UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS, NATURAIS E LETRAS - CAMPUS ESTREITO
CURSO DE CIÊNCIAS NATURAIS LICENCIATURA (MATEMÁTICA/FÍSICA)

TEORIA DOS NÚMEROS E PREPARAÇÃO DE ESTUDANTES PARA A OBMEP: ESTUDO DE CASO NO 3° ANO DO ENSINO MÉDIO EM ESTREITO - MA

AUTOR: **JOELTON DE MELO COUTINHO**
ORIENTADOR: PROF. DR. EDUARDO ANDRÉ DE FIGUEIREDO BRAGANÇA

ESTREITO - MA

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA REGIÃO TOCANTINA DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS, NATURAIS E LETRAS - CAMPUS ESTREITO
CURSO DE CIÊNCIAS NATURAIS LICENCIATURA (MATEMÁTICA/FÍSICA)

JOELTON DE MELO COUTINHO

TEORIA DOS NÚMEROS E PREPARAÇÃO DE ESTUDANTES PARA A OBMEP: ESTUDO DE CASO NO 3° ANO DO ENSINO MÉDIO EM ESTREITO - MA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte integrante dos requisitos para conclusão e obtenção do título de Licenciado em Ciências Naturais, com ênfase em Matemática pela Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo André de Figueiredo Bragança

ESTREITO - MA

2024

C871t

Coutinho, Joelton de Melo

Teoria dos números e preparação de estudantes para a OBMEP: estudo de caso no 3° ano do ensino médio em Estreito - MA. / Joelton de Melo Coutinho. – Estreito, MA, 2024.

56 f.; il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais com ênfase em Matemática) – Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão – UEMASUL, Estreito, MA, 2024.

1. Matemática – Teoria do Números. 2. OBMEP. 3. Ensino de Matemática. 4. Estreito-MA. I. Título.

CDU 511

Ficha elaborada pelo Bibliotecário: **Mateus de Araújo Souza CRB13/955**

FOLHA DE APROVAÇÃO

Joelton de Melo Coutinho

TEORIA DOS NÚMEROS E PREPARAÇÃO DE ESTUDANTES PARA A OBMEP: ESTUDO DE CASO NO 3° ANO DO ENSINO MÉDIO EM ESTREITO - MA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte integrante dos requisitos para a conclusão do Curso de Ciências Naturais - Licenciatura, com ênfase em Matemática pela Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão.

Aprovado em: 29/08/2024

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador
Prof. Dr. Eduardo André de Figueiredo Bragança - UEMASUL

____

Primeiro Membro
Prof. Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho - UEMASUL

____

Segundo Membro
Prof. Dr. Gutierrez Rodrigues de Morais - UEMASUL

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho de conclusão de curso representa não apenas o fim de uma importante etapa acadêmica, mas também o início de novos desafios e conquistas. Este percurso não teria sido possível sem o apoio e incentivo de muitas pessoas, às quais gostaria de expressar minha sincera gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me dar saúde, força e sabedoria para superar os obstáculos ao longo desta caminhada.

À minha esposa, Lauriene A. M. Coutinho, por ser meu alicerce, minha parceira e minha maior apoiadora. Obrigado por estar ao meu lado em cada passo deste caminho, pela compreensão, pelo carinho e por sempre acreditar em mim. Sem você, este sonho não teria se tornado realidade.

Aos meus pais, Nonato Portilho Coutinho e Maria Oneide de Melo Coutinho, pelo amor incondicional, apoio inabalável e por sempre acreditarem em mim. Vocês são a base de tudo que sou e tudo que conquisto.

Aos meus irmãos e familiares, que sempre me inspiraram e me incentivaram a seguir em frente, mesmo nas horas mais difíceis.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo André de Figueiredo Bragança, por sua paciência, dedicação e por compartilhar seu vasto conhecimento e experiência comigo. Suas orientações foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas de curso, que tornaram essa jornada mais leve e divertida. Em especial ao Pedrinho Santana, Thays Emanuella, Leandro Aguiar, Vagner Lacerda, Marcos Vinicius, Nágela Melo, Laciene Negreiros e Osiel Jeová que fazem parte da turma original 2020. Obrigado pelas discussões enriquecedoras, pelo apoio mútuo e pelos momentos inesquecíveis.

Aos professores Prof. Dr. Ismael Carlos Pereira de Carvalho, Prof. Dr. Gutierrez Rodrigues de Moura e Profa. Dra. Weilan Gomes da Paixão Melo gostaria de expressar minha profunda gratidão pelo apoio e orientação indispensáveis ao longo desses anos. Suas contribuições e sugestões foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo, e o conhecimento compartilhado por vocês enriqueceu imensamente a minha trajetória acadêmica. Muito obrigado por todo o tempo e dedicação. E a instituição Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL-CCANL), pelo espaço de aprendizado a nós oferecido.

Por fim, sou grato a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, direta ou indiretamente. Cada um de vocês tem um lugar especial nesta conquista.

Muito obrigado!

"O importante é entender profundamente as coisas e as relações entre elas. É nisso que reside a inteligência."

Laurent Schwartz

RESUMO

Neste trabalho, pretendemos investigar conteúdos relacionados a Teoria dos Números contribuem para preparar estudantes para a OBMEP (Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). Para isso, fizemos uma investigação de quais conteúdos são abordados com mais frequência em provas da OBMEP, em seguida, elaboramos um pequeno questionário e aplicamos à estudantes do ensino médio. De posse das respostas dos questionários, fizemos uma análise sobre como os estudantes entendem estes conteúdos e relacionamos com a preparação deles à OBMEP. Com isso, pretendemos investigar se a abordagem nas escolas dos conteúdos serve como preparação adequada dos estudantes para a OBMEP.

Palavras-chave: 1. Teoria dos Números, 2. OBMEP, 3. Ensino

ABSTRACT

In this work, we aim to investigate how topics related to Number Theory contribute to preparing students for the OBMEP (Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools). To achieve this, we conducted an investigation into which topics are most frequently covered in OBMEP exams, and then we developed a small questionnaire that we administered to high school students. Based on the questionnaire responses, we analyzed how students understand these topics and related it to their preparation for the OBMEP. With this, we intend to explore whether the way these topics are taught in schools serves as adequate preparation for students for the OBMEP.

Keywords: 1. Number Theory, 2. OBMEP, 3. teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, enquanto disciplina fundamental, desempenha um papel crucial na formação acadêmica e no desenvolvimento de habilidades críticas nos estudantes. Entre as diversas áreas dessa ciência, a Teoria dos Números se destaca por sua riqueza conceitual e suas aplicações práticas. Esta área da Matemática, que investiga as propriedades e relações dos números inteiros, é um dos pilares do conhecimento matemático e tem sido objeto de estudo desde a antiguidade. Filósofos e Matemáticos como Euclides e Fermat contribuíram significativamente no campo da Matemática, com conceitos que são fundamentais para a formação de um raciocínio lógico e analítico (SANTOS, 2020).

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) é um importante indicador da qualidade da educação no Brasil, considerando a taxa de aprovação e o desempenho dos alunos em avaliações externas. Em 2021, a média nacional do IDEB para o Ensino Médio foi de 3,9, enquanto no Maranhão os índices foram inferiores, com 3,5 e em Estreito-MA essa média se manteve para o Ensino Médio. Esses números revelam a necessidade urgente de melhorias, especialmente em Matemática, onde apenas 3,5% dos alunos do Ensino Médio alcançaram aprendizagem adequada. Portanto, a relação entre o IDEB e o ensino de Matemática destaca a importância de políticas públicas que priorizem a capacitação docente e a disponibilização de recursos adequados, visando elevar a proficiência nessa disciplina (NATURA, 2021).

Nos últimos anos, o ensino de Matemática no Brasil tem enfrentado desafios significativos, especialmente no que diz respeito à motivação e ao engajamento dos alunos. A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) emerge como uma iniciativa vital para reverter essa situação, promovendo a Matemática de uma forma que instigue o interesse e a curiosidade dos estudantes. A OBMEP não apenas oferece uma plataforma para que os alunos testem suas habilidades, mas também serve como um meio de identificar talentos que, de outra forma, poderiam passar despercebidos. Além disso, a competição fomenta um ambiente de aprendizado colaborativo e desafiador, onde os alunos são incentivados a explorar conceitos matemáticos de maneira mais profunda (OBMEP, 2024a).

Segundo (ARAÚJO, 2023), o impacto da OBMEP na formação matemática dos estudantes é evidente, não apenas pelo desenvolvimento de habilidades específicas, mas também pela promoção de um interesse duradouro na área.

A relevância da Teoria dos Números no contexto da OBMEP é indiscutível. Questões que envolvem números primos, divisibilidade e operações com números inteiros são abordadas de maneira frequente nas provas, refletindo a importância desses tópicos na formação matemática dos estudantes. Assim, a discussão sobre a Teoria dos Números e sua aplicação no ensino de Matemática se torna ainda mais pertinente, especialmente em um cenário educacional que busca continuamente melhorar a qualidade do ensino e a formação dos alunos. Este trabalho, portanto, não se limita a uma análise teórica, mas busca conectar a Matemática à realidade dos estudantes, promovendo uma educação mais significativa e contextualizada.

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira. No Primeiro capitulo, faremos uma breve introdução do que será abordado neste trabalho. No Segundo capítulo, será apresentada uma revisão teórica sobre a Teoria dos Números, incluindo conceitos básicos como números inteiros, números primos, máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC). Este capítulo também discutirá a importância histórica e pedagógica desses tópicos, preparando o terreno para sua aplicação no ensino.

No Terceiro capítulo, focaremos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), explorando seu histórico, objetivos e impacto no ensino de Matemática nas escolas. Serão analisados os tipos de questões que frequentemente aparecem nas provas e como elas se relacionam com a Teoria dos Números.

O Quarto capítulo apresentará a metodologia utilizada na pesquisa, detalhando o processo de aplicação do questionários. No Quinto capitulo, mostraremos a análise dos dados coletados e faremos algumas conclusões sobre elas. Por fim, no último capítulo faremos nossas considerações finais, além de sugestões para aprimorar o ensino de Matemática com foco na Teoria dos Números.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo investigar como o ensino de conteúdos relacionados à Teoria dos Números contribui para a preparação dos alunos para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), além de analisar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação a esses conceitos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Analisar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação aos conceitos da Teoria dos Números.

- Examinar quais conteúdos de Teoria dos Números são mais frequentemente abordados nas provas da OBMEP.

- Avaliar o desempenho dos estudantes em problemas relacionados aos conteúdos de Teoria dos Números, bem como investigar seu interesse na participação e preparação para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

2 TÓPICOS DA TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS

A Teoria dos Números é uma área fascinante da Matemática que lida com propriedades e relações dos números inteiros, investigando questões como a natureza dos números primos, a decomposição em fatores primos, as soluções de equações em inteiros e as relações de congruência. Seu objetivo é descobrir e provar verdades matemáticas sobre os números inteiros e desenvolver métodos para resolver probLemas que envolvam esses números. É uma das disciplinas mais antigas e veneráveis da Matemática, com raízes que remontam aos antigos babilônios e gregos e que continua a desempenhar um papel central tanto em questões teóricas quanto em aplicações práticas modernas.

Pioneiros como Euclides, que demonstrou a infinitude dos números primos, e Pierre de Fermat, conhecido por suas conjecturas e pelo famoso Último Teorema de Fermat, lançaram as bases para muitos estudos subsequentes. De acordo com (BENATTI; BENATTI, 2019) a humanidade sempre associou a quantidade há objetos, e isso surgiu naturalmente observando a natureza, surgindo assim os números naturais e inteiros e seus respectivos conjuntos entre outros.

> O conceito de número desempenha papel fundamental na civilização moderna, e as ciências mais avançadas são precisamente aquelas que mais empregam a linguagem dos números. Alias, a Matemática vem se tornando cada vez mais necessária em todos os ramos do conhecimento humano, desde a Física à Biologia, bem como nas ciências sociais (Economia, Finanças, etc.). Até mesmo na Psicologia tem sido utilizada com êxito. (FILHO, 1981).

Visto isso, veremos neste capítulo as definições e propriedades elementares da Teoria dos Números. Serão abordados conjunto dos números inteiros, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos e incluindo o conteúdo de progressões aritméticas (P.A) e Progressões Geométricas (P.G). Estes conteúdos foram escolhidos conforme pesquisa realizada com os alunos do terceiro ano do ensino médio. Alguns dos conceitos e definições utilizados neste capitulo, podem ser verificados nos livro (BENATTI; BENATTI, 2019) e (FILHO, 1981).

2.1 Os números inteiros

Os números inteiros constituem um dos conjuntos numéricos fundamentais na Matemática, eles englobam os números naturais, seus opostos negativos e o zero. Formalmente, os inteiros são representados pelo símbolo $\mathbb{Z}$, derivado do termo alemão "Zahlen", que significa números. O conjunto dos números inteiros pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \tag{2.1}$$

Em $\mathbb{Z}$ temos também outros subconjuntos que são o conjunto dos inteiros positivos, também chamado de inteiros positivos, o subconjunto dos inteiros não negativos, o subconjunto dos inteiros negativos e os não positivos, representados respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}*^{+} &= N = \{1,2,3,4,5,\ldots\}, & (2.2)\\
\mathbb{Z}^{+} &= N \cup 0 = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}, & (2.3)\\
\mathbb{Z}*^{-} &= \{-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\}, & (2.4)\\
\mathbb{Z}^{-} &= \{0,-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\}. & (2.5)
\end{aligned}$$

Os números inteiros são números completos e não fracionários, ou seja, não têm partes decimais ou fracionárias. Eles são adequados para contar objetos inteiros, como pessoas ou itens. Incluem tanto números positivos quanto negativos, o que os tornam úteis para representar situações que envolvem geralmente números decimais.

2.1.1 Operações com Números Inteiros

Ao operar neste conjunto numérico precisamos lidar com os números negativos e para isso precisamos dominar os jogos de sinais envolvidos nestas operações, então vamos ver alguns exemplos de operações neste conjunto para entender como lidar com as operações matemáticas.

2.1.2 Adição de Números Inteiros

A adição de números inteiros segue algumas regras simples: se ambos os números têm o mesmo sinal, você adiciona os valores absolutos e mantém o sinal comum. Se os números têm sinais diferentes, você subtrai o menor valor absoluto do maior valor absoluto e usa o sinal do número com maior valor absoluto.

Ela segue as propriedades:

- Comutativa: $a+b=b+a$, a adição de a e b é igual à adição de b e a;
- Associativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$, a adição de a e b, somada a c, é igual à adição de a somada à adição de b e c;
- Elemento Neutro: $a+0=a$, a adição de a e 0 é igual a a. Inverso Aditivo: a adição de a e o oposto de a é igual a 0;
- Inverso Aditivo: $a+(-a)=0$: O inverso aditivo de a é igual a a somado ao seu oposto, que resulta em zero.

Prova da Propriedade do Elemento Neutro: Para qualquer número inteiro

$$a+0=a. \tag{2.6}$$

Isso é verdade porque a adição de zero a qualquer número não altera o valor desse número.

2.1.3 Subtração de Números Inteiros

A subtração é a operação inversa da adição e segue as propriedades:

Aditivo Inverso: $a - a = 0$,

Complemento Aditivo: $a - b = a + (-b)$.

2.1.4 Multiplicação de Números Inteiros

A multiplicação envolve a soma repetida de um número por outro. Suas propriedades são:

- Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$,
- Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- Elemento Neutro: $a \cdot 1 = a$,
- Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Prova da Propriedade Distributiva: Para qualquer número inteiro a, b e c:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \tag{2.7}$$

Isso pode ser demonstrado expandindo a expressão do lado esquerdo e mostrando que ela é equivalente ao lado direito.

2.1.5 Divisão de Números Inteiros

A divisão é a operação inversa da multiplicação, porém, nem sempre é possível obter um número inteiro como resultado, dependendo dos números envolvidos. Para a divisão, temos duas propriedades importantes:

1. Divisão por Zero: A divisão por zero não é definida nos números inteiros.

2. Quociente e Resto: Para a e b inteiros, com $b \neq 0$, existem inteiros q e r tais que $a = b \cdot q + r$, onde r é o resto e $0 \leq r < |b|$.

2.2 Números Primos

Os números primos são números naturais maiores que 1 que possuem exatamente dois divisores: 1 e eles mesmos. Eles têm sido objeto de estudo e fascínio por matemáticos desde a antiguidade devido às suas propriedades únicas e à sua importância fundamental na Teoria dos Números e foram estudados pela primeira vez pelos antigos gregos. Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C., foi um dos primeiros a explorar profundamente as propriedades dos números primos. Em seu livro "Elementos", Euclides provou que existem infinitos números primos. Sua prova é considerada uma das mais elegantes da Matemática. Ele mostrou que, assumindo que existe um número finito de primos, é possível sempre encontrar um novo número primo não incluído na lista original, levando a uma contradição (ÁVILA, 2003).

Definição: Diz-se que $p \in \mathbb{Z}$ é primo se existem exatamente dois naturais divisores de p, nomeadamente 1 e |p|. Exemplo: $2,3,5,7,11,13$ são primos. Os números maiores que 1 que não são primos, como $4,8,9,12$ são chamados de números compostos.

O matemático grego Eratóstenes desenvolveu um método eficiente, conhecido como "Crivo de Eratóstenes", para encontrar todos os números primos até um determinado limite. Esse método consiste em eliminar sucessivamente os múltiplos de cada número, começando com 2, até que restem apenas os números primos.

O Crivo de Eratóstenes apresentado na figura 1, funciona eliminando os múltiplos dos números primos, deixando apenas os números primos. Aqui está um passo a passo de como ele funciona:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Figura 1 – Crivo de Eratóstenes.
Fonte: https://descompliqueamatematica.com.br/numeros-primos/

- **Lista Inicial**: Comece com uma lista de números consecutivos de 2 até um número n desejado.
- **Primeiro Número Primo**: O primeiro número na lista é 2, que é um número primo. Circule-o.
- **Eliminar Múltiplos**: Elimine (risque) todos os múltiplos de 2 na lista (ou seja, $4,6,8,10,\ldots$).
- **Próximo Número Primo**: O próximo número não riscado na lista é o 3, que é um número primo. Circule-o.
- **Eliminar Múltiplos**: Elimine todos os múltiplos de 3 na lista (ou seja, $6,9,12,15,\ldots$).

- **Repetição**: Repita os passos anteriores, encontrando o próximo número não riscado, circulando-o como um primo e eliminando todos os seus múltiplos. Continue este processo até que você tenha circulado todos os números na lista até n.
- **Resultado**: Os números que não foram riscados na lista conforme a figura 1, são todos números primos, pois são divididos somente por 1 e por eles mesmo.

Os números primos continuam a fascinar e desafiar os pesquisadores, com muitas questões ainda sem resposta. "A busca pelos números primos é o mais longo passeio que a mente humana já empreendeu. Suas propriedades, aparentemente simples, escondem segredos que ainda hoje desafiam matemáticos do mundo inteiro"(SOUZA, 2020).

2.3 Algoritmo de Euclides

Euclides descreveu o algoritmo em seu famoso livro "Os Elementos", que é considerado um dos trabalhos matemáticos mais influentes da história. O algoritmo de Euclides é baseado no princípio de que o MDC de dois números não muda se o menor número for subtraído do maior número repetidamente.

Ao longo dos séculos, o algoritmo de Euclides tem sido amplamente utilizado em diversas áreas da Matemática, como Teoria dos Números, criptografia e computação. Ele é considerado um dos algoritmos mais antigos e importantes da história da Matemática. Desenvolvido por Euclides por volta de 300 a.C. Segundo (SANTOS, 2020) a maioria dos resultados obtidos estão descritos no Livro VII dos Elementos de Euclides, assim esses conceitos sobre MDC e MMC são conteúdo que fazem parte do ensino básico até hoje.

2.3.1 Máximo divisor comum - MDC

Definição: (Máximo Divisor Comum) Sejam d um número inteiro positivo $(d \in \mathbb{Z}, d > 0)$. Diz-se que d é o máximo divisor comum de dois inteiros a e b, denotado por $MDC(a,b) = d$, se d satisfazer as seguintes propriedades:

(i) $d \mid a$ e $d \mid b$;

(ii) Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \,|\, d$.

Esta definição formal estabelece as condições necessárias e suficientes para que um número inteiro d seja considerado o máximo divisor comum de outros dois números inteiros a e b.

Exemplo: Sejam a e $b \in \mathbb{N}$. Tem-se que:

(i) $MDC(1,a) = 1$.

(ii) $MDC(0,a) = a$.

(iii) $MDC(a,a) = a$.

(iv) $MDC(a,b) = MDC(-a,b) = MDC(a,-b) = (-a,-b)$.

O *MDC* de a e b, quando existir, será denotado por $MDC(a,b)$. Para calcularmos o *MDC* de maneira eficiente, vamos descrever o chamado algoritmo de Euclides ou algoritmo das divisões sucessivas, que se baseia na seguinte simples observação:

Lema (Euclides): Se $a = b \cdot q + r$, então $MDC(a,b) = MDC(b,r)$.

Demostração: Se $a = b \cdot q + r$, então qualquer divisor comum de a e b também é divisor de r, ocorre porque $r = b \cdot q$ e a subtração de múltiplos não altera a divisibilidade. $\square$

O algoritmo de Euclides consiste na aplicação reiterada do Lema acima onde q e r são o quociente e o resto na divisão de a por b (note que o Lema vale mesmo sem a condição $0 \leq r < |b|$). Como os restos formam uma sequência estritamente decrescente, o algoritmo eventualmente para quando atingimos o resto 0.

De forma geral de acordo com (SANTOS, 2020), podemos sistematizar o algoritmo, utilizando o dispositivo abaixo:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = mdc(a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Figura 2 – Algoritmo de Euclides.

Exemplo 2: Calcule $MDC(306,657)$.

	2	6	1	4
657	306	45	36	9
45	36	9	0	

ou

$$\begin{aligned} 657 &= 2(306) + 45 \\ 306 &= 6(45) + 36 \\ 45 &= 1(36) + 9 \\ 36 &= 4(9) + 0 \end{aligned}$$

Assim, temos

$MDC(657,306) = MDC(306,45) = MDC(45,36) = MDC(36,9) = MDC(9,0) = 9.$

2.3.2 Mínimo múltiplo comum - MMC

O mínimo múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números inteiros positivos é o menor número inteiro positivo que é divisível por um dos números dados sem deixar resto. De outra forma, podemos dizer que o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números inteiros é o menor número inteiro que é divisível por esses números. Se um dos números for zero, o mínimo múltiplo comum é, por definição, igual a zero.

Definição 2: Mais formalmente, seja m o mínimo múltiplo comum de a e b, temos que:

(i) m é um múltiplo comum de a e b;

(ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$.

Exemplo 2.3: Encontrar o MMC de 6 e 8.

- Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, ...
- Múltiplos de 8: 8, 16, 24, 32, ...
- O menor número que aparece em ambas as listas é 24, portanto, o MMC de 6 e 8 é 24.

Exemplo 2.4: Encontrar o MMC de 3, 4 e 6.

- Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, ...
- Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, ...
- Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, ...
- O menor número que aparece em todas as listas é 12, portanto, o MMC de 3, 4 e 6 é 12.

Demonstração: Existe uma fórmula Matemática para calcular o MMC:

$$MMC(a,b) = \frac{a \cdot b}{MDC(a,b)}, \tag{2.8}$$

Onde MDC(a,b) é o máximo divisor comum de a e b. Esta fórmula funciona porque o MMC é o menor número que é divisível por ambos a e b e o MDC é o maior número que divide ambos a e b. Portanto, dividindo $a \cdot b$ pelo MDC, obtemos o MMC.

Exemplo 2.5: Encontrar o mínimo múltiplo comum entre 20 e 30.

$$\begin{array}{rr|l} 20, & 30 & 2 \\ 10, & 15 & 2 \\ 5, & 15 & 3 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Logo, o $MMC(20,30)$ será o produto de $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, ou seja, 60.

2.4 Progressões Aritméticas (P.A) e Progressões Geométricas (P.G)

As progressões aritméticas (P.A) e Progressões Geométricas (P.G) são conceitos fundamentais em Matemática, utilizados em diversas áreas da ciências e engenharia. Ambas as progressões têm características distintas, mais compartilham a capacidade de modelar padrões e sequências.

2.4.1 Progressões Aritméticas (P.A)

Definição: Uma Progressão Aritmética (P.A) é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante chamada **razão** (r)**.** Essa estrutura sequencial permite a previsão de termos futuros e padrões lógicos. *"Uma Progressão Aritmética (P.A) é caracterizada por uma sequência onde a diferença entre termos consecutivos é constante."* (FARIAS, 2020).

O termo geral de uma P.A é dado pela fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \tag{2.9}$$

- a_n é o termo geral,
- a_1 é o primeiro termo,
- n é a posição do termo na sequência,
- r é a razão.

Exemplo: Considerando a P.A onde o primeiro termo é 2 e a razão é 3:

- Temos: 2, 5, 8, 11, 14, ...
- Cálculo do 5º termo:

$$a_5 = 2 + (5-1) \cdot 3 = 2 + 12 = 14. \tag{2.10}$$

A soma dos primeiros n termos de uma P.A é dada por:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n). \tag{2.11}$$

- S_n é a soma dos n termos,
- a_n é o enésimo termo.

Exemplo de Soma: Para a mesma P.A com 5 termos da solução (2.10):

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (2 + 14) = \frac{5}{2} \cdot 16 = 40. \tag{2.12}$$

2.4.2 Progressão Geométrica (P.G)

Definição: Uma Progressão Geométrica (P.G) é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante chamada **razão (q)**. Essa estrutura Matemática possui características interessantes e importantes, como a possibilidade de calcular termos futuros a partir de informações iniciais. No entanto, é necessário compreender as propriedades e aplicações da P.G para utilizá-la de forma eficaz em diferentes contextos.

De acordo com (SANTOS, 2019) a definição apresentada pela autora Ana Paula Santos é clara e objetiva ao explicar que uma Progressão Geométrica (P.G) é uma sequência onde a razão entre termos consecutivos é constante. Essa definição é fundamental para a compreensão desse importante conceito matemático.

O termo geral de uma P.G é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{2.13}$$

- a_n é o termo geral,
- a_1 é o primeiro termo,
- n é a posição do termo na sequência,
- q é a razão.

Exemplo: Considerando a P.G onde o primeiro termo é 3 e a razão é 2:

- Temos 3, 6, 12, 24, 48, ...
- Cálculo do 4º termo:

$$a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 8 = 24, \tag{2.14}$$

A soma dos primeiros n termos de uma P.G é dada por:

Para $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{2.15}$$

Para $q = 1$:

$$S_n = a_1 \cdot n. \tag{2.16}$$

Exemplo de Soma para a mesma P.G com 4 termos do exercício (2.14) termos:

$$S_4 = 3 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{16 - 1}{1} = 45. \tag{2.17}$$

3 OBMEP E ENSINO DE Matemática

Neste Capítulo apresentaremos um pouco da história das Olimpíadas de Matemática e um histórico das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que é um dos maiores e mais importantes concursos de Matemática do Brasil.

3.1 História das Olimpíadas de Matemática

Segundo alguns historiadores, a origem das Olimpíadas de Matemática pode ser encontrada nas disputas protagonizadas por estudiosos durante o Renascimento na Itália. Essas disputas eram eventos públicos anunciados por cartas bem escritas e divulgados boca a boca. Um “estudioso"recebia um convite que logo tomava a importância de uma convocação. Havia então todo um preparo pessoal por parte dos competidores. Pessoas vindas de vários lugares com diversos interesses se aglomeravam para assistir a essas disputas e esperar que alguém se sagre vencedor (BRAGANÇA, 2013).

Nessas disputas, cada competidor desafiava o outro a resolver um problema. Após alguns desafios de ambas as partes, surgia o vencedor, aquele que conseguisse resolver todos os problemas propostos e ainda conseguisse apresentar um problema que seu adversário não conseguiu resolver.

Em uma dessas disputas entre estudiosos de Matemática no Renascimento, houve a divulgação da descoberta, por matemáticos italianos, da solução de equações cúbicas. Essa descoberta foi considerada, segundo Howard Eves (EVES, 2008 p. 302), *“provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI"*.

No século XVI, o matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) conseguiu resolver algebricamente a equação cúbica da forma $x^3 + mx = n$, baseando-se em fontes árabes. Ele então revelou seu método de resolução ao seu discípulo, António Fior. Posteriormente, em 1535, Tartaglia (Nicolo Fontana de Brescia) também anunciou ter descoberto a solução algébrica da equação cúbica na forma $x^3 + px^2 = n$. No entanto, Fior não acreditou nessa descoberta de Tartaglia e o desafiou para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações algébricas.

Aceitando o desafio, Tartaglia se preparou dedicando-se especialmente à resolução da equação cúbica sem o termo quadrático. Ao final da disputa, Tartaglia saiu-se vencedor, pois conseguiu resolver com sucesso os dois tipos de equações cúbicas (com e sem o termo quadrático). A importância da resolução de equações cúbicas no desenvolvimento da Matemática durante o Renascimento, bem como a competição e rivalidade entre os matemáticos da época para apresentar soluções inovadoras são de fato muito importantes.

No final do século XIX as Olimpíadas de Matemática já tinham uma estrutura organizada e objetivos bem definidos, não se limitando apenas à competição. Elas visavam promover o interesse pela Matemática, desenvolver habilidades cognitivas e sociais nos alunos, além de integrar a Matemática à vida prática dos participantes, tornando-a mais significativa e aplicada. Essa abordagem ampla e multidimensional das Olimpíadas de Matemática já naquela época evidencia a importância desse tipo de iniciativa para o ensino e aprendizagem da Matemática (MONTI *et al.*, 2022).

As provas apresentavam uma estrutura variada, com provas que incluem questões objetivas e discursivas, abrangendo diferentes níveis de ensino. E tinham outros objetivos envolvidos como a descoberta de novos talentos, a formação de novos líderes de sociedades de Matemática e estimulando os mesmos para desenvolver habilidades lógicas e criativas, nos quais os alunos colocam em prática o conteúdo aprendido através de situações e problemas, trazendo a Matemática para a vida do aluno.

No Brasil, temos duas competições nacionais em destaque que são a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que serão tratadas na próxima seção.

3.2 Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)

Figura 3 – OBM.

A OBM é um projeto bem-sucedido e apoiado por importantes instituições brasileiras como o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e o Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática (INCTMat), com o objetivo de utilizar competições Matemáticas para melhorar o ensino de Matemática e identificar jovens talentos, não apenas na Matemática, mas em diversas áreas científicas (OBMEP, 2024d). Os próprios organizadores consideram essa busca por talentos precoce, e tem os seguintes objetivos:

- Utilizar competições Matemáticas como meio de melhorar o ensino de Matemática.
- Buscar e identificar jovens talentos não só para a Matemática, mas para as ciências em geral.

Essa descrição destaca a abrangência e a relevância da OBM no cenário matemático brasileiro, com objetivos que vão além da simples competição.

Com a criação da secretaria no IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) para organizar e apoiar as Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM), ela ampliou a Comissão de Olimpíadas da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), centralizando a organização da OBM e sua logística, como a montagem das provas, os critérios de classificação, o treinamento e o apoio a professores, alunos, escolas e universidades. Além disso, a secretaria também apoia a participação de alunos em competições internacionais.

As principais mudanças e melhorias trazidas pela criação da secretaria da OBM no IMPA foram:

- Centralização da organização da OBM e sua logística, tais como:

  Montagem das provas;

  Definição dos critérios de classificação;

  Organização do treinamento e apoio a professores, alunos, escolas e universidades.

- Ampliação da Comissão de Olimpíadas da SBM, ficando a secretaria responsável por toda a organização da OBM;

- Apoio à participação de alunos em competições internacionais, além das olimpíadas nacionais;

- Criação de uma estrutura consolidada de organização, apoio, comunicação e motivação para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática.

Portanto, a criação da secretaria no IMPA permitiu uma melhor centralização e organização de todos os aspectos envolvidos na realização da OBM, desde a logística até o apoio aos participantes, professores e escolas.

3.2.1 Estrutura da OBM

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) foi organizada pela primeira vez em 1979 e desde então passou por diversas mudanças em seu formato, chegando à configuração atual. A OBM está organizada em três fases, com exceção do nível universitário, que possui apenas duas fases.

A distribuição dos níveis é feita da seguinte maneira:

- Nível 1 (5º ao 7º anos do ensino fundamental)

- Nível 2 (8º e 9º anos do ensino fundamental)

- Nível 3 (ensino médio)

- Nível universitário

Para os Níveis 1, 2 e 3 (ensino fundamental e médio) a Primeira Fase tem provas de múltipla escolha e tem de 20 a 25 questões com duração de 3 horas. Na segunda fase são realizadas provas objetivas e subjetivas (parte A e parte B), realizada apenas nas escolas que enviaram relatório da primeira fase, tendo duração de 4 horas e 30 minutos conforme (OBMEP, 2024b). Portanto, a primeira fase consiste em uma prova de múltipla escolha, enquanto a segunda fase é uma prova mista, realizada apenas pelas escolas que participaram da primeira etapa, com uma duração mais longa.

Quanto ao Nível Universitário diferentemente dos Níveis 1, 2 e 3, a primeira fase é uma prova discursiva com 6 problemas com duração de 4 horas e 30 minutos. Já a segunda fase é uma prova discursiva com 6 problemas com duração de 4 horas e 30 minutos.

3.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Figura 4 – OBMEP.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A OBMEP foi criada em 2005 com o objetivo de estimular o estudo da Matemática e identificar talentos na área. Seus principais objetivos segundo (SANTOS, 2020) são:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, institutos de pesquisa e sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Desde a primeira edição da OBMEP em 2005 até a edição de 2019, o número de alunos inscritos na primeira fase da competição aumentou significativamente, assim como é mostrado no site oficial da OBMEP.

Especificamente:

- Em 2005, o número de alunos inscritos na primeira fase era de 10,5 milhões;
- Já em 2019, esse número saltou para 18,1 milhões de alunos inscritos na primeira fase.

Além disso, o percentual de municípios participantes também cresceu nesse período:

- Em 2005, a OBMEP abrangia 93,5% dos municípios brasileiros;
- Em 2019, esse percentual aumentou para 99,7%, cobrindo praticamente todo o território nacional.

A OBMEP premia os alunos com medalhas de ouro, medalhas de prata, medalhas de bronze e certificados de menção honrosa, além de Bolsas de Iniciação Científica Júnior do CNPq. Também são premiados com cursos de atualização e aperfeiçoamento. As escolas públicas são premiadas com equipamentos de informática e bibliotecas. Os municípios são premiados com troféus e construção de quadras de esporte. Todas essas premiações seguem critérios vinculados à premiação e pontos obtidos pelos alunos, descritos no Item 6 do Regulamento da OBMEP (OBMEP, 2024d).

Portanto, podemos observar que a OBMEP vem ampliando consideravelmente seu alcance a cada ano, tanto em número de alunos participantes quanto em abrangência geográfica, chegando a quase a totalidade dos municípios brasileiros em 2019. Esse crescivo aumento da participação na OBMEP demonstra sua consolidação como uma importante iniciativa para o estímulo, promoção do ensino e aprendizagem da Matemática em todo o país, (OBMEP, 2019).

3.4 OBMEP e Impacto na Qualidade do Ensino

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) desempenha um papel crucial na melhoria da qualidade do ensino de Matemática nas escolas públicas brasileiras. Oferece programas de formação e capacitação para professores de Matemática das escolas públicas. Esses programas, como o Programa de Iniciação Científica e Mestrado Profissional (PROFMAT). Fornecem aos docentes novas ferramentas e abordagens pedagógicas para o ensino de Matemática, promovendo a atualização e o aperfeiçoamento contínuo dos educadores. Disponibiliza um vasto acervo de materiais didáticos, incluindo provas anteriores, bancos de questões, videoaulas e apostilas, que podem ser utilizados pelos professores em sala de aula. Esses recursos ajudam a diversificar as estratégias de ensino e a oferecer atividades mais desafiadoras e envolventes para os alunos.

A OBMEP desperta nos alunos um interesse maior pela Matemática, incentivando-os a se dedicarem mais ao estudo dessa disciplina. Esse interesse renovado se traduz em um maior envolvimento nas aulas e, consequentemente, em melhores notas e compreensão dos conteúdos. Além de ajudar a identificar talentos em Matemática que, de outra forma, poderiam passar despercebidos. Os alunos medalhistas são incentivados a participar de programas de iniciação científica, como o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC Jr.), que oferece uma formação avançada e personalizada. Esses programas ajudam a desenvolver as habilidades desses estudantes e a prepará-los para futuras carreiras acadêmicas e profissionais na área. Assim contribuindo para a valorização do ensino de Matemática nas escolas públicas.

Destaca-se também que o sucesso dos alunos na Olimpíada traz reconhecimento e prestígio para a escola, incentivando uma cultura de excelência acadêmica, promovendo o envolvimento da comunidade escolar, incluindo pais, professores e gestores, no processo educacional. Esse engajamento é fundamental para a criação de um ambiente de apoio e incentivo ao aprendizado, e inclusão social ao oferecer oportunidades iguais para todos os estudantes de escolas públicas participarem e demonstrarem seu potencial em Matemática, independentemente de sua origem socioeconômica ou localização geográfica (GONTIJO H, 2015).

Segundo Selbach, deixar o aluno com curiosidade e motivado para aprender tal disciplina é um grande desafio para o professor e essa motivação passa por sugerir perguntas misteriosas e desafios que incentivem a curiosidade e a inteligência do aluno. Possibilitar meios e ferramentas para fortalecer a capacidade de respostas e ajudar os alunos a relacionarem descobertas às emoções para manterem em suas lembranças. A motivação do grupo de alunos como um todo é muito poderosa e impacta na motivação individual de cada aluno. Da mesma forma, um grupo de alunos motivados, estimula também os professores e instituições de ensino a seguirem assim. É importante reconhecer os avanços e êxitos dos alunos, dentro e fora de sala de aula. O reconhecimento do esforço de quem está aprendendo é um segredo a mais para a motivação educacional (SELBACH, 2010).

> Os alunos premiados pela OBMEP passam a ter acesso a um novo mundo, no que são incentivados a aprofundar os estudos. Convidados a participar do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), os medalhistas comparecem às aulas de Matemática em instituições de ensino superior da sua região e os estudantes de escolas públicas recebem uma bolsa de R$ 100. Em casos de famílias de baixa renda, o auxílio cobre a mensalidade de internet da casa ou outros materiais de estudo (OBMEP, 2024c).

Dentro dessa perspectiva, nosso objetivo foi conduzir um estudo de caso em uma escola pública da cidade de Estreito - MA, com o intuito de investigar como o ensino de conteúdos de Teoria dos Números no Ensino Médio contribuem para a preparação dos alunos para a OBMEP. Buscamos identificar quais elementos desse ensino são eficazes na formação dos estudantes e se este ensino possibilita uma boa preparação para a OBMEP.

4 METODOLOGIA

Conforme abordado no Capítulo 3, para realização do questionário (apêndice A), realizamos uma análise detalhada das edições entre 2013 e 2023 da OBMEP, pois a edição 2024 ainda não havia sido realizada, tendo foco especial nas questões relacionadas à Teoria dos Números. Nossa proposta foi realizar um estudo de caso com alunos do terceiro ano Ensino Médio do Centro de Ensino Frei Gil, localizada na cidade de Estreito - MA. Para a realização de nosso estudo, fomos atendidos prontamente pela coordenação da escola que nos deu total apoio. A escola funciona no período matutino e vespertino possuindo 589 alunos matriculados com turmas do primeiro ao terceiro ano.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) não foi realizada para o ensino médio nos anos de 2020 e 2021 devido à pandemia de COVID-19. A pandemia causou grandes interrupções nas atividades escolares em todo o país, o que impactou a capacidade de realizar eventos presenciais, como as provas da OBMEP, que exigem uma logística significativa e a participação de um grande número de estudantes em ambientes escolares.

Em 2020, devido à gravidade da situação pandêmica e à necessidade de medidas de distanciamento social, a OBMEP foi suspensa para garantir a segurança dos alunos, professores e organizadores. Já em 2021, mesmo com o avanço da vacinação e a retomada gradual das atividades escolares, a OBMEP ainda enfrentou desafios operacionais e de segurança sanitária, o que levou à decisão de não realizar a competição para o ensino médio nesses anos (AÇO, 2020).

O objetivo da pesquisa foi investigar como o ensino de Teoria dos Números contribui para a preparação dos alunos para a OBMEP, realizada por meio de questionários referentes ao nosso tema. O questionário foi aplicado dia 17 de junho de 2024, com 10 questões e uma questão teste para os alunos, sendo também aplicado um questionário para o professor responsável pelas turmas, conforme apêndice B.

A pesquisa foi realizada com 117 alunos do 3º ano do Ensino Médio, em um total de quatro turmas, sendo duas turmas no período matutino e duas turmas no vespertino, de forma que cada aluno respondeu um questionário de perguntas fechadas; e um pequeno questionário também foi aplicado ao professor responsável pelas turmas. Esse questionário encontra-se na seção de apêndices. O questionário foi aplicado individualmente sem auxílio de outros meios que pudessem intervir nos resultados. Escolhemos as turmas do 3º ano, justamente por conta deles já estarem no ultimo ano do ensino básico, pois os conteúdos de Teoria dos Números são estudados durante todo o ensino médio, assim esses alunos já teriam visto os conteúdos que seriam trabalhados.

No questionário, elaboramos questões que avaliam o conhecimento em Teoria dos Números, incluindo exemplos de algumas edições anteriores da OBMEP. As questões foram formuladas de maneira acessível para garantir que refletissem de forma precisa o nível de compreensão dos estudantes. Esta abordagem foi adotada para assegurar que o questionário fosse tanto desafiador quanto compreensível, refletindo a realidade percebida pelos participantes.

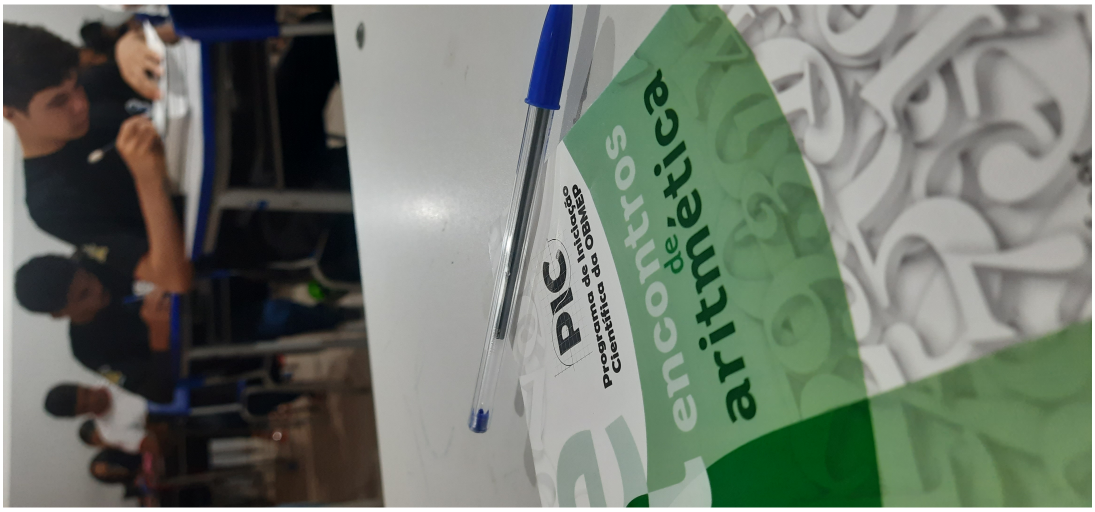

Figura 5 – Sala de Aula.

Aplicação dos questionários foi cuidadosamente planejada para garantir que os dados coletados refletissem de maneira fiel o nível de compreensão dos alunos sobre Teoria dos Números. A escolha por perguntas fechadas permitiu uma análise quantitativa objetiva, enquanto a inclusão de exemplos práticos, já vistos em edições anteriores da OBMEP, buscou assegurar a relevância e aplicabilidade dos conteúdos avaliados. Os resultados desse levantamento servirão não apenas para avaliar a eficácia do ensino atual, mas também para orientar futuras intervenções pedagógicas que visem aprimorar o desempenho dos alunos tanto na OBMEP quanto em seus estudos regulares.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capitulo, iremos analisar os dados que coletamos ao fazer o levantamento de quais conteúdos foram abordados com mais frequência na OBMEP entre os anos de 2013 e 2023, além de fazer uma análise dos questionário que foi aplicado aos alunos e ao professor da Escola de Ensino Médio.

5.1 Análise de questões da OBMEP

Como mencionado anteriormente, nesta seção, apresentaremos os conteúdos de Teoria dos Números abordados na OBMEP por meio de gráficos e discutiremos algumas das questões analisadas.

Em 2013 das 26 questões analisadas entre primeira e segunda fase, encontramos 6 questões com conteúdos de Teoria dos Números conforme a Figura 6.

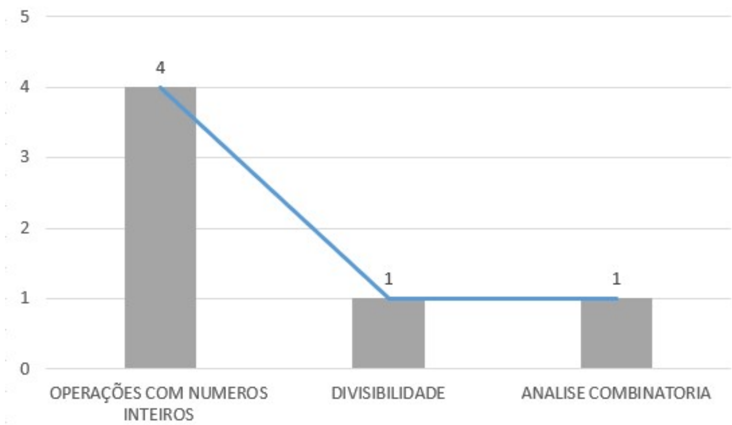

Figura 6 – Conteúdos Abordados 2013.

Uma das questões era a seguinte:

(OBMEP_2013-N3) Marcos fez cinco provas de Matemática. Suas notas, em ordem crescente, foram 75, 80, 84, 86 e 95. Ao digitar as notas de Marcos na ordem em que as provas foram realizadas, o professor notou que as médias das duas primeiras provas, das três primeiras, das quatro primeiras e das cinco provas eram números inteiros. Qual foi a nota que Marcos tirou na última prova?

Habilidades necessárias para resolver o problema: O aluno precisa ter capacidade de somar e dividir números e Raciocínio Lógico para testar diferentes possibilidades e condições.

Resolução

Na tabela abaixo mostramos os restos da divisão das notas por 3 e por 4

	75	80	84	86	95
Resto da Divisão por 3	0	2	0	2	2
Resto da Divisão por 4	3	0	0	2	3

Como a média das três primeiras notas é um número inteiro, vemos que a soma das três primeiras notas é um múltiplo de 3. A consulta à tabela mostra que a única maneira de somar três restos na primeira linha de modo a obter um múltiplo de 3 corresponde às notas 80, 86 e 95; logo, essas foram (não necessariamente nessa ordem) as três primeiras notas. De modo análogo, o fato de que a soma das quatro primeiras notas é um múltiplo de 4 mostra que essas notas devem ser 75, 86, 95 e uma entre 80 ou 84, que correspondem à única maneira possível de somar quatro números da segunda linha e obter um múltiplo de 4. Mas já sabemos que 80 é uma das três primeiras notas.

Logo as quatro primeiras notas foram 75, 80, 86 e 95 e a última nota foi 84.

$\square$

Já no ano de 2014 foram 5 questões com conteúdos de Teoria Números, conforme mostra a Figura 7.

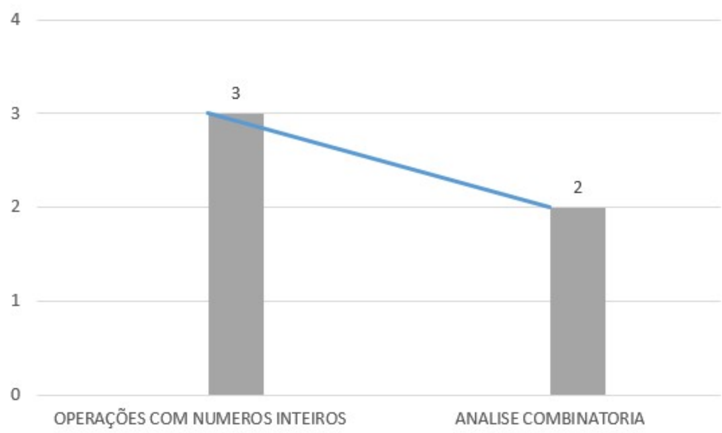

Figura 7 – Conteúdos Abordados 2014.

Uma das questões trabalhadas nesse ano foi:

(OBMEP_2014-N3) O simbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n?

Habilidades necessárias para resolver o problema: Entender o conceito de fatorial e como ele é calculado, ser capaz de fatorar números em seus componentes primos, além de saber contar múltiplos de um número até um determinado limite.

Resolução

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$,

Por outro lado,

$$13! \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10},$$

E portanto,

$$\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^10} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16.$$

Logo, $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$, ou seja, $n = 16$

□

Em 2015, se manteve-se a mesma quantidade de questões do ano anterior, mudando apenas em relação aos conteúdos abordados, veja na figura 8.

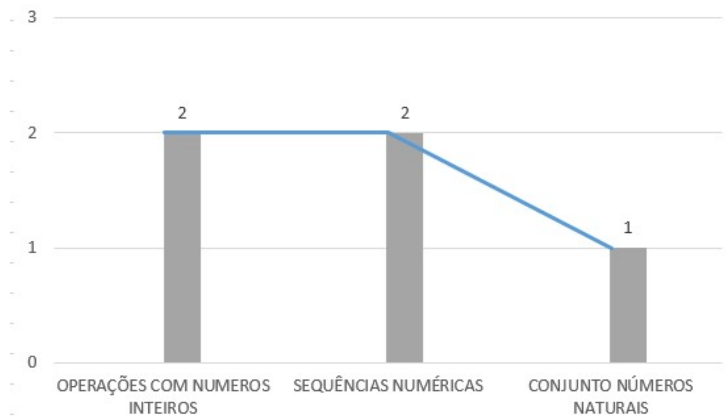

Figura 8 – Conteúdos Abordados 2015

Abordando o conteúdo de conjuntos numéricos tínhamos a seguinte pergunta:

(OBMEP_2015-N3) Dado o conjunto A = $(1, 2, 3, ..., 2015)$, forma-se um subconjunto B, com a maior quantidade possível de elementos, tal que todo elemento de B é múltiplo ou divisor de qualquer outro elemento de B. Quantos elementos há no conjunto B?

Habilidades necessárias para resolver o problema: Entender o conceito de múltiplos e divisores, e como eles se relacionam entre si, ser capaz de analisar subconjuntos dentro de um conjunto maior, especialmente no contexto de múltiplos e divisores e ter a capacidade de lidar com sequências numéricas e identificar padrões ou propriedades relevantes.

Resolução

Existem vários subconjuntos que satisfazem às condições do enunciado; todos eles com 11 elementos. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
B1 &= (1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10});\\
B2 &= (1,\ 3,\ 2\cdot 3,\ 2^2\cdot 3,\ 2^3\cdot 3,\ 2^4\cdot 3,\ 2^5\cdot 3,\ 2^6\cdot 3,\ 2^7\cdot 3,\ 2^8\cdot 3,\ 2^9\cdot 3);\\
B3 &= (1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^9\cdot 3).
\end{aligned}$$

A solução anteriormente divulgada está incorreta; ela contempla apenas o primeiro exemplo.

Não é possível construir um subconjunto de A nas condições descritas no enunciado, contendo 12 ou mais elementos. De fato, suponhamos que isto fosse possível, e seja B um subconjunto de A, com $k \geq 12$ elementos. Seja n o maior elemento de B. Então, n deve ser múltiplo dos demais elementos de B. Logo n deve possuir k divisores positivos (ele próprio e os demais $k-1$ elementos do conjunto). O menor número n que possui k divisores positivos é $2k-1$. Entretanto, $2k-1 \geq 211 = 2048 > 2015$, pois $k \geq 12$. Logo, $n > 2015$ e, portanto, n não pode pertencer a B, já que B é subconjunto de A. Esta contradição surge da suposição de que B tem mais do que 11 elementos. Assim, os subconjuntos de A com a maior quantidade possível de elementos, que satisfazem as condições do enunciado, possuem 11 elementos.

$\square$

Em 2016, houve uma leve redução no número de questões de Teoria dos Números, totalizando quatro, conforme demonstrado na figura 9. Essa mudança pode indicar uma priorização de outros tópicos naquele ano.

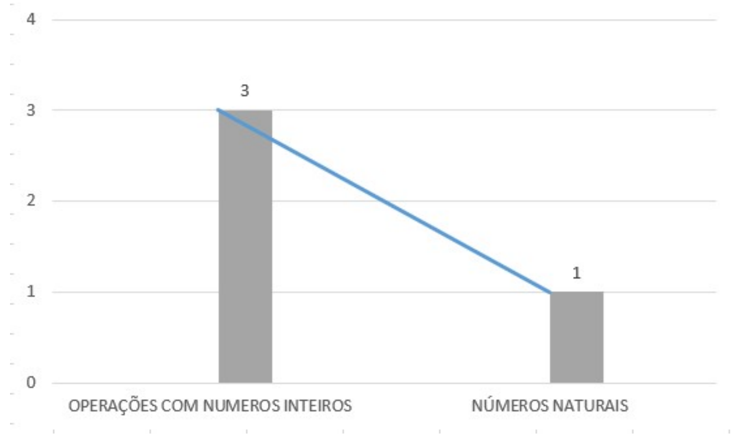

Figura 9 – Conteúdos Abordados 2016.

(OBMEP_2016-N3) Quantos são os números naturais n tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

Habilidades necessárias para resolver o problema: Manipular expressões algébricas e compreender como simplificar frações e ser capaz de substituir valores específicos na expressão para verificar quais satisfazem a condição dada.

Resolução

Podemos reescrever a expressão somando e subtraindo 40 no denominador, como abaixo:

$$\frac{5n-12}{n-8} = \frac{5n-40+40-12}{n-8} = \frac{5n-40}{n-8} + \frac{28}{n-8} = \frac{5(n-8)}{n-8} + \frac{28}{n-8} = 5 + \frac{28}{n-8}.$$

Logo, os números inteiros n tais que $\frac{(5n-12)}{(n-8)}$ é um número natural são aqueles tais que $\frac{28}{(n-8)}$ é um número inteiro igual ou maior do que – 5.

Para $\frac{28}{(n-8)}$ ser um número inteiro, $n-8$ deve dividir 28 e segue que

$$(n-8) = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14 \text{ ou } \pm 28,$$

E, dentre esses números, para $\frac{28}{(n-8)}$ ser um número inteiro igual ou maior que -5, segue que

$$(n-8) = +1, +2, +4, \pm 7, \pm 14 \text{ ou } \pm 28,$$

Logo, os possíveis inteiros n são

$$n = +9, +10, +12, +15, +1, +22, -6, +36 \text{ ou } -20.$$

Desses, sete são números naturais.

□

Já em 2017 como vemos na figura 10, a OBMEP continuou a apresentar quatro questões de Teoria dos Números, seguindo a tendência do ano anterior. Essa constância sugere uma estabilização no foco dado a esse conteúdo.

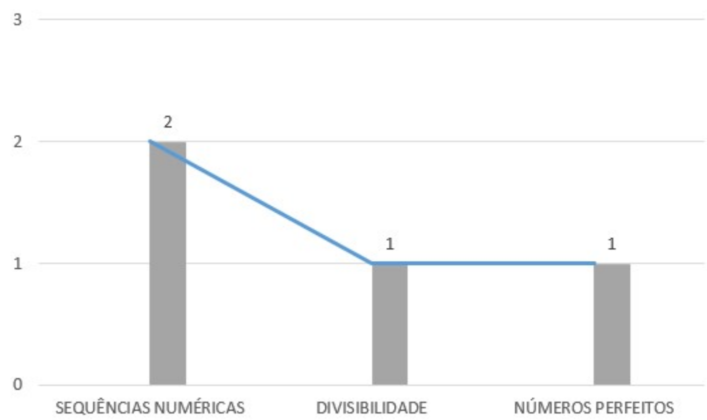

Figura 10 – Conteúdos Abordados 2017.

Uma questão interessante a respeito de divisibilidade diz o seguinte:

(OBMEP_2017-N3) Somando 1 a um certo numero natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

Habilidades necessárias para resolver o problema: Compreender como trabalhar com congruências e restos de divisões, especialmente em contextos que envolvem múltiplos.

Resolução

Lembramos primeiro que, se a e b são números naturais, dizer que a é múltiplo de b (ou b divide a) é dizer que existe outro número natural c tal que $a = bc$.

O algoritmo da divisão nos diz que, se $b \neq 0$, existem únicos inteiros q e r tais que $a = q \cdot b + r$ e $0 \leq r < |b|$; os números q e r são ditos, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b (se $r = 0$, temos o caso em que a é múltiplo de b).

Seja agora n o número natural do enunciado. Como $n+1$ é múltiplo de 11, existe um número natural t tal que $n+1 = 11t$; do mesmo modo, existe um número natural s tal que $n-1 = 8s$. Multiplicando membro a membro essas expressões, temos $(n+1)\cdot(n-1) = n^2 - 1 = 88ts$, ou seja, $n^2 = 88ts + 1$.

Essa última expressão mostra que o resto da divisão de n^2 por 88 é 1.

$\square$

O ano de 2018 marcou um aumento significativo, com seis questões abordando o conteúdo analisado. veja na figura 11.

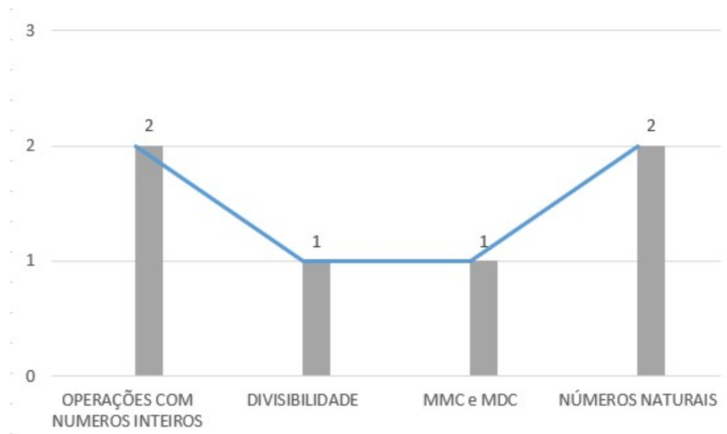

Figura 11 – Conteúdos Abordados 2018.

Dentre elas uma das questões aplicada que trabalha o conceito de decomposição em fatores primos, faz a seguinte pergunta:

(OBMEP_2018-N3) Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6000?

Habilidades necessárias para resolver o problema: Entender o conceito de MDC e como ele se relaciona com a decomposição em fatores primos de dois números e ter a capacidade de analisar diferentes combinações de fatores primos para maximizar o MDC, dado um produto fixo.

Resolução

O MDC de dois números que estão fatorados como produto de primos é produto dos primos comuns, cada um elevado ao menor expoente que comparece nas fatorações.

Denotamos por α e β os dois números cujo produto é $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$. Assim, os fatores primos de α e β são 2, 3 ou 5.

O MDC de α e β será o maior possível, quando os fatores primos estiverem distribuídos de forma mais equânime possível. Em particular, o fator primo 2, que ocorre com expoente par na fatoração de 6000, deve ocorrer com o mesmo expoente nas fatorações de α e β, a saber, a metade do expoente $(4 \div 2 = 2)$ que aparece na fatoração de 6000.

Para o primo 5, cujo expoente é um número ímpar maior do que 2, devemos maximizar sua ocorrência nas fatorações de α e β. Para isso, subtraímos 1 de seu expoente na fatoração de 6000, ou seja, fazemos 3 – 1 = 2, e depois tomamos a metade (2 ÷ 2 = 1). Assim, para o caso estabelecido no enunciado, a fim de maximizar o MDC entre α e β, devemos ter em suas fatorações o produto 2 × 2 × 5 = 20. Uma possibilidade é $\alpha = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ e $\beta = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

Assim, o maior valor possível para o MDC entre α e β é 20.

□

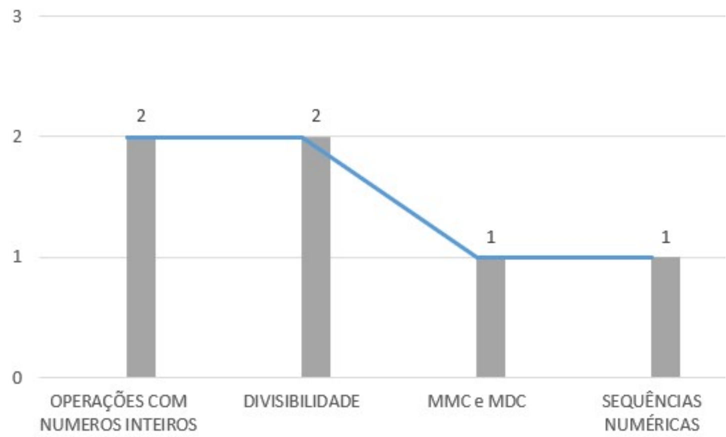

Figura 12 – Conteúdos Abordados 2019.

Em 2019, manteve-se o número elevado de seis questões de Teoria dos Números, indicando uma continuidade dada a importância do conteúdo conforme destaca a figura 12.

(OBMEP_2019-N3) Qual é a soma dos algarismos do número $\sqrt{1111111111-22222}$?

Habilidades necessárias para resolver o problema: Trabalhar com os números resultantes de operações para identificar suas propriedades, como a soma de seus algarismos, e aplicar lógica para simplificar os problemas e verificar a coerência dos resultados obtidos.

Resolução

Observando que

$$1111111111 = \frac{10^{10}-1}{9} \text{ e } 22222 = 2\cdot\frac{10^5-1}{9},$$

temos:

$$\sqrt{\frac{10^{10}-1}{9}-2\cdot\frac{10^5-1}{9}} = \frac{\sqrt{10^{10}-2\cdot10^5+1}}{3} = \frac{\sqrt{(10^5-1)^2}}{3} = \frac{10^5-1}{3} = 3\cdot\frac{10^5-1}{9} = 3\cdot 11111 = 33333.$$

Logo, a soma dos algarismos do número apresentado no enunciado é 3 × 5 =15.

□

Após a parada em 2020 e 2021, conforme já explicado anteriormente, o ano de 2022 registrou um aumento expressivo no número de questões, com um total de nove questões, como destacado na figura 13. Esse acréscimo pode refletir um reposicionamento estratégico no exame.

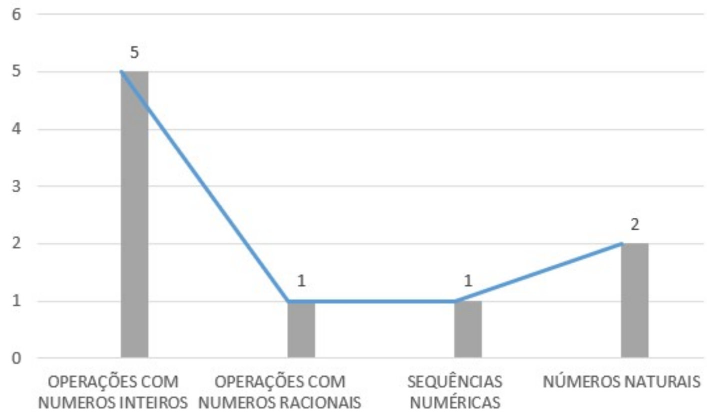

Figura 13 – Conteúdos Abordados 2022.

(OBMEP_2022-N3) Henrique pensou em um número, multiplicou por 3, somou 3, dividiu por 3, subtraiu 3, calculou a raiz cúbica e obteve 3 como resultado final. Qual é a soma dos algarismos do número em que Henrique pensou?

Habilidades necessárias para resolver o problema: O aluno precisa ter conhecimento em reverter operações Matemáticas para trabalhar de trás para frente a partir do resultado final e Interpretar o problema corretamente e identificar a sequência de operações realizadas, a fim de traçar um caminho inverso para encontrar a solução.

Resolução

Seja n o número pensado por Henrique. As operações descritas no enunciado são, em ordem, as seguintes:

$$3n$$
$$3n+3$$
$$(3n+3)/3$$
$$[(3n+3)/3]-3$$
$$\sqrt[3]{[(3n+3)/3]-3}$$

Como $\sqrt[3]{[(3n+3)/3]-3}$ = 3, realizando as operações inversas, obtemos

$$[\frac{(3n+3)}{3}]-3=27,$$

Assim,

$$\frac{[(3n+3)]}{3}=30,$$

ou seja, $n+1=30$, logo, $n=29$. Somando os algarismos de 29, temos 2 + 9 = 11.

□

Em 2023, essa tendência de valorização da Teoria dos Números foi mantida, com a prova apresentando novamente nove questões, isso reforça a importância desse conteúdo na preparação para a OBMEP.

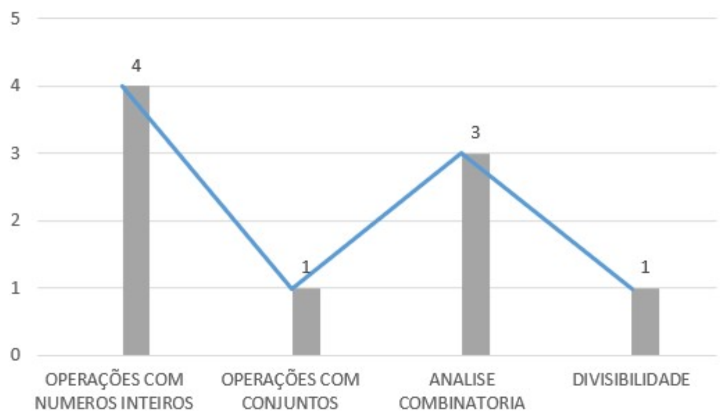

Figura 14 – Conteúdos Abordados 2023.

Uma das questões que trabalhou operações com números inteiros era a seguinte:

(OBMEP_2023-N3) Qual é o valor da expressão

$$20235\cdot 20235 - 20238\cdot 20232\ ?$$

Habilidades necessárias para resolver o problema: Ser capaz de manipular expressões algébricas, possivelmente utilizando identidades notáveis ou fatoração para simplificar a expressão.

Resolução

$$\begin{aligned} x &= 20235 \cdot 20235 - 20238 \cdot 20232 \\ &= 20235^2 - (20235+3) \cdot (20235-3) \\ &= 20235^2 - (20235^2 - 3^2) = 9 \end{aligned}$$

Logo, o valor da expressão é 9.

□

Todas as soluções das questões trabalhadas nesta seção podem ser vitas no site oficial da OBMEP, em Provas e Soluções.

Durante a análise das 260 questões da OBMEP entre 2013 e 2023 foi observado que 54 delas, representando aproximadamente (20%) do total, estavam dedicadas à Teoria dos Números. Abordando uma variedade de tópicos que incluíam números primos, divisibilidade, sequências, conjuntos, operações com números inteiros e suas propriedades. A figura 15 mostra como essas questões foram distribuídas conforme o conteúdo durante o período analisado.

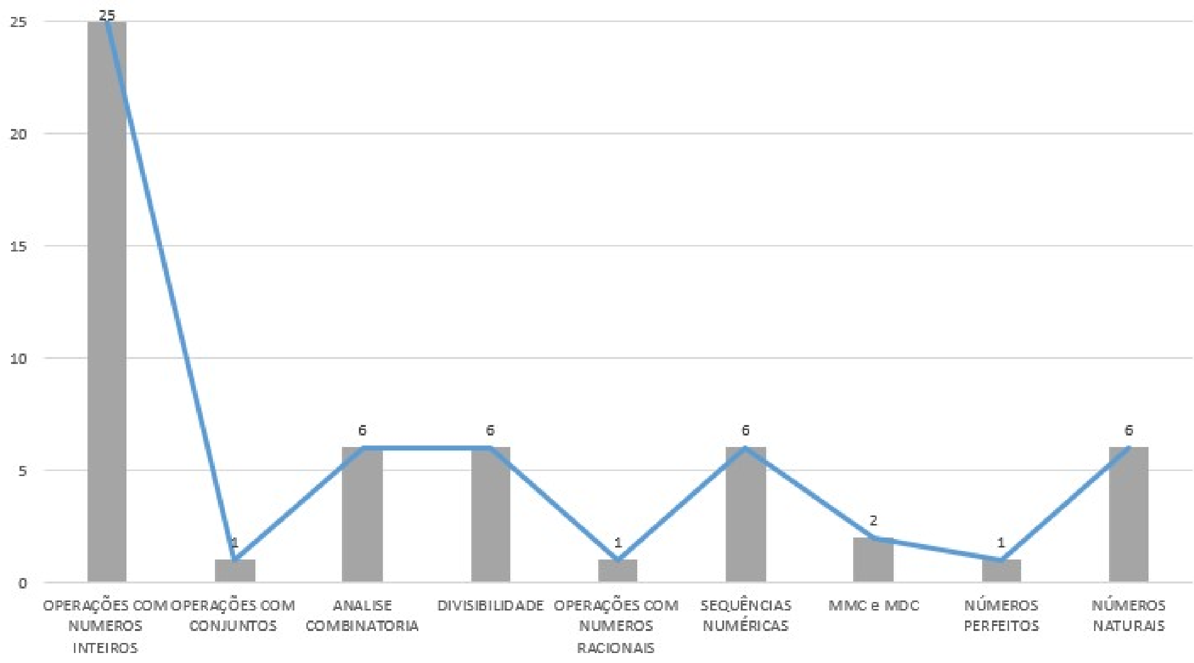

Figura 15 – Conteúdos Abordados 2013 a 2023.

5.2 Análise dos questionários

Com base na análise dos conteúdos que mais foram abordados na OBMEP entre 2013 e 2023, decidimos elaborar um pequeno questionário e aplicá-lo em uma Escola Médio da cidade de Estreito - MA (a figura 16 mostra o momento em sala de aula). O questionário continha questões acerca de conhecimentos sobre alguns tópicos de Teoria dos Números além de questões sobre a OBMEP. Abaixo, iremos indicar algumas respostas que foram analisadas.

Figura 16 – Aplicação do Questionário.
Fonte: Autor.

Primeiramente, foi perguntado no questionário, se os alunos já ouviram falar sobre Teoria dos Números. Notamos que das 112 respostas 67 ($59,8\%$) foram que nunca ouviram falar sobre Teoria dos Números, enquanto que os demais 45 alunos (40,2%), já ouviram falar de Teoria dos Números em algum momento, conforme mostra a figura 17. É importante frisar que mesmo que a maioria das respostas tenham indicando que não haviam ouvido falar de Teoria dos Números, eles estudaram conteúdos referentes a esta parte da Matemática, no entanto, o conteúdo não foi abordado utilizando o termo Teoria dos Números.

1. Você já ouviu falar em Teoria dos Números?

112 respostas

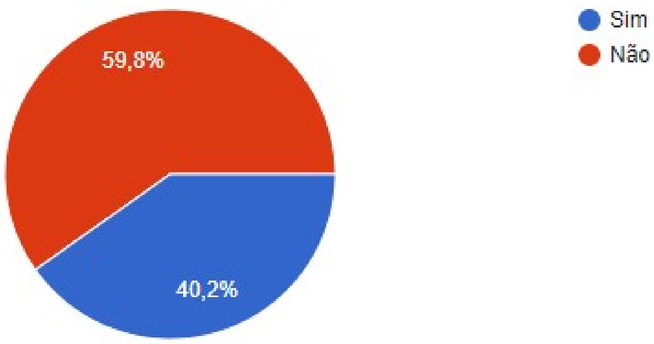

Figura 17 – Gráfico Primeira Pergunta.

Querendo obter informações sobre o conhecimento dos alunos acerca de conteúdos de Teoria dos Números, elaboramos algumas questões de conteúdos específicos. A primeira delas está ilustrada na Figura 18.

2. Considerando o conjunto dos números naturais, sobre os números primos, julgue as afirmativas a seguir:

i. Todo número primo é ímpar.

ii. O número 1 é um número primo.

iii. Todo número primo possui exatamente dois divisores.

Marque a alternativa **CORRETA:**

117 respostas

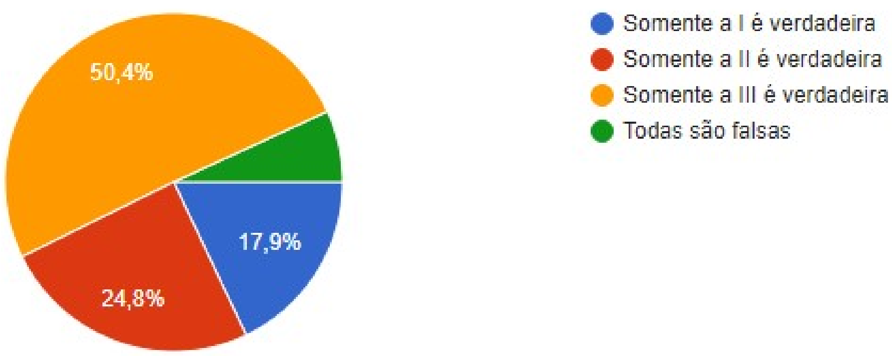

Figura 18 – Gráfico Segunda Pergunta.

Nessa pergunta observamos que a maioria dos alunos optou por responder que somente a opção (III) era a resposta correta. No entanto, um número significativo de respostas indicou que apenas a opção (II) era correta, a qual afirma que 'O número 1 é um número primo.' No entanto, essa afirmação está incorreta do ponto de vista Matemático, uma vez que, por definição, um número primo é aquele que possui exatamente dois divisores distintos: 1 e ele mesmo. O número 1 possui apenas um divisor (ele próprio) e, portanto, não atende a essa definição, não sendo considerado um número primo.

Continuando, elaboramos uma questão sobre conjuntos e pedimos para os estudantes analisá-la, sendo ela 'Sobre os conjuntos numéricos, marque a alternativa INCORRETA'. Observou-se que 73 alunos, responderam à questão de forma errada, o que corresponde a quase $\frac{2}{3}$ da turma, as outras respostas dividiram-se entre as diferentes alternativas apresentadas, Conforme a distribuição ilustrada na figura 19. Essa dispersão de respostas sugere uma compreensão variada entre os alunos sobre os conceitos de conjuntos numéricos, indicando possíveis áreas de confusão ou incerteza que merecem atenção específica. Enquanto o restante (43 alunos) respondeu de forma correta a questão.

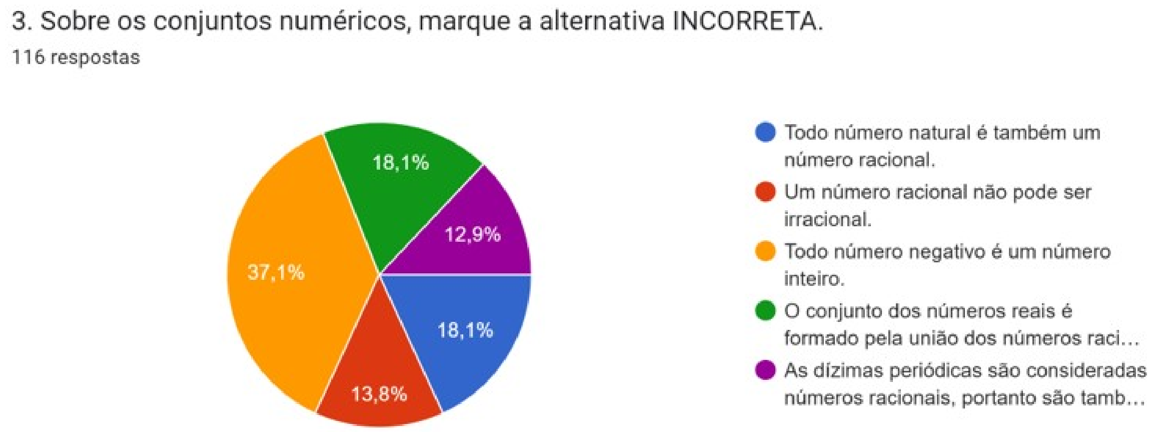

Figura 19 – Gráfico Terceira Pergunta.

Na questão seguinte, pedimos aos alunos para avaliarem algumas informações, Figura 20. Na análise das respostas dos alunos, observou-se que, na primeira afirmação, a maioria da turma considerou a sentença como verdadeira, apesar de ela ser falsa. Isso pode indicar uma dificuldade na compreensão do conceito de máximo divisor comum, o que sugere a necessidade de reforçar esse conteúdo em sala de aula. Esse erro coletivo pode ter origem em uma confusão comum entre os critérios para determinar o m.d.c. ou uma falha na aplicação correta da técnica para encontrá-lo.

Por outro lado, as afirmações subsequentes, que eram verdadeiras, foram corretamente identificadas como tal pela maioria dos alunos. No entanto, na última afirmação, que também era falsa, a maioria dos estudantes conseguiu identificar a incorreção, mostrando uma atenção mais apurada para os conceitos de números reais e irracionais. observe a figura abaixo representando essas informações.

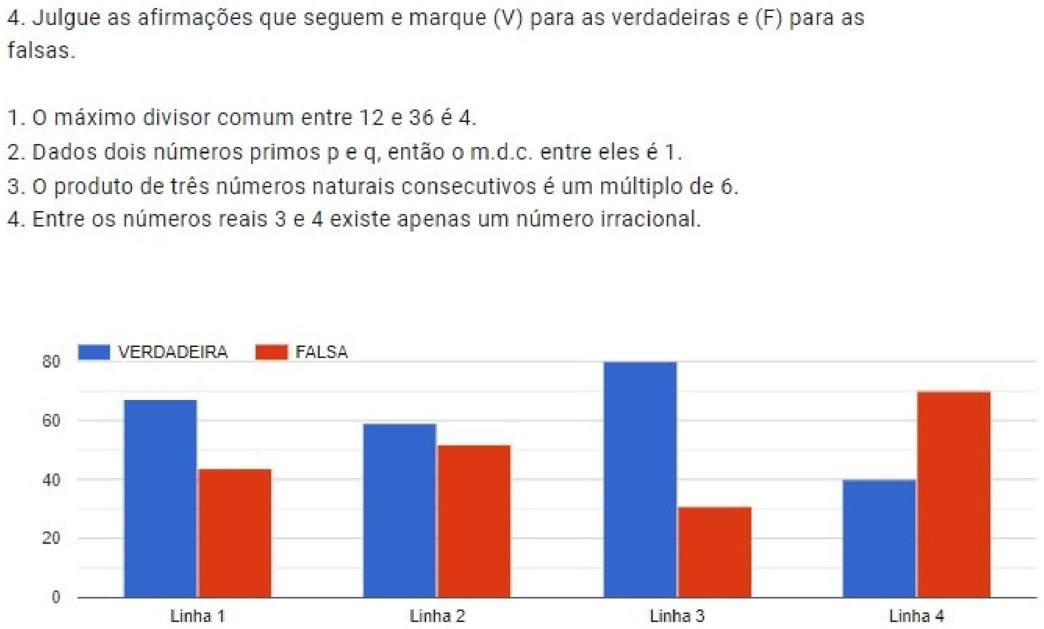

Figura 20 – Gráfico Quarta Pergunta.

Dando continuidade à análise das respostas anteriores, onde foram observadas dificuldades na compreensão de conceitos fundamentais, é relevante destacar como os alunos lidaram com a definição de números primos. Ao serem solicitados a identificar a definição correta de números primos, $39,3\%$ dos alunos acertaram, mostrando familiaridade com o conceito. Contudo, $28,2\%$ optaram por uma alternativa que sugeria que todas as afirmações estavam corretas, revelando uma certa hesitação ou confusão, assim mostrado na figura 21. Isso reflete a necessidade de reforçar esses conceitos para garantir que todos os alunos possam distinguir claramente as propriedades essenciais dos números primos.

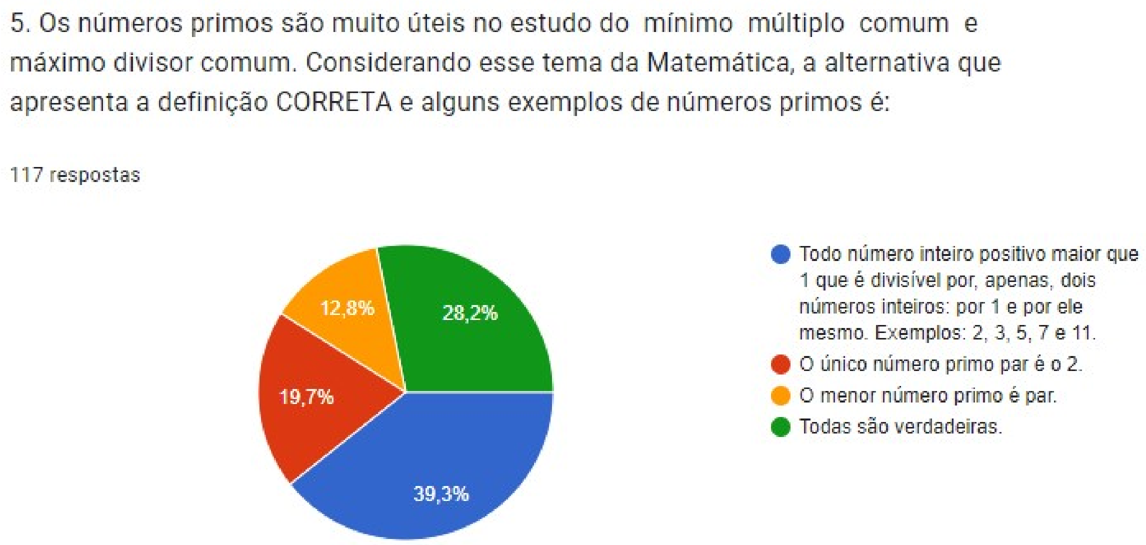

Figura 21 – Gráfico Quinta Pergunta.

Analisamos duas perguntas relacionadas a sequências e exemplos, focando na identificação de uma Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Na primeira pergunta, questionamos se os alunos sabiam identificar uma PA, e, caso afirmassem que sim, pedimos que identificassem um exemplo e indicassem se a sequência era ou não uma PA.

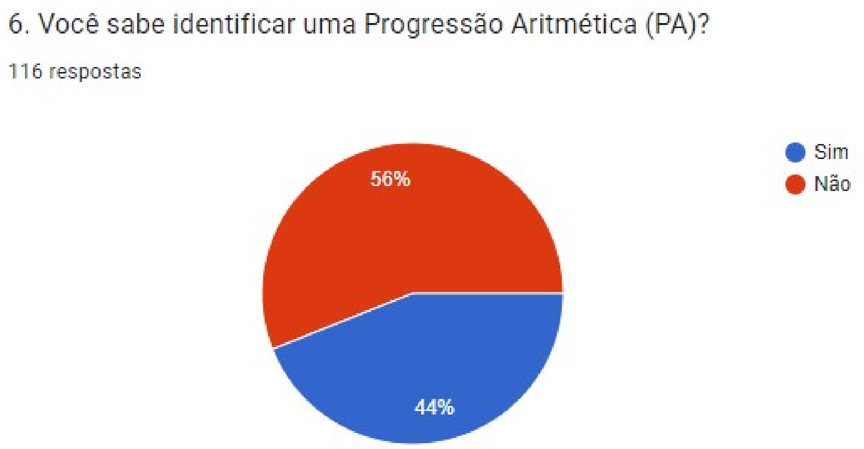

Figura 22 – Gráfico Sexta Pergunta.

Menos da metade dos alunos respondeu que sabia identificar uma PA, representado no gráfico da (figura 22), passamos o exemplo "Se sim, a sequência a seguir é uma PA? $(1,0,-1,2,-2,3,-3)$". Porém, dentre os que responderam que sim, apenas 26 foram capazes de fornecer a resposta correta.

Seguindo a mesma linha de análise (figura 23). Abordamos também a identificação de uma Progressão Geométrica (PG) com uma pergunta semelhante. Neste caso, apenas cerca de $\frac{1}{3}$ dos alunos afirmou que sabia identificar uma PG, e, entre esses, somente 4 alunos foram capazes de afirmar a resposta correta do seguinte exemplo; Se sim, a sequência a seguir é uma PG? $(1,3,9,27,81,...)$.

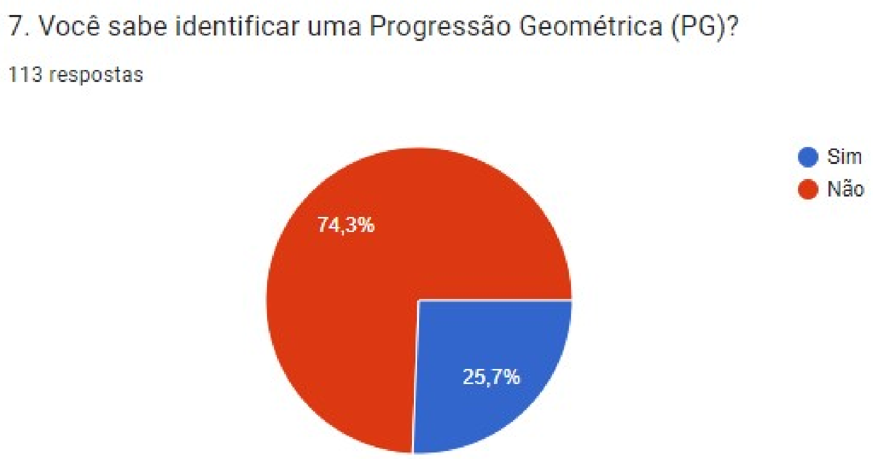

Figura 23 – Gráfico Sétima Pergunta.

Esses resultados indicam uma compreensão ainda mais limitada em relação às PG, sugerindo que a dificuldade em reconhecer e exemplificar esse tipo de sequência é maior do que com as Progressões Aritméticas, o que aponta para a necessidade de um enfoque mais direcionado nesse conteúdo.

Além de avaliarmos o conhecimento dos alunos, buscamos também compreender o interesse deles em participar da OBMEP, e se os conteúdos abordados em sala pelo professor eram suficientes para prepará-los adequadamente para a competição. Esses aspectos são fundamentais para identificar não apenas o domínio dos temas exigidos, mas também o impacto do ensino na motivação e desempenho dos estudantes na olimpíada.

Primeiramente, perguntamos a eles se já tinham participado ou tinham interesse em participar das Olimpíadas de Matemática. Cerca de 70 alunos responderam que sim que tinham interesse, que é um número bom de pessoas, mas ainda deixa a desejar, pois quase 40% (45) dos alunos estando no último ano do ensino básico, não participaram ou não participam da OBMEP. Esses dados são mostrados na figura 24.

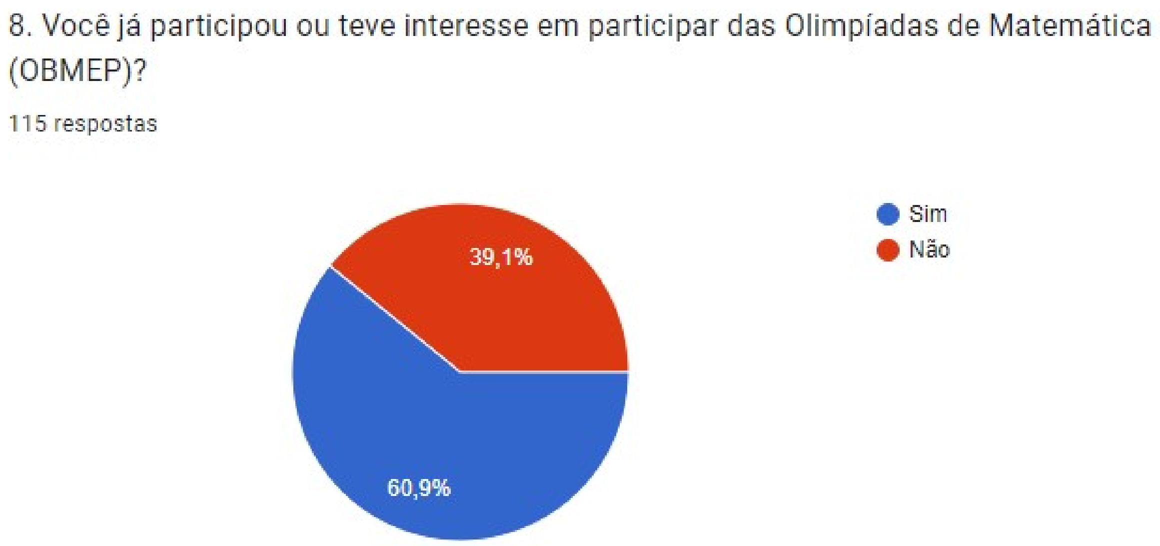

Figura 24 – Gráfico Oitava Pergunta.

Ainda tentando entender um pouco mais o preparo dos alunos, perguntamos se os conteúdos abordados na escola eram suficientes para prepara-los para Olimpíadas de Matemática (OBMEP). Constatamos que $54,5\%$ dos estudantes consideram que não estão adequadamente preparados, enquanto apenas uma pequena parcela, $16,1\%$, acredita que o conteúdo é suficiente. O restante dos alunos não soube responder, veja a figura 25. Isso nos mostra a necessidade de revisar e potencialmente intensificar o ensino de conteúdos específicos de Matemática para competições, como a OBMEP. De acordo com um estudo sobre o impacto das Olimpíadas de Matemática, a participação em tais competições requer um preparo que muitas vezes vai além do currículo regular, exigindo um aprofundamento em temas e a resolução de problemas de maior complexidade (LIMA; SILVA, 2019).

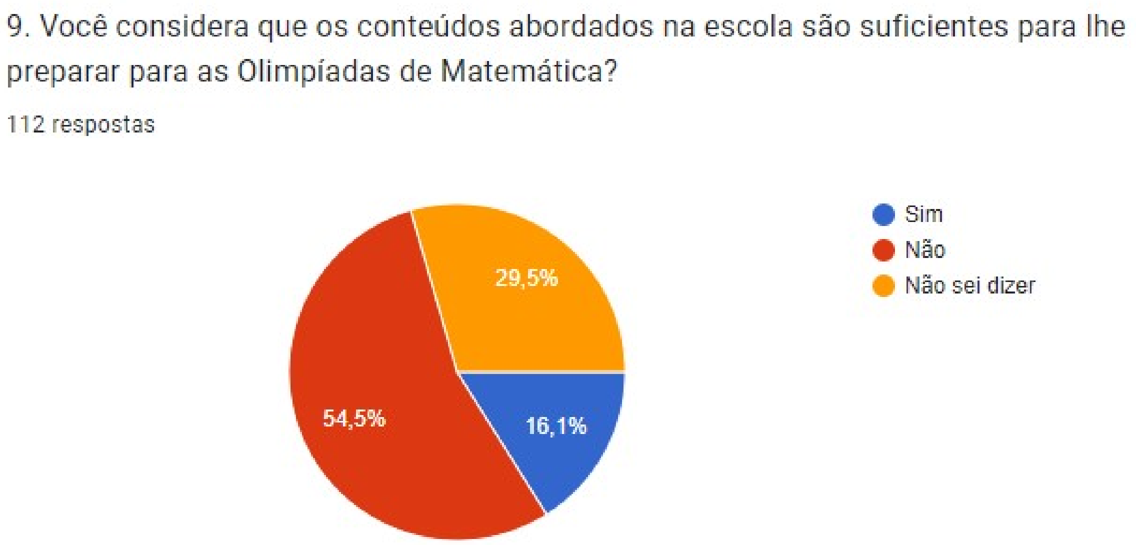

Figura 25 – Gráfico Nona Pergunta.

Peguntamos também a eles se o professor costuma preparar os alunos para a OBMEP com alguma atividade fora do horário normal de aula. A análise dos dados revela que apenas 26 de 115 alunos que responderam essa questão relataram participar de atividades extracurriculares voltadas à preparação para a OBMEP, o que representa uma minoria significativa da turma, figura 26. Este dado é preocupante, considerando que a maioria dos estudantes não se sente adequadamente preparada para a competição apenas com o conteúdo abordado nas aulas regulares. A ausência de atividades complementares pode limitar o desempenho dos alunos, não apenas na OBMEP, mas também em outras competições acadêmicas que exigem uma base sólida e prática adicional em Matemática.

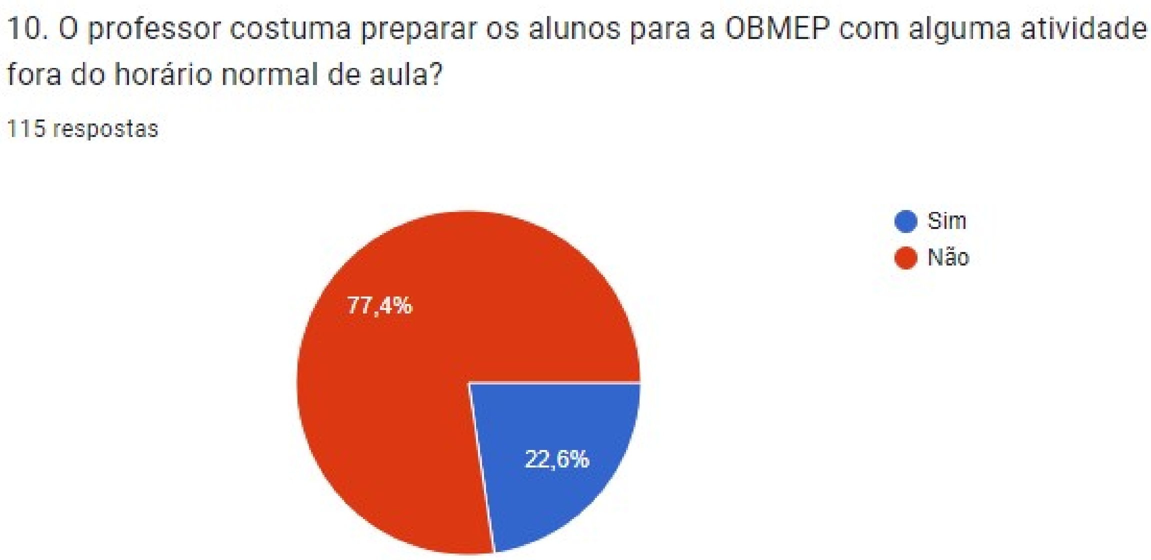

Figura 26 – Gráfico Décima Pergunta.

Para reforçar a aplicação prática dos conceitos abordados no questionário, figura 27, incluímos na última pergunta um problema que trabalhamos na seção anterior figura 13, envolvendo Teoria dos Números, um dos tópicos frequentemente abordados na OBMEP. Essa abordagem visava permitir que os alunos demonstrassem suas habilidades na resolução de problemas em um contexto semelhante ao das competições. No entanto, os resultados foram preocupantes: $81,7\%$ dos alunos não conseguiram resolver a questão corretamente, e apenas 8 alunos apresentaram o cálculo detalhado de como chegou na solução corretamente.

Escolhemos essa pergunta pelo fato de já ter sido aplicada a eles na edição de 2022, mas esse resultado negativo muito se deve pelo grande número de alunos que não costumam participar da OBMEP, conforme vimos no gráfico da figura 24.

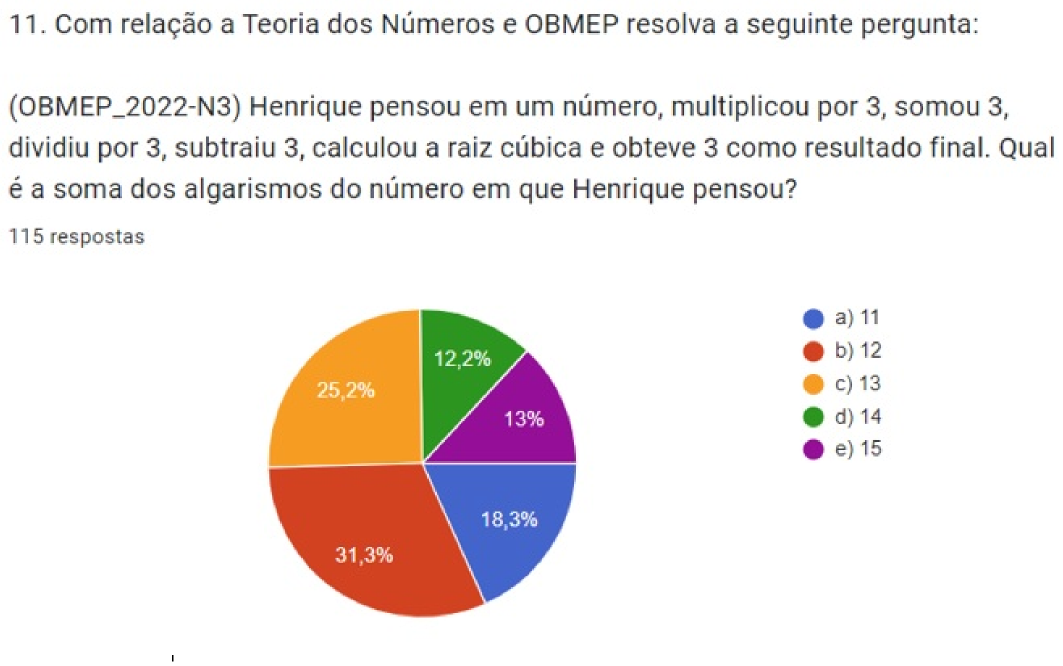

Figura 27 – Gráfico Questão aplicada em 2022_N3 na OBMEP.

Embora o sucesso em uma Olimpíada de Matemática dependa principalmente do esforço e das habilidades do aluno, a atuação do professor é fundamental para orientar, motivar e preparar os estudantes para esse desafio. O professor não apenas fornece o conhecimento técnico necessário, mas também inspira confiança e cria um ambiente propício para o aprendizado e a exploração Matemática. Com essa perspectiva, buscamos coletar dados através da pesquisa, a fim de compreender melhor como a interação entre professores e alunos pode influenciar o desempenho e o interesse dos estudantes nas Olimpíadas de Matemática. Essa análise visa identificar boas práticas e estratégias que possam ser replicadas em outras instituições, promovendo um ensino de Matemática mais eficaz e engajador. "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção"(FREIRE, 1996).

A importância do professor e da instituição em oferecer suporte além do horário de aula é fundamental. O incentivo e a organização de sessões extras de estudo, como grupos de preparação e oficinas, são essenciais para que os alunos desenvolvam as habilidades necessárias para enfrentar competições como a OBMEP.

Segundo (GARCIA; MOL, 2014), a participação em competições acadêmicas não só estimula o aprendizado, mas também fortalece a autoconfiança dos estudantes, permitindo-lhes explorar áreas de conhecimento com maior profundidade e de forma mais desafiadora do que o currículo tradicional geralmente oferece.

Sendo assim, para obter uma visão mais completa e abrangente sobre o ensino de Teoria dos Números e a preparação para a OBMEP, aplicamos também um questionário com o professor responsável pelas turmas, conforme a apêndice B. O objetivo foi entender as percepções e desafios tanto do ponto de vista dos alunos quanto do educador, explorando como esses dois lados se complementam e quais são os principais obstáculos enfrentados no processo de ensino e aprendizado.

Quando perguntado sobre o entendimento dos alunos em relação aos conteúdos de Teoria dos Números, o professor indicou que alguns alunos demonstram um bom entendimento, enquanto outros enfrentam dificuldades, que ele acredita serem decorrentes de falhas no aprendizado da matemática básica. Para contornar essas dificuldades, o professor costuma utilizar exemplos do cotidiano, buscando tornar o conteúdo mais acessível e próximo da realidade dos alunos. No entanto, ele ressaltou que os conteúdos em si não necessitam de mais tempo para serem trabalhados em sala de aula.

Figura 28 – Apostilas Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP
FONTE: Site Oficial OBMEP.

O professor também mencionou que incentiva os alunos a participarem da OBMEP e utiliza materiais fornecidos pela própria olimpíada, que resumem os conteúdos exigidos e oferecem muitos exemplos práticos, figura 28. Embora alguns alunos demonstrem interesse em participar, o professor acredita que o tempo semanal destinado à disciplina de Matemática não é suficiente para prepará-los adequadamente para a OBMEP. Essa percepção está alinhada com os dados do questionário aplicado aos alunos, onde mais de um $\frac{1}{3}$ não recebe incentivo para participar da OBMEP, indicando que essa responsabilidade vai além do professor e envolve toda a instituição escolar.

Por fim, o professor indicou que, em geral, os alunos não obtêm bons resultados na OBMEP, o que ele atribui principalmente à falta de uma preparação adequada para as provas. A ausência de atividades preparatórias específicas para a OBMEP reflete na baixa performance dos alunos, destacando a necessidade de uma abordagem mais estruturada e colaborativa entre professor e escola para melhorar esses resultados e despertar maior interesse dos alunos pela Matemática e competições acadêmicas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo investigar a contribuição da Teoria dos Números na preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com foco em uma escola pública em Estreito-MA. A partir da análise dos dados coletados, foi possível identificar às dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado dessa disciplina.

A Teoria dos Números se mostrou um conteúdo essencial para a formação Matemática dos estudantes, sendo frequentemente abordada nas provas da OBMEP. No entanto, a pesquisa revelou que muitos alunos não têm familiaridade com o termo "Teoria dos Números", apesar de terem estudado conceitos relacionados. Essa desconexão entre o conhecimento teórico e a terminologia utilizada pode ser um fator que contribui para a insegurança dos alunos em relação à sua preparação para a competição.

Além disso, a maioria dos estudantes expressou sentir-se inadequadamente preparados para a OBMEP, destacando a necessidade de um ensino mais direcionado e a implementação de atividades extracurriculares que incentivem a prática e a resolução de problemas. Portanto, os principais desafios e dificuldades encontrados pelos estudantes na compreensão e aplicação da Teoria dos Números na resolução de problemas para a competição pode estar na falta de familiaridade com os conceitos e no uso de termos técnicos que podem causar confusão no entendimento dos alunos.

Os dados indicam que a participação em atividades preparatórias é limitada, com poucos alunos engajados em ações que vão além do currículo regular. Essa situação sugere que as escolas precisam adotar uma abordagem mais proativa, incentivando a participação dos alunos em competições e oferecendo suporte adicional para o aprendizado da Matemática.

Desse modo, é fundamental que as instituições de ensino desenvolvam estratégias que integrem a Teoria dos Números de forma mais eficaz no currículo, promovendo um ambiente de aprendizado que valorize a curiosidade e o desenvolvimento de habilidades matemáticas. O papel dos professores é crucial nesse processo, pois são eles que podem inspirar e motivar os alunos a se aprofundarem nos conteúdos e a se prepararem adequadamente para desafios como a OBMEP.

A continuidade de estudos sobre a relação entre o ensino da Teoria dos Números e o desempenho dos alunos na OBMEP é essencial para aprimorar as práticas pedagógicas e contribuir para uma educação matemática de qualidade. É necessário que se busque um alinhamento entre a teoria e a prática, garantindo que todos os estudantes tenham a oportunidade de desenvolver suas habilidades matemáticas e alcançar seu potencial máximo.

Apêndices

APÊNDICE A – Questionário Aluno

UEMASUL

Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Centro de Ciências Agrárias, Naturais e Letras
Curso de Ciências Naturais

Objetivo – Coleta de Informações dos alunos quanto ao conhecimento dos alunos em relação aos conteúdos de teoria dos números e como eles são abordados na preparação para as olimpíadas de matemática (OBMEP).

Teoria dos números para preparação de estudantes do ensino médio para OBMEP: Estudo de caso no 3º ano do ensino médio em Estreito-MA

1. Você já ouviu falar em teoria dos números? ( )SIM ( )NÃO
   Se sim, qual das opções abaixo apresenta apenas conteúdos referentes à teoria dos números:
   ( ) Polinômios, Potência e Função
   ( ) Divisibilidade, Números primos e álgebra
   ( ) Geometria, Estatística e Trigonometria

2. Considerando o conjunto dos números naturais, sobre os números primos, julgue as afirmativas a seguir:
   i. Todo número primo é ímpar.
   ii. O número 1 é um número primo.
   iii. Todo número primo possui exatamente dois divisores.
   Marque a alternativa correta:
   a) Somente a I é verdadeira
   b) Somente a II é verdadeira
   c) Somente a III é verdadeira
   d) Todas são falsas

3. Sobre os conjuntos numéricos, marque a alternativa INCORRETA.
   a) Todo número natural é também um número racional.
   b) Um número racional não pode ser irracional.
   c) Todo número negativo é um número inteiro.
   d) O conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais.
   e) As dízimas periódicas são consideradas números racionais, portanto são também números reais.
4. Julgue as afirmações que seguem e marque (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.
   ( ) O máximo divisor comum entre 12 e 36 é 4.
   ( ) Dados dois números primos p e q, então o m.d.c. entre eles é 1.
   ( ) O produto de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 6.
   ( ) Entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

5. Os números primos são muito úteis no estudo do mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Considerando esse tema da Matemática, a alternativa que apresenta a definição CORRETA e alguns exemplos de números primos é:
   a) Todo número inteiro positivo maior que 1 que é divisível por, apenas, dois números inteiros: por 1 e por ele mesmo. Exemplos: 2, 3, 5, 7 e 11.
   b) O único número primo par é o 2.

Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Centro de Ciências Agrárias, Naturais e Letras
Curso de Ciências Naturais

c) O menor número primo é par.
d) Todas são verdadeiras.

6. Você sabe identificar uma Progressão aritmética (PA)? ( )SIM ( )NÃO
   Se sim, a sequência a seguir é uma PA? (1, 0, -1, 2, -2, 3, -3) ( )SIM ( )NÃO
7. Você sabe identificar uma Progressão Geométrica (PG)? ( )SIM ( )NÃO
   Se sim, a sequência a seguir é uma PG? (1, 3, 9, 27, 81, ...) ( )SIM ( )NÃO

Você já participou ou teve interesse em participar das Olimpíadas de Matemática (OBMEP)? ( )SIM ( )NÃO

Você considera que os conteúdos abordados na escola são suficientes para lhe preparar para as olimpíadas de matemática? ( )SIM ( )NÃO ( ) Não sei dizer

8. O professor costuma preparar os alunos para a OBMEP com alguma atividade fora do horário normal de aula? ( )SIM ( )NÃO. Se sim, cite um:

11. Com relação a teoria dos números e OBMEP resolva a seguinte pergunta:

(OBMEP_2022-N3) Henrique pensou em um número, multiplicou por 3, somou 3, dividiu por 3, subtraiu 3, calculou a raiz cúbica e obteve 3 como resultado final. Qual é a soma dos algarismos do número em que Henrique pensou?
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

APÊNDICE B – Questionário Professor

UEMASUL
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Centro de Ciências Agrárias, Naturais e Letras
Curso de Ciências Naturais

Objetivo – Coleta de Informações dos alunos quanto ao conhecimento dos alunos em relação aos conteúdos de Teoria dos Números e como eles são abordados na preparação para as olimpíadas de matemática (OBMEP).

Teoria dos Números para a preparação de estudantes do ensino médio para OBMEP: Estudo de caso no 3º ano do ensino médio em Estreito-MA

1. Sobre conteúdos envolvendo teoria dos números, os alunos costumam demonstrar um bom entendimento? ( ) Sim ( ) Não

2. Se não, você conseguiria apontar quais as principais dificuldades que os alunos demonstram ter?

3. Como você costuma trabalhar para contornar as dificuldades demonstradas pelos alunos?

4. Os conteúdos envolvendo teoria dos números precisam de mais tempo para serem trabalhados? ( ) Sim ( ) Não

5. Você já incentivou os alunos a participarem da OBMEP? ( ) Sim ( ) Não

6. Os alunos demonstram interesse em participar? ( ) Sim ( ) Não

7. Você acredita que o tempo semanal destinado à disciplina de Matemática é suficiente para preparar os alunos para uma eventual participação na OBMEP? ( ) Sim ( ) Não

8. Aos alunos interessados em participar, é feita alguma atividade de preparação? ( ) Sim ( ) Não
9. Se sim, quais?

10. No geral, os alunos vão bem na OBMEP? ( ) Sim ( ) Não

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. O impacto da obmep na formação matemática dos estudantes. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, Associação Brasileira de Educação Matemática, v. 28, n. 2, p. 123–134, 2023. Citado na página 11.

ÁVILA, P. d. **Os Elementos de Euclides**. [S.l.]: FLorianópolis SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2003. Citado na página 16.

AÇO, D. do. **Calendário de provas da Olimpíada de Matemática 2020 é adiado por conta do Coronavírus**. 2020. Acessado em: 11 de agosto de 2024. Disponível em: <https://www.diariodoaco.com.br/noticia/0070450-calendario-de-provas-da-olimpiada-de-matematica>. Citado na página 29.

BENATTI, K. A.; BENATTI, N. C. da C. M. **Teoria dos Números**. 1. ed.. ed. Intersaberes, 2019. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Citado na página 13.

BRAGANÇA, B. **Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar. 107p**. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT). Universidade ..., 2013. Citado na página 23.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008 p. 302. Citado na página 23.

FARIAS, S. **Matemática para Todos**. [S.l.]: Editora do Brasil, 2020. Citado na página 20.

FILHO, E. de A. **Teoria elementar dos números**. [S.l.]: Nobel, 1981. Citado na página 13.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. São Paulo, Brasil: Paz e Terra, 1996. Citado na página 48.

GARCIA, R. R.; MOL, A. O papel das olimpíadas de conhecimento na educação básica. **Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 2, p. 25–40, 2014. Citado na página 49.

GONTIJO H, . A. F. O impacto da obmep no ensino de matemática no brasil. 2015. Citado na página 28.

LIMA, J.; SILVA, M. O impacto das olimpíadas de matemática na educação básica: desafios e oportunidades. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 17, n. 3, p. 55–72, 2019. Citado na página 46.

MONTI, C. R. L. *et al.* **A Contribuição das Olimpíadas de Matemática na Aprendizagem do Aluno**. 2022. Citado na página 24.

NATURA, I. **Resultados do SAEB/IDEB 2021 MARANHÃO**. 2021. Acessado em: 01 de Setembro de 2024. Disponível em: <https://www.institutonatura.org/wp-content/uploads/2023/04/MA_Resumo-Executivo-Ideb-e-Saeb-2021.pdf>. Citado na página 11.

OBMEP. **OBMEP EM NÚMEROS**. 2019. 18 de julho, 2024. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>. Citado na página 27.

OBMEP. **Apresentação**. 2024. 28 de julho, 2024. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Citado na página 11.

OBMEP. **Estrutura das provas**. 2024. 23 de julho, 2024. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Citado na página 26.

OBMEP. **OBMEP é fonte de oportunidades na educação**. 2024. 24 de julho, 2024. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/noticias.DO?id=814>. Citado na página 28.

OBMEP. **Regulamento**. 2024. 23 de julho, 2024. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.

SANTOS, A. P. **Introdução às Sequências Matemáticas**. [S.l.]: Editora Moderna, 2019. Citado na página 21.

SANTOS, Z. A. dos. **A teoria dos números na perspectiva da OBMEP**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 11, 17, 18 e 26.

SELBACH, S. História e didática. **Petrópolis, RJ: Vozes**, p. 11–13, 2010. Citado na página 28.

SOUZA, C. de. **O Fascínio dos Números Primos**. São Paulo, Brasil: Editora Matemática, 2020. Citado na página 17.