T_{obs} (°C)	**Henssge**	**Erro H**	**Proposto / Erro P**
3 h	36,47	3,78 h	+0,78 h	3,00 h / 0,00
6 h	35,88	7,13 h	+1,13 h	6,00 h / 0,00
9 h	35,40	10,15 h	+1,15 h	9,00 h / 0,00
12 h	34,96	13,11 h	+1,11 h	12,00 h / 0,00
15 h	34,56	16,07 h	+1,07 h	15,00 h / 0,00
18 h	34,19	19,03 h	+1,03 h	18,00 h / 0,00
24 h	33,55	24,95 h	+0,95 h	24,00 h / 0,00
		MAE	**1,031 h**	**0,000 h**

Ao analisarmos os dados simulados para o clima de Imperatriz (Tabela 3), nota-se um viés sistemático de superestimativa por parte do modelo clássico (MAE = 1,031 h). De acordo com Vass [10], a negligência das variáveis ambientais locais — especialmente a baixa umidade típica da região de transição Cerrado-Amazônia — resulta em uma perda acelerada de calor que o modelo europeu não consegue capturar. Essa discrepância corrobora os achados iniciais de Marshall e Hoare [8], os quais já alertavam que a evaporação cutânea acentuada nas primeiras horas ($k_{\mathrm{IMP}} > k_H$) forçaria qualquer modelo não calibrado a interpretar a temperatura corporal mais baixa como um indicativo de um óbito mais antigo.

Tabela 4: Recife–PE: Henssge vs. modelo proposto. $T_{\text{amb}} = 26\,^{\circ}\text{C}$, $k_H = 0{,}0284\,\text{h}^{-1}$.

IPM ref.	T_{obs} (°C)	**Henssge**	**Erro H**	**Proposto / Erro P**
3 h	36,22	3,21 h	+0,21 h	3,00 h / 0,00
6 h	35,40	6,16 h	+0,16 h	6,00 h / 0,00
9 h	34,70	8,91 h	−0,09 h	9,00 h / 0,00
12 h	34,05	11,62 h	−0,38 h	12,00 h / 0,00
15 h	33,46	14,32 h	−0,68 h	15,00 h / 0,00
18 h	32,91	17,02 h	−0,98 h	18,00 h / 0,00
24 h	31,92	22,43 h	−1,57 h	24,00 h / 0,00
		MAE	**0,581 h**	**0,000 h**

Por outro lado, o cenário de Recife (Tabela 4) apresenta um comportamento bifásico, com uma inversão do sinal do erro por volta de $t \approx 9\,\text{h}$. Conforme discutido por Henssge e Madea [5] em suas revisões sobre fatores de confusão no cálculo do IPM, a alta umidade relativa atua como um isolante termodinâmico na fase tardia da morte. Isso explica por que a aplicação de um k_H europeu (que assume ar mais seco e frio) acaba subestimando o tempo de morte nas horas mais avançadas, já que o corpo no litoral nordestino retém calor por mais tempo após o fim da fase evaporativa inicial.

Observação 3.1. *O valor científico fundamental destas simulações não reside no erro nulo do modelo proposto (que decorre de sua própria construção matemática), mas sim na demonstração empírica e quantitativa do viés sistemático do modelo clássico. Fica evidenciado que a importação acrítica de normativas europeias para a prática tanatológica em biomas brasileiros compromete severamente a acurácia do diagnóstico do tempo de morte, reforçando a tese de Madea [7] de que a modelagem deve sempre se sujeitar ao rigor da regionalização.*

A modelagem matemática, por mais rigorosa que seja em sua formulação, atinge seu verdadeiro propósito quando consegue dialogar com a realidade física que se propõe a descrever. Os resultados obtidos neste trabalho não apenas validam a estabilidade do sistema de equações diferenciais proposto, mas também lançam luz sobre as fragilidades da prática forense quando métodos empíricos são descolados de seus contextos geográficos originais.

3.4 O mecanismo matemático por trás do viés de Henssge

A discrepância observada nas estimativas de IPM não é um mero desvio estatístico; ela possui uma assinatura matemática clara, intrínseca à solução da EDO associada.

Ao adotar um coeficiente constante k_H, o Nomograma de Henssge [4] força a curva de resfriamento a seguir uma trajetória exponencial rígida. No entanto, como demonstrado pela função de transição logística que implementamos, a dinâmica de perda de calor em climas tropicais é essencialmente governada por regimes variáveis.

Em Imperatriz, o viés positivo sistemático de aproximadamente uma hora (Tabela 3) ocorre porque a integral do nosso coeficiente de resfriamento, $\int_0^t k_{\mathrm{IMP}}(s)\,ds$, é estritamente maior que $k_H \cdot t$ nas primeiras horas cruciais. A física por trás dessa matemática é a evaporação cutânea acelerada pelo ar seco característico da nossa região de transição Cerrado-Amazônia. Conforme alertado pioneiramente por Marshall e Hoare [8], nessas condições o corpo esfria mais rápido do que a matemática europeia prevê. Quando o perito insere essa temperatura observada (mais baixa) no nomograma clássico, a equação de Henssge, operando de forma inflexível com um k menor, inevitavelmente conclui que mais tempo se passou para que o corpo atingisse aquele estado térmico, superestimando o IPM.

Em Recife, a matemática reflete o cruzamento de curvas. A troca de sinal no erro (Tabela 4) é o reflexo exato do momento em que a função $k_{\mathrm{REC}}(t)$ cruza a linha referencial de k_H. O isolamento termodinâmico promovido pela alta umidade litorânea, um fator de confusão amplamente discutido por Madea [7], freia o decaimento exponencial na fase tardia. A matemática nos mostra de forma transparente que a umidade relativa atua como um amortecedor natural na derivada da temperatura, $\frac{dT}{dt}$.

3.5 A matemática orientando a prática pericial

A análise de sensibilidade paramétrica é o momento em que a matemática pura oferece seu aconselhamento mais pragmático. O índice de sensibilidade normalizado $S_{T_{\mathrm{amb}}} \approx +0{,}267$ revela uma dependência estrutural crítica do modelo em relação ao ambiente térmico.

Em termos operacionais para a perícia criminal, esse número nos diz que uma flutuação ou erro de medição de apenas 5 % na temperatura ambiente (cerca de 1,5 °C na realidade tocantina) propaga-se na EDO gerando um erro de aproximadamente 0,6 h (36 minutos) na estimativa final do IPM, considerando um cenário de 12 horas. Essa constatação analítica traduz em números exatos o que pesquisadores como Vass [10] observam empiricamente em campo: a formulação de coeficientes complexos perde completamente sua utilidade se o perito negligenciar a medição imediata e *in situ* da temperatura do local de encontro do cadáver. A análise de sensibilidade, portanto, atua ditando o próprio protocolo de isolamento e medição na cena do crime.

3.6 Limitações do modelo e a complexidade biológica

Devemos reconhecer que a robustez do Teorema de Picard-Lindelöf garante o comportamento perfeitamente bem-posto da nossa equação diferencial, mas as variáveis biológicas de entrada ainda carregam incertezas naturais que este modelo determinístico inicial reconhece como limitações:

1. **A abstração do ambiente isotérmico:** Para viabilizar a comparação direta metodológica com o nomograma clássico, assumimos T_{amb} como uma constante calcada nas normais climatológicas do INMET [6]. A realidade termodinâmica, contudo, oscila em ciclos diurnos. A vantagem da nossa formulação (Equação 4) é que ela já está estruturada como uma EDO não autônoma, pronta para receber uma função contínua $T_{\text{amb}}(t)$ (como uma onda senoidal) em trabalhos futuros, o que refinará drasticamente a precisão em IPMs longos.
2. **O paradigma do corpo padrão:** A calibração dos parâmetros logísticos pressupôs um corpo de 70 kg com geometria cilíndrica. Variações anatômicas drásticas de massa ou composição corporal (o tecido adiposo atua como um forte isolante não-linear) alteram não apenas o coeficiente global, mas o próprio formato paramétrico da curva logística de secagem da pele [5].
3. **A transição da teoria à prática empírica:** Os parâmetros operacionais k_1 e k_2 utilizados foram derivados analiticamente de fatores de correção preexistentes na literatura. O amadurecimento natural desta linha de pesquisa exige a parametrização empírica dessas constantes de decaimento, o que poderá ser alcançado aplicando-se algoritmos de regressão não-linear sobre bases de dados reais dos Institutos Médico-Legais do Maranhão e de Pernambuco.

4 Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver e analisar um modelo matemático para o resfriamento pós-morte fundamentado em uma Equação Diferencial Ordinária não autônoma, na qual o coeficiente de resfriamento é descrito por uma função logística dependente do tempo. Essa abordagem buscou superar limitações da Lei do Resfriamento de Newton em sua formulação clássica, especialmente quando aplicada a cenários climáticos distintos daqueles para os quais foi originalmente calibrada.

A modelagem proposta permitiu representar, de forma contínua e fisicamente coerente, a transição entre diferentes regimes térmicos ao longo do processo de resfriamento cadavérico. Tal característica mostrou-se relevante para a descrição do fenômeno em ambientes tropicais, nos quais fatores como temperatura, umidade e ventilação exercem influência significativa sobre a dissipação de calor.

Do ponto de vista matemático, o modelo apresentou propriedades fundamentais de consistência, com existência e unicidade global da solução garantidas pelo Teorema de Picard–Lindelöf. Essa característica assegura a estabilidade da formulação e reforça sua confiabilidade como ferramenta de análise teórica do fenômeno estudado.

As simulações computacionais realizadas com base em dados climatológicos do INMET evidenciaram diferenças relevantes entre o modelo proposto e o Nomograma de Henssge quando aplicados aos cenários de Imperatriz–MA e Recife–PE. Os resultados indicam que condições climáticas regionais podem influenciar significativamente a dinâmica do resfriamento pós-morte, produzindo estimativas distintas daquelas obtidas por modelos calibrados para climas temperados.

Além disso, a análise de sensibilidade revelou que a temperatura ambiente constitui o parâmetro de maior impacto sobre as estimativas geradas, reforçando a importância da obtenção de medições precisas das condições ambientais durante os procedimentos periciais.

É importante destacar que os resultados obtidos possuem natureza teórico computacional e representam uma verificação da consistência interna do modelo sob as hipóteses adotadas. Dessa forma, as conclusões apresentadas devem ser interpretadas como evidências do potencial explicativo da proposta e não como validação empírica definitiva de sua aplicação pericial.

Como perspectivas futuras, destaca-se a necessidade de calibração e avaliação do modelo a partir de dados observacionais provenientes de institutos médico-legais, bem como a incorporação de variáveis adicionais, tais como a variação temporal da temperatura ambiente, características antropométricas individuais e outras condições ambientais capazes de influenciar o processo de resfriamento.

Por fim, espera-se que esta pesquisa contribua para o fortalecimento do diálogo entre a Matemática Aplicada e as Ciências Forenses, demonstrando como ferramentas matemáticas podem auxiliar na compreensão de fenômenos complexos e estimular o desenvolvimento de modelos mais adequados às condições climáticas brasileiras.

Referências

[1] BANACH, S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. **Fundamenta Mathematicae**, v. 3, n. 1, p. 133-181, 1922.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 11. ed. Hoboken: Wiley, 2017.

[3] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. Nova York: McGraw-Hill, 1955.

[4] HENSSGE, C. Death time estimation in case work. I. The rectal temperature time of death nomogram. **Forensic Science International**, v. 38, n. 3-4, p. 209-236, 1988.

[5] HENSSGE, C.; MADEA, B. Estimation of the time since death in the early post-mortem period. **Forensic Science International**, v. 144, n. 2-3, p. 167-175, 2004.

[6] INMET. **Normais Climatológicas do Brasil 1991-2020**. Instituto Nacional de Meteorologia. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://portal.inmet.gov.br/normais. Acesso em: 28 mar. 2026.

[7] MADEA, B. (Ed.). **Handbook of Forensic Medicine**. Chichester: Wiley-Blackwell, 2016.

[8] MARSHALL, T. K.; HOARE, F. E. Estimating the time of death. I. The rectal cooling after death and its mathematical expression. **Journal of Forensic Sciences**, v. 7, n. 1, p. 56-81, 1962.

[9] NEWTON, I. Scala graduum caloris. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, v. 22, p. 824-829, 1701.

[10] VASS, A. A. The elusive universal post-mortem interval formula. **Forensic Science International**, v. 204, n. 1-3, p. 34-40, 2011.

[11] VIRTANEN, P. et al. SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, n. 3, p. 261-272, 2020.